

动力学淬火过程中的不动点及衍生拓扑现象

邓天舒 易为

Fixed points and dynamic topological phenomena in quench dynamics

Deng Tian-Shu Yi Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 040303 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20181928

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181928>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

磁斯格明子拓扑特性及其动力学微磁学模拟研究进展

Research progress on topological properties and micro-magnetic simulation study in dynamics of magnetic skyrmions

物理学报. 2018, 67(13): 137506 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180235>

超冷费米气体的膨胀动力学研究新进展

Recent progress of expansion dynamics in strongly-interacting ultracold Fermi gases

物理学报. 2019, 68(4): 046702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182293>

Mg-CO($X1 \Sigma^+$)体系的冷碰撞动力学

Collision dynamic behaviors of CO($X1 \Sigma^+$) molecule with Mg atom in cold and ultracold temperatures

物理学报. 2015, 64(10): 103402 <https://doi.org/10.7498/aps.64.103402>

El-Nabulsi动力学模型下非Chetaev型非完整系统的精确不变量与绝热不变量

Exact invariants and adiabatic invariants for nonholonomic systems in non-Chetaev's type based on El-Nabulsi dynamical models

物理学报. 2015, 64(3): 034502 <https://doi.org/10.7498/aps.64.034502>

双色场控制与测量原子分子超快电子动力学过程的研究进展

Research progress of the control and measurement of the atomic and molecular ultrafast electron dynamics using two-color field

物理学报. 2016, 65(22): 223206 <https://doi.org/10.7498/aps.65.223206>

专题：冷原子-分子物理

动力学淬火过程中的不动点及衍生拓扑现象*

邓天舒 易为†

(中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

(2018年10月30日收到; 2018年12月27日收到修改稿)

本文对近两年来有关淬火动力学过程中拓扑现象的研究做简要综述. 这些动力学拓扑现象被动力学过程中的衍生拓扑不变量保护, 与淬火前后体系的拓扑性质有密切关系. 基于人工量子模拟平台的高度可控性, 已在诸如超冷原子、超导量子比特、核磁共振、线性光学等众多物理体系中, 通过对人工拓扑体系动力学过程的调控, 观测到如动力学涡旋、动量-时间域的 Hopf 映射及环绕数、拓扑保护的自旋环结构、动力学量子相变、动量-时间斯格明子等诸多动力学拓扑现象. 其中某些拓扑结构还可以在非么正动力学淬火过程中稳定存在. 这些研究将人们对拓扑物相的认识和研究从平衡态推广到非平衡动力学领域, 具有重要的科学价值.

关键词: 拓扑相, 淬火动力学, 动力学拓扑不变量, 超冷原子

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Ss

DOI: 10.7498/aps.68.20181928

1 引言

对拓扑相与相变的研究是现代物理的重要方向之一. 在传统的金斯堡-朗道相变中, 量子相与体系的对称性有深刻的关系, 量子相变由局域序参量刻画, 同时伴随着对称性的破缺. 拓扑相和相变与此截然不同: 拓扑相变一般不伴随对称性的破缺, 拓扑相则与体系基态波函数在希尔伯特空间的几何性质相关并由拓扑不变量刻画^[1,2]. 从人们发现量子霍尔效应至今已有三十余年了, 此间人们对无相互作用体系中拓扑相的理解和分类日趋完善, 对有相互作用体系中拓扑相的认识也有了长足进展. 近年来拓扑物态研究领域的一个新兴方向是在凝聚态物质之外的体系中寻找、刻画拓扑相及与拓扑相关的现象. 随着超冷原子、线性光学等量子模拟平台的蓬勃发展, 具有拓扑能带及拓扑特性的人工拓扑体系相继在这些平台上得以实现^[3-11]. 此外, 人工拓扑体系的高度可控性使对动力学过程及非厄米体系中拓扑现象的实验研究成为可能^[7-11], 而

这也驱动了相关领域的理论研究^[12-16]. 值得强调的是, 动力学过程及非厄米体系中的拓扑现象在传统凝聚态体系中一般很难被实现. 因此各量子模拟平台上的人工拓扑体系具有重要的价值.

在这一背景下, 本文简要综述近年来人们对淬火动力学过程中拓扑现象的理论和实验研究. 所谓淬火, 即体系由初始哈密顿量 H^i 的本征态出发, 在末态哈密顿量 H^f 作用下演化的动力学过程. 对于拓扑体系, 一个重要的问题是该体系的淬火动力学过程中是否也会出现受拓扑保护的拓扑现象? 更进一步, 如果初态和末态哈密顿量具有不同拓朴性质的能带, 体系淬火过程中的拓扑现象是由初态还是末态哈密顿量的拓扑性质决定? 对这些问题, 一个最直接的回答来自于对体系瞬时波函数几何性质的刻画. 文献^[17,18]研究了几种简单拓扑体系在淬火过程中瞬时波函数的拓扑不变量, 结果表明瞬时波函数的拓扑不变量不随时间变化, 即淬火过程的拓扑性质完全由初始哈密顿量决定. 由于这些工作中考虑的体系都是无相互作用 (或者平均场意义下无相互作用) 的厄米体系, 淬火动力学时间演

* 国家自然科学基金 (批准号: 15522545) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wyz@ustc.edu.cn

化相当于对初始态做局域幺正变换. 此时, 由于局域幺正变换不破坏保护拓扑性质的对称性, 瞬时态的拓扑不变量必然不变. 然而, 人们发现在淬火过程中会出现衍生的动力学拓扑现象, 这些拓扑现象或与初态和末态哈密顿量的拓扑性质相关, 或由衍生的动力学拓扑数保护, 并在动力学过程中表现出可观测量效应^[19–31]. 有趣的是, 即使基于同一淬火过程中观测到的拓扑现象, 也可以构造不同的衍生拓扑结构加以解释. 这一方面说明了淬火动力学过程中丰富的物理内涵, 另一方面也会引发关于动力学拓扑现象普适描述的思考.

冷原子体系的高度可控性使其成为研究淬火动力学过程中拓扑性质的理想平台之一. 2017年初, 德国汉堡大学的研究组通过周期驱动光晶格, 在冷原子中实现了基于 Floquet Haldane 模型的淬火过程, 并利用动力学量子相变理论对淬火过程中的动力学涡旋进行了刻画^[24]. 此后, 清华大学的研究组从理论上研究了淬火动力学过程中的衍生拓扑结构, 利用 Hopf 映射和环绕数重新解释了汉堡实验, 并把环绕数与淬火前后哈密顿量的静态拓扑性质联系起来^[19]. 这一理论随后被汉堡大学研究组的另一实验所证实^[25]. 与此同时, 来自中国科学技术大学和北京大学的研究组在对拉曼晶格上的冷原子气体进行淬火时发现了动力学过程中原子自旋分布中的环形结构, 并通过能带反转面的理论把环的出现与静态哈密顿量的陈数联系起来^[22,23,26]. 这些实验充分反映了淬火动力学中衍生拓扑现象的普遍性和丰富性. 除冷原子气体之外, 淬火过程中的动力学拓扑现象也在超导量子比特、单光子量子行走等量子模拟平台上被实验观测. 目前这些模拟平台都还是通过操控单量子比特模拟费米体系拓扑模型的淬火过程, 其优势是更易于进行实验操控和态重构, 以及可以方便的实现耗散以研究非幺正动力学淬火过程.

我们将从几个不同的方面介绍这一领域的一些最新进展, 着重描述与拓扑保护的动力学不动点相关的衍生拓扑结构. 所谓动力学不动点, 即在哪些参数点上体系不随时间演化. 而拓扑保护的物理学不动点的存在性与淬火前后静态哈密顿量的拓扑性质直接相关. 由此, 拓扑保护的物理学不动点为这些动力学拓扑现象提供了一个普适的基础, 并成为连接动力学拓扑现象和体系静态拓扑性质的桥梁.

2 动力学量子相变及动力学拓扑序参量

我们首先介绍动力学量子相变及其与拓扑保护不动点的关系. 先回顾动力学过程中 Loschmidt 回波的定义. Loschmidt 回波是量子体系动力学演化中的一个重要可观测量, 它描述体系初态在演化过程中的重现行为. 如体系的时间演化由 H^f 决定, 则 Loschmidt 回波 L 可表示为

$$L = |G(t)|^2 = |\langle \psi^i | e^{-iH^f t} | \psi^i \rangle|^2, \quad (1)$$

其中 $|\psi^i\rangle$ 为体系初态, $G(t)$ 为 Loschmidt 振幅. 如果对 (1) 式中的时间作 Wick 转动, 即取虚时 $t = -i\beta$, Loschmidt 振幅 $G(\beta)$ 的形式会非常类似于热力学中的正则系综配分函数

$$Z = \text{Tr}(e^{-\beta H^f}), \quad (2)$$

其中 $\beta = 1/k_B T$, k_B 为玻尔兹曼常数, T 为体系温度.

基于这一形式上的相似性, Heyl 等提出了动力学量子相变的概念^[32–36]. 在热力学中, 热力学相变发生在体系自由能 $F = -\frac{1}{V} \lim_{V \rightarrow \infty} \ln Z$ (V 为体系体积) 非解析处, 此时 Z 过零点. 相应的, Heyl 等人认为, 当 $G(t)$ 过零点时, 动力学演化过程中也存在动力学量子相变. 相应的动力学自由能 $g(t)$ 可定义为

$$g(t) = -\frac{1}{V} \lim_{V \rightarrow \infty} \ln |G|^2. \quad (3)$$

从上述定义可知, 动力学相变发生在瞬时态和初态正交的时刻, 此时动力学自由能非解析. 与热力学相变不同, 动力学量子相变的临界点可以在体系演化时周期性地出现, 而不是通过调节体系哈密顿量参数达到. 动力学量子相变在多大程度上可以定义为相变仍然是有争议的话题. 比如动力学量子相变是否继承了传统热力学相变中重要的性质, 如在临界点附近的标度行为, 相变普适类等.

与此同时, 人们发现动力学量子相变有深刻的几何溯源, 它的出现可以由动力学拓扑序参量联系起来^[35]. 在这个意义上, 动力学量子相变可以看作是动力学过程中的衍生拓扑现象. 动力学序参量的定义与所谓的 Pancharatnam 几何相位有密切联系. Pancharatnam 相位是 Loschmidt 振幅 G 的辐角中与动力学相位无关的部分, 源于体系动力学演化过程中的几何性质. 以无相互作用的半满晶格模型为例, 由于晶格平移对称性, 不同晶格动量子空

间的动力学演化解耦. 此时, Pancharatnam 几何相位写做 $\phi_k^G(t) = \phi_k(t) - \phi_k^{\text{dyn}}(t)$, 其中 $G = \prod_k G_k$, 而 $\phi_k(t)$ 为 G_k 的辐角. 体系的动力学相位为 $\phi_k^{\text{dyn}}(t) = -\int_0^t \langle \psi_k(t') | H_k^f | \psi_k(t') \rangle dt'$, 其中 H_k^f 为末态的 Bloch 哈密顿量 (假设 H_k^f 不含时).

在体系的淬火过程中, 往往存在一些 ϕ_k^G 在任意时刻都消失的不动点 $\{k_m\}$ ($m = 1, 2, \dots$). 而在拓扑体系的淬火过程里, 不动点的存在性与淬火前后哈密顿量的拓扑性质有一定关系 [37,38]. 举例来说, 对于一维两能带拓扑体系, 只要淬火前后的能带具有不同的拓扑数, 则不动点一定成对出现. 对于二维的两能带陈绝缘体, 如淬火前后哈密顿量能带的陈数绝对值不同, 则不动点也会成对出现. 其他诸如高维、多能带、不同拓扑分类的情况不动点原则上也会存在, 但规律会比较复杂 [39,40]. 除此之外, 淬火过程中也可能出现一些与拓扑完全无关的不动点. 这里, 我们主要考虑与淬火前后体系拓扑特性相关的不动点, 即拓扑不动点.

在拓扑不动点的基础上, 可以进一步定义动力学拓扑序参量. 对于一维体系, 动力学拓扑序参量可以写作

$$\nu^D(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{k_m}^{k_n} \frac{\partial \phi_k^G(t)}{\partial k} dk. \quad (4)$$

此处积分限取为两个不同的拓扑不动点. 由于 ϕ_k^G 在不动点上消失, ν^D 为从 $k \in (k_m, k_n)$ 到 $e^{i\phi_k^G}$ 的 $S^1 \rightarrow S^1$ 映射度, 因此只能取整数. 同时, 在动力学量子相变发生时 $G_k(t) = 0$, ϕ_k^G 无法定义, 所以 ν^D 只能在临界点处跳变. 在二维体系中, 动力学序参量的定义更为复杂. 这是因为动力学量子相变的临界点 k_c 会随时间在布里渊区内产生、移动、消失. 文献中目前存在两种不同的定义二维动力学拓扑序参量的方式, 其出发点均基于动力学量子相变的几何结构. 因此, 动力学拓扑序参量的重要性在于提供了一个从动力学衍生拓扑不变量的角度理解动力学量子相变的途径. 目前, 动力学量子相变已在离子阱, 超冷原子, 单光子量子行走, 以及核磁共振等多个人工量子模拟平台上被观测到, 动力学量子相变和 Pancharatnam 几何相及动力学拓扑序的关系也相继被实验证实 [24,27-30].

从上述讨论可以看出, 动力学量子相变及动力学拓扑序参量与拓扑保护的不动点有深刻联系. 基于这一认识, 下面我们将进一步揭示动力学量子相

变与其他衍生动力学拓扑不变量的关系.

3 动力学拓扑不变量

我们在第 2 节讨论了拓扑体系淬火过程中的拓扑不动点. 在拓扑不动点上, Pancharatnam 相位在时间演化过程中恒为零. 相位在拓扑不动点消失的本质原因在于这些不动点同时也是动力学不动点, 即在参数点上体系的态不随时间演化. 基于这一认识, 人们发现可以基于不动点在动量-时间的二维参数空间里定义衍生动力学拓扑不变量 [20,21,27,28,31]. 这些动力学拓扑不变量跟同样基于不动点的动力学量子相变、动力学拓扑序参量以及淬火前后哈密顿量的拓扑性质等紧密关联. 目前文献里这方面的工作主要集中在在一维两能带拓扑体系的淬火过程, 我们也将具体介绍这类体系中的不动点结构和动力学拓扑不变量. 高维多带体系的动力学淬火过程中的拓扑结构会更加丰富, 但仍有待进一步研究.

对于无相互作用且具有晶格平移对称性的体系, 不同动量部分的动力学解耦. 因此, 一维两能带拓扑体系的普适 Bloch 哈密顿量可表示为

$$H_k = \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}. \quad (5)$$

这里仅考虑突变淬火过程: 初态的哈密顿量 H_k^i 由 \mathbf{h}_k^i 刻画; 末态的哈密顿量 H_k^f 由 \mathbf{h}_k^f 刻画. 同时, 选择体系初态为 H_k^i 的基态. 对于能带体系, 体系的初态和任意时刻的瞬时态都可以表示在同一个 Bloch 球上.

如图 1 所示, 淬火动力学过程可以形象的表示为瞬时态矢量从初态出发, 在 Bloch 球面上绕 \mathbf{h}^f 轴的转动. 这里有两种值得注意的特殊情况.

其一, \mathbf{h}^i 和 \mathbf{h}^f 平行或反平行. 此时只有瞬时态的相位随时间演化, 瞬时态在 Bloch 球上的矢量位置不变. 这种情况对应着前述的不动点. 我们定义 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_k^f = \pm 1$ 为两种不同类型的不动点. 可以证明, 当初始哈密顿量和末态哈密顿量基态拓扑数不一样时, 不同类型的不动点一定成对出现. 对于二维两能带拓扑体系, 不同类型不动点出现的充分不必要条件变为初始哈密顿量和末态哈密顿量对应的陈数绝对值不同. 我们把这种与体系静态拓扑性质相关的不动点叫做拓扑保护的不动点.

其二, \mathbf{h}_k^i 和 \mathbf{h}_k^f 垂直. 此时, 瞬时态在 Bloch 球上演化半个周期后会与初态正交. 按照前一节的定

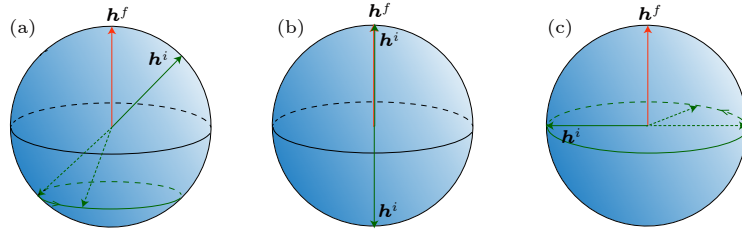


图 1 Bloch 球上的动力学演化 (a) 态矢量在 Bloch 球上绕 \mathbf{h}^f 运动; (b) 动力学不动点对应于 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = \pm 1$; (c) 临界点对应于 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = 0$. 实线代表 \mathbf{h}^i (绿色) 与 \mathbf{h}^f (红色), 虚线代表态矢量; 假设初态处于 H_k 基态上, 即 $t = 0$ 时态矢量与 \mathbf{h}^i 方向相反

Fig. 1. Visualizing dynamics on the Bloch sphere: (a) State vector revolving around the \mathbf{h}^f axis; (b) illustration of fixed points when $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = \pm 1$; (c) illustration of critical points with $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}^f = 0$.

义, 在相应的临界动量和时间处会发生动力学量子相变. 由于 $\mathbf{h}^i \cdot \mathbf{h}_k^f$ 是 k 的连续函数, 可以证明两个不同类型的不动点间一定存在至少一个临界动量 k_c 满足 $\mathbf{h}_k^i \cdot \mathbf{h}_k^f = 0$. 这样的临界点称为拓扑临界点.

由此可见, 拓扑不动点的存在与动力学量子相变临界点的存在有直接关系. 同时, 基于这些动力学不动点, 我们可以在衍生的动量-时间空间内定义动力学拓扑不变量. 由于每个动量上的态演化都是周期性的, 态矢量的演化在动量-时间参数空间内的轨迹是垂直于动量轴的圆. 而在动力学不动点, 态的轨迹是动量轴上的一个点. 这样, 任意两个动力学不动点间的态演化都可以映射到一个 Bloch 球上. 我们由此可以定义衍生的动力学拓扑陈数

$$C_{mn} = \frac{1}{4\pi} \int_{k_m}^{k_n} dk \int_0^{t_k} dt [\mathbf{h}(k, t) \times \partial_t \mathbf{h}(k, t)] \cdot \partial_k \mathbf{h}(k, t), \quad (6)$$

其中 $\mathbf{h}(k, t)$ 为动量 k 上瞬时态在时刻 t 对应的矢量, $k_{m,n}$ 为不动点, t_k 为动量 k 上的演化周期. 可以证明, 动力学陈数不为零的条件是 k_m 和 k_n 是不同类型的不动点. 考虑到前述静态哈密顿量拓扑性质和动力学不动点之间的关系, 我们可以证明淬火前后静态哈密顿量具有不同拓扑数是存在非零动力学拓扑不变量的充分非必要条件.

动力学拓扑不变量的存在直接体现在 $\mathbf{h}(k, t)$ 于动量-时间衍生空间内的自旋结构上. 如图 2 所示, 当淬火前后哈密顿量具有不同拓扑数时, $\mathbf{h}(k, t)$ 在动量-时间空间表现出斯格明子结构. 由于前述的不动点和动力学量子相变临界点的关系, 我们发现动力学量子相变就发生在斯格明子的极点上. 这一结构已在实验上被直接观测到 [27,31]. 同时, 如文献 [21] 所示, 动力学拓扑不变量的存在, 也体现在体系的纠缠谱中.

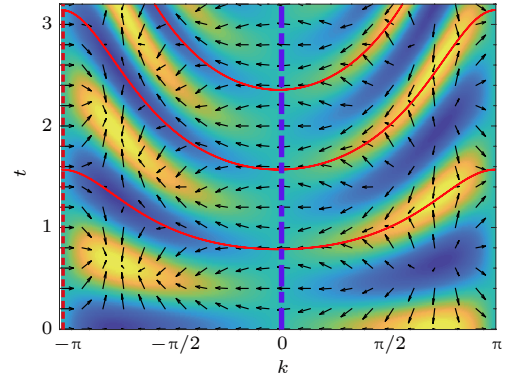


图 2 淬火前后哈密顿量具有不同拓扑数时的典型斯格明子结构. 黑色箭头为自旋在平面内方向, 背景颜色对应自旋在与平面垂直方向上的分量大小, 蓝色对应向内, 黄色对应向外. 竖直虚线为不动点位置, 红色实线表示不同动量 k 点的周期

Fig. 2. Momentum-time skyrmions when pre- and post-quench Hamiltonians possess different winding numbers.

4 非厄米体系中的非幺正淬火过程

前述的动力学拓扑结构也存在于非厄米体系的非幺正淬火过程中, 前提是体系的动力学演化仍然是相干的 [41]. 这一前提满足的条件体系具有宇称-时间对称性. 一般而言, 非厄米哈密顿量的本征值不是实数. 但如果该哈密顿量有宇称-时间对称性, 即 $\mathcal{P}TH(\mathcal{P}\mathcal{T})^{-1} = H$, 且本征态也为 $\mathcal{P}\mathcal{T}$ 算符的本征态时, 该本征态对应的哈密顿量本征值为实数 [42-44]. 这里 \mathcal{P} 为宇称算符, \mathcal{T} 为时间反演算符. 如果宇称-时间守恒的哈密顿量所有本征值均为实数, 则体系处于宇称-时间对称守恒相; 反之, 如哈密顿量某些本征值非实数, 体系处于宇称-时间对称自发破缺相.

这里我们考虑最简单的宇称-时间守恒的拓扑体系, 一维宇称-时间守恒的 Su-Schieffer-Heeger (SSH) 模型 [45,46].

如图 3(a) 所示, 该模型与标准 SSH 模型的区别

别在每个格点上均存在增益或损耗项. 体系的 Bloch 哈密顿量仍然可记为 $H_k = \mathbf{h}_k \cdot \boldsymbol{\sigma}$, 其中 $h_x = w \cos k + v$, $h_y = w \sin k$, and $h_z = iu$. 体系的拓扑数可由全局贝里相 φ_B 对应的绕数刻画

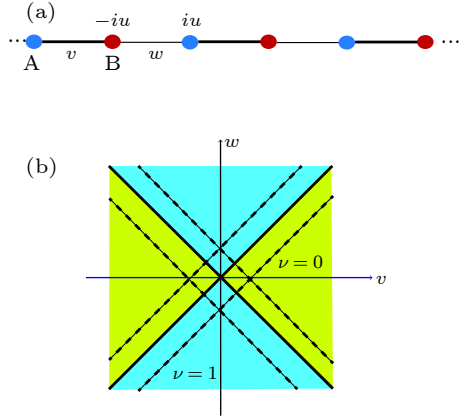


图 3 非厄米 SSH 模型及其拓扑相图 (a) 非厄米 SSH 模型. 在厄米 SSH 模型的基础上, 每个格点上均有增益或损耗; (b) 体系拓扑相图. 实线为拓扑边界, 虚线为宇称-时间对称与对称破缺区域的边界. v , w 为 SSH 模型的跃迁系数, u 为增益损耗系数, ν 为绕数

Fig. 3. Non-Hermitian SSH model and its topological phase diagram: (a) Non-Hermitian SSH model; (b) topological phase diagram.

$$\nu = \varphi_B / 2\pi, \quad (7)$$

$$\varphi_B = -i \sum_{\mu=\pm} \oint dk \frac{\langle \chi_{\mu} | \frac{\partial}{\partial k} | \psi_{\mu} \rangle}{\langle \chi_{\mu} | \psi_{\mu} \rangle}, \quad (8)$$

其中 $|\chi_{\mu}\rangle$ 和 $|\psi_{\mu}\rangle$ ($\mu = +, -$) 分别是 H_k 的左、右本征矢, 即 $H_k |\psi_{\mu}\rangle = \epsilon_{\mu} |\psi_{\mu}\rangle$, $H_k^{\dagger} |\chi_{\mu}\rangle = \epsilon_{\mu}^* |\chi_{\mu}\rangle$. 这里 ϵ_{μ} 是体系本征谱. 体系的拓扑相图如图 3(b) 所示. 我们注意到拓扑相变界周围是宇称-时间对称性自发破缺区域.

为了描述非么正淬火演化, 我们可以把体系的密度矩阵写为 [41,47,48]

$$\rho(k, t) = \frac{1}{2} [\tau_0 + \mathbf{d}(k, t) \cdot \boldsymbol{\tau}]. \quad (9)$$

这里 $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \tau_3)$, 并且 $\tau_{\gamma} = \sum_{\mu, \nu=\pm} |\psi_{\mu}^f\rangle \sigma_{\gamma}^{\mu\nu} \langle \chi_{\nu}^f|$ ($\gamma = 0, 1, 2, 3$). 引入 $\boldsymbol{\tau}$ 矩阵的好处是, 虽然密度矩阵是非厄米的, $\mathbf{d}(k, t)$ 是模为 1 的实矢量. 这一点至关重要, 因为我们又可以在 Bloch 球上表示体系演化的轨迹了.

当末态哈密顿量处在宇称-时间守恒区域时, 瞬时态矢量在 Bloch 球上绕着南北极旋转. 此时, Bloch 球南北极对应的动量就是动力学不动点. 当末态哈密顿量处在宇称-时间对称自发破缺区域时,

瞬时态矢量在 Bloch 球上会沿着大圆渐近趋近北极. 此时不存在动力学不动点. 基于这一图像, 我们可以在动力学不动点存在的时候构造动力学拓扑不变量. 事实上, 可以证明当体系在宇称-时间守恒的不同拓扑相间淬火时, 不同种类的不动点 (即分别对应于南北极的不动点) 会成对出现. 此时, 所有么正淬火演化过程中的动力学拓扑构造和相关可观测量也会存在. 而只要淬火前后的哈密顿量之一处于宇称-时间对称自发破缺区域, 不动点以及动力学拓扑构造就不一定存在了. 需要强调的是, 在非么正动力学淬火过程中, 不动点和动力学量子相变的临界点不再出现在布里渊区的高对称点. 这会导致多个临界时间尺度的出现. 如图 4 所示, 此时动力学量子相变的发生会存在多个周期, 同时也会存在多个对应的动力学拓扑序参量.

实验上, 具有损耗-增益的宇称-时间守恒非厄米体系在光波导, 微波腔阵列, 线性光学等多中物

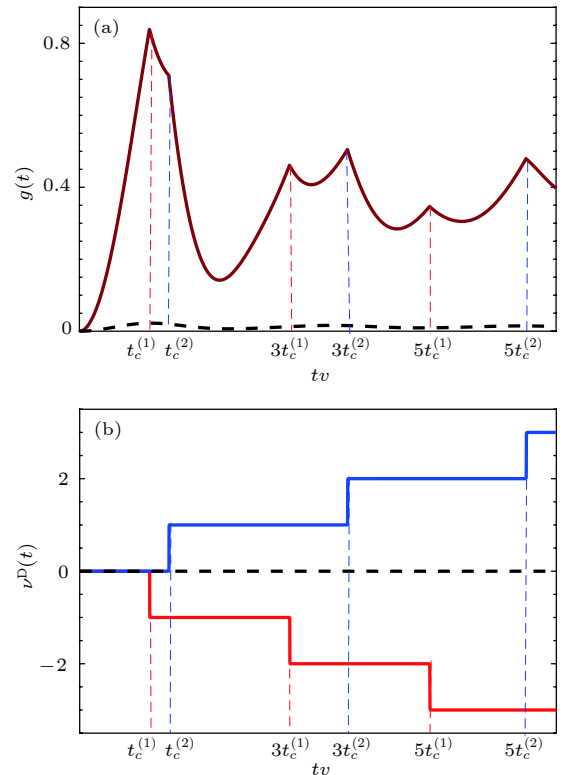


图 4 非厄密 SSH 模型淬火中的典型动力学自由能 $g(t)$ 与动力学拓扑序参量 $\nu^D(t)$ (a) 动力学自由能 $g(t)$; (b) 动力学拓扑序参量 $\nu^D(t)$. 在非厄米淬火过程中存在两个临界时间尺度及两个动力学拓扑序参量

Fig. 4. Dynamic free energy $g(t)$ and dynamic topological order parameter $\nu^D(t)$ in the quench dynamics of non-Hermitian SSH model: (a) Dynamic free energy $g(t)$; (b) dynamic topological order parameter $\nu^D(t)$.

理体系中实现. 在一些难以实现增益的物理体系如冷原子气体、单光子量子行走中, 可以实现基于纯损耗的被动宇称-时间守恒非厄米体系^[49,50]. 被动宇称-时间守恒非厄米体系虽然不会有纯实数的本征谱, 但体系的能谱及动力学性质可以方便地映射到基于损耗-增益的主动宇称-时间守恒非厄米体系上. 最近, 动力学量子相变、动力学拓扑序参量、动力学拓扑不变量等衍生动力学拓扑现象已经在具有被动宇称-时间守恒性质的单光子非么正量子行走实验里被探测到^[31].

5 总结与展望

本文集中讨论了几种基于拓扑保护动力学不动点的动力学拓扑结构的构造和关联. 由于相关动力学拓扑不变量的定义都基于不同类拓扑不动点的存在, 而后者又与静态哈密顿量的拓扑性质密切相关, 拓扑保护的 dynamics 不动点成为有机联系各种动力学衍生拓扑现象及平衡态拓扑相的核心要素. 目前对于动力学拓扑现象的讨论多数集中在低维(一维或者二维)两能带五相互作用体系的突变淬灭过程. 高维多能带拓扑系统淬灭过程中会出现更丰富的拓扑结构, 如何系统的刻画它们是今后研究的一个方向. 除本文讨论的衍生拓扑现象以外, 其他已知的动力学拓扑结构如 Hopf 映射、环绕数、基于能带反转面的拓扑环等与动力学不动点及动力学量子相变临界点的关系则需要进一步研究讨论. 因此, 关于动力学拓扑结构的更普适的描述是个亟待解决的问题.

参考文献

- [1] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [2] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [3] Jotzu G, Messer M, Desbuquois R, Lebrat M, Uehlinger T, Greif D, Esslinger T 2014 *Nature* **515** 237
- [4] Fläschner N, Rem B S, Tarnowski M, Vogel D, Lühlmann D S, Sengstock K, Weitenberg C 2016 *Science* **352** 1091
- [5] Wu Z, Zhang L, Sun W, Xu X T, Wang B Z, Ji S C, Deng Y, Chen S, Liu X J, Pan J W 2016 *Science* **354** 83
- [6] Song B, Zhang L, He C, Poon T F J, Haiyev E, Zhang S, Liu X J, Jo G B 2018 *Sci. Adv.* **4** 4748
- [7] Poli C, Bellec M, Kuhl U, Mortessagne F, Schomerus H 2015 *Nat. Commun.* **6** 6710
- [8] Weimann S, Kremer M, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Makris K G, Segev M, Rechtsman M C, Szameit A 2017 *Nat. Mater.* **16** 433
- [9] Xiao L, Zhan X, Bian Z H, Wang K K, Zhang X, Wang X P, Li J, Mochizuki K, Kim D, Kawakami N, Yi W, Obuse H, Sanders B C, Xue P 2017 *Nat. Phys.* **13** 1117
- [10] Zeuner J M, Rechtsman M C, Plotnik Y, Lumer Y, Nolte S, Rudner M S, Segev M, Szameit A 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 040402
- [11] Zhan X, Xiao L, Bian Z, Wang K, Qiu X, Sanders B C, Yi W, Xue P 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 130501
- [12] Shen H, Zhen B, Fu L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 146402
- [13] Chen Y, Zhai H 2018 *Phys. Rev. B* **98** 245130
- [14] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [15] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [16] Yao S, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [17] Cao M D, Cooper N R, Bhaseen M J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 236403
- [18] D'Alessio L, Rigol M 2015 *Nat. Commun.* **6** 8336
- [19] Wang C, Zhang P, Chen X, Yu J, Zhai H 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 185701
- [20] Yang C, Li L, Chen S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 060304
- [21] Gong Z, Ueda M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250601
- [22] Zhang L, Zhang L, Niu S, Liu X J 2018 *Science Bulletin* **63** 1385
- [23] Zhang L, Zhang L, Liu X J 2018 arXiv: 1807.10782 [cond-mat.quant-gas]
- [24] Fläschner N, Vogel D, Tarnowski M, Rem B S, Lühlmann D S, Heyl M, Budich J C, Mathey L, Sengstock K, Weitenberg C 2018 *Nat. Phys.* **14** 265
- [25] Tarnowski M, Nur-Unal F, Fläschner N, Rem B S, Eckard A, Sengstock K, Weitenberg C 2017 arXiv:1709.01046 [cond-mat.quant-gas]
- [26] Sun W, Yi C R, Wang B Z, Zhang W W, Sanders B C, Xu X T, Wang Z Y, Schmiedmayer J, Deng Y J, Liu X J, Chen S, Pan J W 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 250403
- [27] Guo X Y, Yang C, Zeng Y, Peng Y, Li H K, Deng H, Jin Y R, Chen S, Zheng D N, Fan H 2018 arXiv:1806.09269 [cond-mat.stat-mech]
- [28] Wang K, Qiu X, Xiao L, Zhan X, Bina Z, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 020501
- [29] Tian T, Ke K, Zhang L, Lin L, Shi Z, Huang P, Lee C, Du J 2018 arXiv:1807.04483 [quant-ph]
- [30] Xu X Y, Wang Q Q, Heyl M, Budich J C, Pan W W, Chen Z, Jan M, Sun K, Xu J S, Han Y J, Li C F, Guo G C 2018 arXiv:1808.03930 [quant-ph]
- [31] Wang K, Qiu X, Xiao L, Zhan X, Bian Z, Yi W, Xue P 2018 arXiv:1808.06446 [quant-ph]
- [32] Heyl M, Polkovnikov A, Kehrein S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 135704
- [33] Heyl M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 140602
- [34] Heyl M 2018 *Rep. Prog. Phys.* **81** 054001
- [35] Budich J C, Heyl M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085416
- [36] Huang Z, Balatsky A V 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 086802
- [37] Vajna S, Dora B 2015 *Phys. Rev. B* **91** 155127
- [38] Zhou L W, Wang Q H, Wang H L 2018 *Phys. Rev. A* **98** 022129
- [39] Gu J, Sun K 2016 *Phys. Rev. B* **94** 12511
- [40] Qiu X, Deng T S, Guo G C, Yi W 2018 *Phys. Rev. A* **98** 021601
- [41] Qiu X, Deng T S, Hu Y, Xue P, Yi W 2018 arXiv:1806.10268[cond-mat.quant-gas]
- [42] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [43] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [44] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [45] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42**

1698

- [46] Zhu B, Lu R, Chen S 2014 *Phys. Rev. A* **89** 062102
 [47] Garrison J, Wright E 1988 *Phys. Lett. A* **128** 177
 [48] Brody D C 2014 *J. Phys. A: Math. Theor.* **47** 035305

- [49] Li J, Harter A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2016 arXiv:1608.05061[cond-mat.quant-gas]
 [50] Kohei K, Yuto A, Hosho K, Masahito U 2018 *Phys. Rev. B* **98** 085116

SPECIAL TOPIC—Cold atoms and molecules

**Fixed points and dynamic topological phenomena
in quench dynamics***

Deng Tian-Shu Yi Wei[†]

(Key Laboratory of Quantum Information, University of Science and Technology of China, CAS, Hefei 230026, China)

(Received 30 October 2018; revised manuscript received 27 December 2018)

Abstract

In this review, we discuss the recent progress on the study of dynamic topological phenomena in quench dynamics. In particular, we focus on dynamic quantum phase transition and dynamic topological invariant, both of which are hinged upon the existence of fixed points in the dynamics. Further, the existence of these fixed points are topologically protected, in the sense that their existence are closely related to static topological invariants of pre- and post-quench Hamiltonians. We also discuss under what condition these dynamic topological phenomena are robust in non-unitary quench dynamics governed by non-Hermitian Hamiltonians. So far, dynamic topological phenomena have been experimentally observed in synthetic systems such as cold atomic gases, superconducting qubits, and linear optics. These studies extend our understanding of topological matter to the non-equilibrium regime.

Keywords: topological phase, quench dynamics, dynamic topological invariant, ultracold atoms

PACS: 03.75.Kk, 03.75.Ss

DOI: 10.7498/aps.68.20181928

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 15522545).

† Corresponding author. E-mail: wyz@ustc.edu.cn