

### 一维准周期晶格中玻色子对的迁移率边

徐志浩 皇甫宏丽 张云波

#### Mobility edges of bosonic pairs in one-dimensional quasi-periodical lattices

Xu Zhi-Hao Huangfu Hong-Li Zhang Yun-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 087201 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20182218

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182218>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

具有p波超流的一维非公度晶格中迁移率边研究

Identifying the mobility edges in a one-dimensional incommensurate model with p-wave superfluid

物理学报. 2016, 65(11): 117101 <https://doi.org/10.7498/aps.65.117101>

一维准周期晶格的性质及应用

Properties and applications of one dimensional quasiperiodic lattices

物理学报. 2019, 68(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181927>

高迁移率Ge沟道器件研究进展

Research progress of high mobility germanium based metal oxide semiconductor devices

物理学报. 2015, 64(20): 208501 <https://doi.org/10.7498/aps.64.208501>

多个硅通孔引起的热应力对迁移率和阻止区的影响

Effects of thermal stress induced by multiple through silicon vias on mobility and keep out zone

物理学报. 2015, 64(17): 176601 <https://doi.org/10.7498/aps.64.176601>

高功率微波作用下高电子迁移率晶体管的损伤机理

High power microwave damage mechanism on high electron mobility transistor

物理学报. 2016, 65(16): 168501 <https://doi.org/10.7498/aps.65.168501>

基于GaN同质衬底的高迁移率AlGaIn/GaN HEMT材料

High mobility AlGaIn/GaN high electronic mobility transistors on GaN homo-substrates

物理学报. 2018, 67(7): 076801 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172581>

## 一维准周期晶格中玻色子对的迁移率边\*

徐志浩<sup>†</sup> 皇甫宏丽 张云波

(山西大学理论物理研究所, 太原 030006)

(2018 年 12 月 17 日收到; 2019 年 2 月 20 日收到修改稿)

研究了一维非公度的准周期晶格中的玻色子对的迁移率边. 通过微扰方法, 解析推导出强相互作用极限下准周期晶格中玻色子对迁移率边的解析表达式, 通过数值证明在系统参数  $b$  较小时, 迁移率边的解析结果符合得较好, 而当  $b \rightarrow 1$  时, 解析结果将发生偏离.

**关键词:** 安德森局域化, 迁移率边, 无序

**PACS:** 72.20.Ee, 72.15.Rn, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.68.20182218

## 1 引言

60 多年前, 安德森在一篇标志性的文章中预测了无序系统中的单粒子波函数具有局域的特性, 这一现象被称为安德森局域化<sup>[1]</sup>, 在凝聚态物理的各个重要分支被广泛关注. 安德森模型中最为重要的概念之一是存在扩展态与局域态的迁移率边<sup>[2-7]</sup>, 即费米面从位于扩展态区域穿过迁移率边进入局域态区域时系统从金属相转变为绝缘体相<sup>[4, 8]</sup>, 反之亦然. 不同于三维无序系统, 对于一维和二维的安德森模型<sup>[9-11]</sup>, 标度理论指出自由粒子总是局域化的, 不存在金属绝缘体转变<sup>[12]</sup>. 而三维系统中当无序大于某一阈值时将导致局域化, 对于弱无序<sup>[9]</sup>, 系统则呈现金属的特性, 具有有限的电导. 最近实验已经能够在光子晶体和冷原子体系中直接观测安德森局域化现象以及迁移率边<sup>[13-15]</sup>.

另一方面, 一维具有非公度准周期调制势的 Aubry-André (AA) 模型<sup>[16]</sup>, 展现了完全不同的局域化性质. 由于 AA 模型的自对偶特性<sup>[17]</sup>, 通过调节系统的参数, 系统中所有的本征态要么全为局域态要么全为扩展态, 并不存在迁移率边<sup>[16]</sup>. 然而基

于 AA 模型得到迁移率边的方法一般有两种, 其中一种是破坏系统的自对偶性质, 如增加次近邻跃迁项等<sup>[5]</sup>; 另一种是寻找具有能量依赖的自对偶模型<sup>[7]</sup>, 这类模型的迁移率边往往具有非常简洁的解析形式, 受到了广泛的关注和研究.

自从无序模型被提出, 相互作用在无序系统中如何影响安德森局域化这一问题一直困扰着人们<sup>[18-22]</sup>. 2006 年, Basko 等提出在无序体系中<sup>[23]</sup>, 相互作用的多体系统将会经历所谓的多体局域化转变<sup>[24-26]</sup>, 在强无序下, 相互作用不足以热化系统, 所以系统的电导为零. 而对于弱无序情况, 系统可以被热化, 具有有限的导电率. 多体局域化相和多体局域化转变由于其独特的性质对量子统计物理的基本问题发起了挑战. 在多体局域化相, 系统的局域可观测量不能够被热化<sup>[27]</sup>, 这违背了本征态热化假说. 最近在这一领域有很多的进展, 如一维随机无序系统<sup>[24]</sup>, AA 模型和一维具有 Fibonacci 序列势<sup>[8, 28, 29]</sup>的系统中的多体局域化转变. 一个重要的问题是: 在多体局域化系统中是否存在迁移率边? 虽然一些数值结果声称在多体系统中存在多体迁移率边, 但是由于系统尺寸的限制, 这一问题仍然是一个开放性问题, 值得人们继续探索.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11604188, 11234008, 11474189, 11674201)、山西省自然科学基金 (批准号: 201601D201027) 和山西省“1331 工程”重点学科建设计划资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn

本文主要研究具有一维准周期势的晶格中玻色子对的迁移率边的性质, 利用微扰方法得到系统迁移率边的解析表达式, 证明在两粒子系统中存在迁移率边, 进一步与精确对角化结果比较, 该研究对理解多体系统迁移率边<sup>[30–32]</sup>有重要意义.

## 2 理论模型

考虑两个具有相互作用的玻色子在一维非公度的准周期晶格中的运动, 系统的哈密顿量可以表示为  $\hat{H} = \hat{H}_0 + \hat{U}$ , 其中

$$\hat{H}_0 = -J \sum_j \left( \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{h.c.} \right) + \sum_j \lambda(j) \hat{n}_j, \quad (1)$$

并且

$$\hat{U} = \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1), \quad (2)$$

这里  $J$  为跃迁强度, 它被设为单位能量  $J = 1$ , 这里仅考虑最近邻格点之间的跃迁;  $\hat{c}_j^\dagger$  ( $\hat{c}_j$ ) 为第  $j$  个格点的产生 (湮灭) 算符,  $\hat{n}_j = \hat{c}_j^\dagger \hat{c}_j$  为第  $j$  个格点的粒子数算符. 化学势项  $\lambda(j) = 2\lambda \frac{\cos(2\pi\alpha j)}{1 - b \cos(2\pi\alpha j)}$ , 其中  $\lambda$  为化学势调制强度,  $\alpha$  用来控制系统的调制周期. 当  $\alpha$  为无理数时, 为准周期调制, 这里取  $\alpha = (\sqrt{5} - 1)/2$ . 化学势为参数  $b$  的连续函数, 其中  $b \in (-1, 1)$ . 可以看出当  $b = \pm 1$  时, 在格点数目趋于无穷的情况下存在发散点; 而当  $b = 0$  时, 哈密顿量  $\hat{H}_0$  回到标准的 AA 模型, 此时如果  $\lambda < J$ , 所有的单粒子本征态为扩展态, 而当  $\lambda > J$  时, 所有本征态都为局域态, 系统不存在迁移率边.  $\lambda = J$  是扩展态与局域态转变点, 此处发生安德森局域化转变, 所有的本征态都处于临界态并且体现出多分形的行为<sup>[3,16]</sup>. 对于  $b \neq 0$  的情况, 单粒子系统  $\hat{H}_0$  存在能量依赖的自对偶特性, 它的迁移率边可以写成一个简洁的表达式<sup>[7]</sup>:

$$b\varepsilon = 2(J - \lambda), \quad (3)$$

其中  $\varepsilon$  为单粒子能量. 相互作用项 (2) 式为玻色哈伯德相互作用形式, 其中  $U$  为相互作用强度. 本文关注强相互作用极限下粒子对的情形, 而  $U$  的符号并不影响本文的结果.

## 3 结果分析与讨论

系统的定态薛定谔方程可以写为

$$\left( \hat{H}_0 + \hat{U} \right) |\psi\rangle = E |\psi\rangle, \quad (4)$$

应用格林函数算符  $\hat{G}_E = \left( E - \hat{H}_0 \right)^{-1}$ , 方程 (4) 可以表示为  $|\psi\rangle = \hat{G}_E \hat{U} |\psi\rangle$ . 对于两玻色子情况, 相互作用项可以在格点基矢  $|j, k\rangle$  下写出, 即  $\hat{U} = U \sum_k |k, k\rangle \langle k, k|$ . 考虑玻色子对空间, 我们用态  $|j, j\rangle$  投影到方程 (4) 两边, 得到

$$\psi(j, j) = U \sum_k \langle j, j | \hat{G}_E |k, k\rangle \psi(k, k), \quad (5)$$

其中  $\psi(j, j) = \langle j, j | \psi\rangle$ . 而格林函数算符可以在能量基矢  $|\phi_r, \phi_s\rangle$  中表示为  $\hat{G}_E = \sum_{r,s} (E - \varepsilon_r - \varepsilon_s)^{-1} |\phi_r, \phi_s\rangle \langle \phi_r, \phi_s|$ , 其中  $|\phi_{r(s)}\rangle$  为  $\hat{H}_0$  的本征态, 相应的本征能量为  $\varepsilon_{r(s)}$ . 因此方程 (5) 中,

$$\langle j, j | \hat{G}_E |k, k\rangle = \sum_{r,s} \frac{\phi_r(j) \phi_s(j) \phi_r^*(k) \phi_s^*(k)}{E - \varepsilon_r - \varepsilon_s}, \quad (6)$$

其中  $\phi_r(j)$  表示第  $r$  个本征态中第  $j$  个格点上的概率幅. 令  $f(j) = \psi(j, j)$ ,  $K_E(j, k) = \langle j, j | \hat{G}_E |k, k\rangle$ , 结合方程 (5) 和 (6), 处理如下的本征值问题:

$$\frac{1}{U} f(j) = \sum_k K_E(j, k) f(k), \quad (7)$$

这里  $j, k = 1, 2, \dots, L$ , 本征值  $\varsigma = 1/U$ . 对于能量值小于无相互作用的两粒子基态能量 ( $E < 2\varepsilon_1$ ) 的情况, 本征值  $\varsigma$  都为负值, 对应于吸引的束缚态. 而当能量值大于无相互作用的两粒子最高激发态能量 ( $E > 2\varepsilon_L$ ), 所有的本征值  $\varsigma$  都为正值, 对应于排斥的束缚态. 而若波函数  $f(j)$  能够对应于能量为  $E$  的吸引的束缚态, 那么也能描述能量为  $-E$  的排斥的束缚态. 在强相互作用  $|U| \gg \lambda$ ,  $t$  下, 两玻色子紧密地结合为玻色子对, 具有相当大的有效质量. 通过将  $K_E(j, k)$  对  $E^{-1}$  展开到三阶, 得到

$$\begin{aligned} & K_E(j, k) \\ &= \delta_{j,k} \left( \frac{1}{E} + \frac{2\lambda(j)}{E^2} + \frac{4\lambda(j)^2 + 4}{E^3} \right) + \frac{2}{E^3} \delta_{j,k \pm 1}, \end{aligned} \quad (8)$$

代入到方程 (7), 整理得到

$$\begin{aligned} & \frac{2}{E} f(j+1) + \frac{2}{E} f(j-1) + \left( 2\lambda(j) + \frac{4\lambda(j)^2}{E} \right) f(j) \\ &= \left( \frac{E^2}{U} - E - \frac{4}{E} \right) f(j). \end{aligned} \quad (9)$$

(9) 式表明, 在一阶近似下  $E \sim U$ , 即玻色子对能

量分布在  $U$  附近. 由于讨论紧束缚的粒子对, 尽管金属绝缘体转变点  $\lambda \ll 1$ , 然而当  $b \rightarrow \pm 1$  时, 方程 (9) 中,  $4\lambda(j)^2/E \approx 4\lambda(j)^2/U$  将会无法忽略. 因此首先讨论  $b$  取值比较小的情况, 我们可以放心地忽略方程 (9) 式中的  $4\lambda(j)^2/E$  项. 对比于单粒子定态薛定谔方程

$$-J\phi(j+1) - J\phi(j-1) + \lambda(j)\phi(j) = \varepsilon\phi(j), \quad (10)$$

方程 (9) 具有与无相互作用下推广的 AA 模型类似的形式, 即有效跃迁概率  $J_{\text{eff}} = -2/E$ , 有效化学势强度  $\lambda_{\text{eff}} = 2\lambda$ . 因此玻色子对的迁移率边可以由如下方程所描述:

$$b \left( \frac{E^2}{U} - E - \frac{4}{E} \right) = -4 \left( \frac{1}{E} + \lambda \right), \quad (11)$$

这是本文的中心结论. 接下来围绕方程 (11) 讨论玻色子对在一维准周期势中的迁移率边.

首先讨论  $b = 0$  的情况. 在无相互作用时, 系统为标准的 AA 模型, 不存在迁移率边. 然而根据方程 (11), 在 AA 模型中的玻色子对存在迁移率边为

$\lambda = -1/E$ . 为了验证本文的结果, 引入标准参与率 (normalized participation ratio, NPR)  $\eta(E)$  来表征多体态是否局域化<sup>[26]</sup>, 表示为

$$\eta(E) = \frac{1}{\sum_{\{n_1, n_2, \dots, n_L\}} |\psi_E(\{n_1, n_2, \dots, n_L\})|^4 V_H}, \quad (12)$$

其中  $V_H$  表示希尔伯特空间的维度,  $\psi_E(\{n_1, n_2, \dots, n_L\})$  表示为哈密顿量  $\hat{H}$  在福克基下的本征能量为  $E$  的多体本征波函数. 在热力学极限下,  $\eta(E)$  趋于零时, 多体波函数为局域态, 而当  $\eta(E)$  为有限值时, 波函数为扩展态. 图 1 展示了  $b = 0$  时, 标准参与率  $\eta(E)$  在不同的相互作用强度  $U$  下随无序强度  $\lambda$  变化的情况. 图 1(a)—(d) 分别对应于  $U = -15, -20, -40$  和  $-100$ , 这里  $L = 150$ , 图中蓝色实线为解析结果 (11) 式.

由图 1 可以看到在不同的相互作用下, 随着  $\lambda$  的增加系统确实存在从扩展态到局域态的转变. 当  $U = -15$  时, 已经可以明显看到迁移率边的存在,

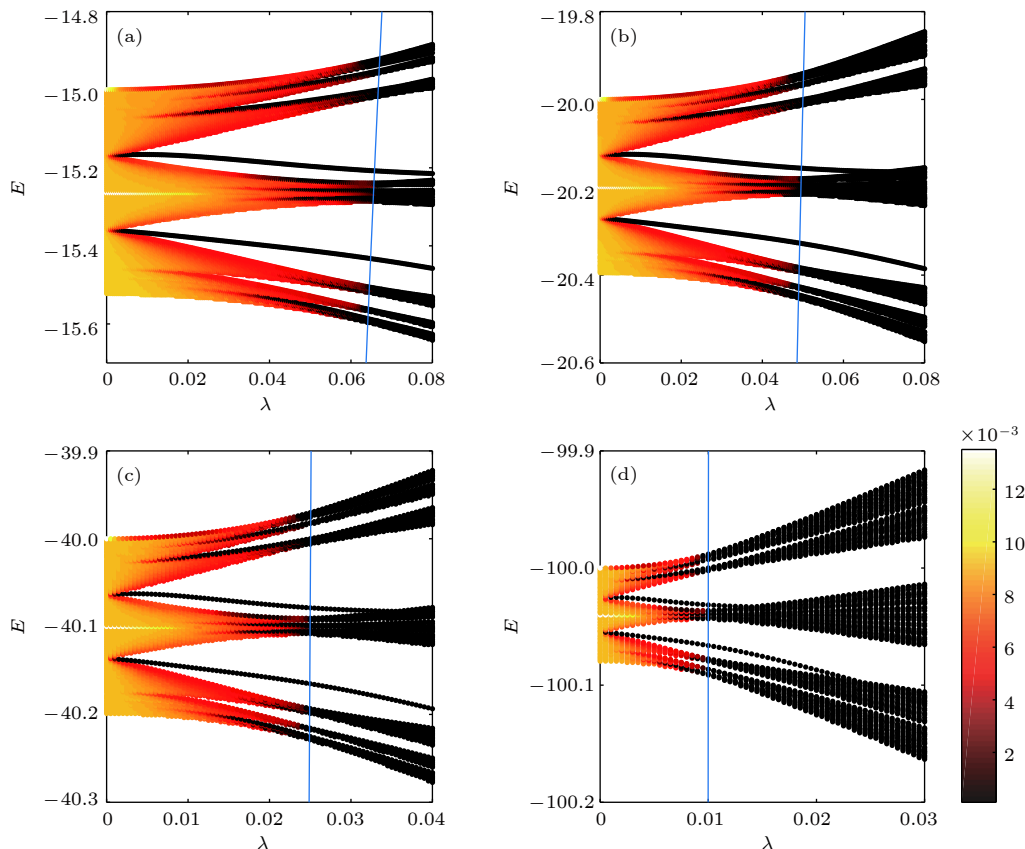


图 1  $b = 0$  时, NPR 在不同的相互作用强度  $U$  下随无序强度  $\lambda$  和能量本征值  $E$  的变化 (a)  $U = -15$ ; (b)  $U = -20$ ; (c)  $U = -40$ ; (d)  $U = -100$ ; 蓝色的实线对应迁移率边的表达式; 这里取  $L = 150$

Fig. 1. NPR varying with the disorder strengths  $\lambda$  and the energy eigenvalues  $E$  for  $b = 0$ ,  $L = 150$  and different  $U$ : (a)  $U = -15$ ; (b)  $U = -20$ ; (c)  $U = -40$ ; (d)  $U = -100$ . The blue solid line represents the analytical expression of the mobility edges.

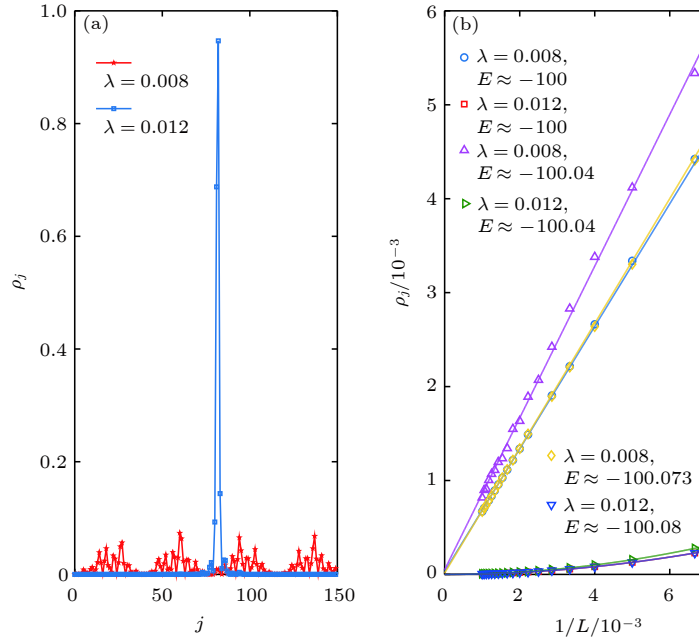


图 2 (a)  $b = 0$ ,  $U = -100$ ,  $E = -100.044$  时,  $\lambda$  分别为 0.008 和 0.012 所对应本征态的密度分布; (b)  $b = 0$ ,  $U = -100$  时, 不同  $\lambda$  和  $E$  所对应的本征态的 NPR 随  $1/L$  的变化

Fig. 2. (a) Density distributions for  $b = 0$ ,  $U = -100$ ,  $E = -100.044$ ,  $\lambda = 0.008$  and 0.012, respectively; (b) NPR varying with  $1/L$  for  $b = 0$ ,  $U = -100$  and different  $\lambda$  and  $E$ .

通过解析求解, 具有迁移率边的区间大约为  $\lambda \in [0.0637, 0.0675]$ , 即图中蓝色实线并不垂直于  $\lambda$  轴. 随着  $|U|$  的增大, 这个区间逐渐变小, 在  $U = -100$  时, 图中的迁移率边几乎变为  $\lambda \approx 0.01$  的一条直线. 由此可以推测, 在  $|U|$  趋于无穷大时, 系统的迁移率边和扩展区将逐渐消失. 图 2(a) 展示了  $b = 0, U = -100$  时, 扩展态与局域态的转变点  $\lambda \approx 0.01$  两侧的格点密度分布  $\rho_j = \langle \hat{n}_j \rangle$  的情况. 红色五角星实线表示  $\lambda = 0.008, E = -100.044$  的密度分布, 它展现了扩展的特性, 而蓝色方块实线为  $\lambda = 0.012, E = -100.044$  的密度分布情况, 这时密度分布为局域的. 为了进一步证明本文的结果, 我们对转变点两侧的李普曼-施特林 (NPR) 做标度分析. 以  $b = 0, U = -100$  为例, 分别计算了扩展区间  $\lambda = 0.008, E \approx -100, -100.04, -100.0732$  和局域区间  $\lambda = 0.012, E \approx -100, -100.04, -100.08$  所对应的本征态的 NPR 随尺寸变化的情况, 如图 2(b) 所示. 图中实线为拟合的结果, 其表达式可以写为

$$\eta(E) = p \left( \frac{1}{L} \right)^2 + q \left( \frac{1}{L} \right) + l, \quad (13)$$

其中对于不同本征态的 NPR 随尺寸变化的拟合参数分别为  $p, q$  和  $l$ . 在局域区间, 波函数的 NPR 随着  $1/L^2$  衰减到零, 即参数  $l = 0$ . 而在扩展区系统

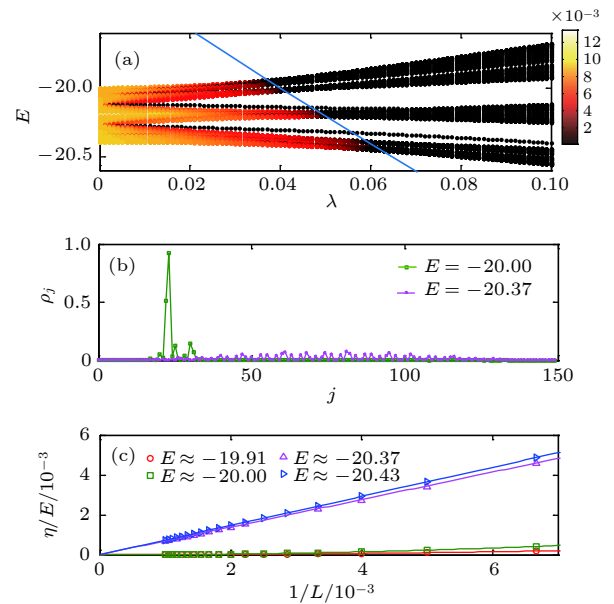


图 3 (a) NPR 在  $L = 150$  时随无序强度  $\lambda$  和能量本征值  $E$  的变化, 蓝色的实线对应迁移率边的表达式; (b)  $\lambda = 0.048, L = 150$  时, 能量  $E = -20$  和  $-20.37$  所对应的密度分布; (c) 不同能量的 NPR 在  $\lambda = 0.048$  时随  $1/L$  的变化. 这里我们选取  $b = 0.2, U = -20$

Fig. 3. (a) NPR varying with the disorder strength  $\lambda$  and the eigenvalues  $E$  with  $L = 150$ , the blue solid line represents the analytical expression of the mobility edges; (b) density distributions for  $\lambda = 0.048, L = 150$  and different  $E = -20$  and  $-20.37$ ; (c) scaling of the NPR with system size for  $\lambda = 0.048$  and different energies. Here, we choose  $b = 0.2$  and  $U = -20$ .

的 NPR 是随着  $1/L$  线性衰减到一个有限的值, 约为  $10^{-5}$  量级, 即  $p = 0$ ,  $q \neq 0$  和  $l \sim 10^{-5}$ .

在小  $b$  情况下, 玻色子对的迁移率边由方程 (11) 所描述, 通过求解方程 (11) 能够得到迁移率边的结果, 如图 3(a) 蓝色实线所示.

图 3(a) 给出了  $b = 0.2, U = -20, L = 150$  时, 随着化学势强度  $\lambda$  的增加, 不同能量的 NPR. 由图可以看出, 解析结果和数值结果符合得很好, 蓝色实线以上所有的态都为局域态, 而实线以下的部分都为扩展态, 存在迁移率边的区间为  $\lambda \in (0.0373, 0.0638)$ . 以  $\lambda = 0.048$  为例, 相应的迁移率边所对应的能量约为  $-20.17$ , 我们分别计算了  $E \approx -20$  和  $-20.37$  所对应的本征态的密度分布, 如图 3(b) 所示. 当能量处于迁移率边以下时, 相应的密度展现扩展的特性, 而能量处于迁移率边以上时, 相应的密度分布为局域的. 图 3(c) 展示了  $b = 0.2, U = -20, \lambda = 0.048$  时, 不同能量所对应的 NPR 随尺寸变化的情况. 其拟合曲线仍然符合方程 (13), 在迁移率

边以下的扩展态, 其 NPR 线性依赖于  $1/L$ , 在  $L \rightarrow \infty$  时, NPR 为有限大的值  $l \sim 10^{-5}$ , 而对于能量处于迁移率边以上的局域态, 随着  $L$  的增加,  $\eta(E) \sim (1/L)^2$  衰减到零.

由于调制势在  $b \rightarrow 1$  时趋近于发散, 方程 (9) 中的  $4\lambda(j)^2/E$  项对比于  $2\lambda(j)$  将不再是小量. 图 4(a) 和图 4(b) 分别展示了  $b = 0.5$  和  $0.96$  时,  $|2\lambda(j)|$  和  $|4\lambda(j)^2/U|$  在格点上的分布情况. 在  $b = 0.5$  时,  $|2\lambda(j)| \gg |4\lambda(j)^2/U|$ , 因此方程 (11) 仍然适用. 通过对 NPR 的计算, 我们发现此时数值和解析结果符合得很好 [图 4(c)]. 然而对于  $b = 0.96$ ,  $|4\lambda(j)^2/U|$  和  $|2\lambda(j)|$  相比 [图 4(b)], 方程 (9) 中  $4\lambda(j)^2/E$  不能被忽略, 系统不存在自对偶特性, 从而无法推导出迁移率边的解析形式. 图 4(d) 展示了  $b = 0.96, U = -20$  时, 系统的 NPR 随着调制强度  $\lambda$  变化的情况, 其中蓝色实线为方程 (11) 给出的结果. 可以看出数值结果和解析结果发生了较

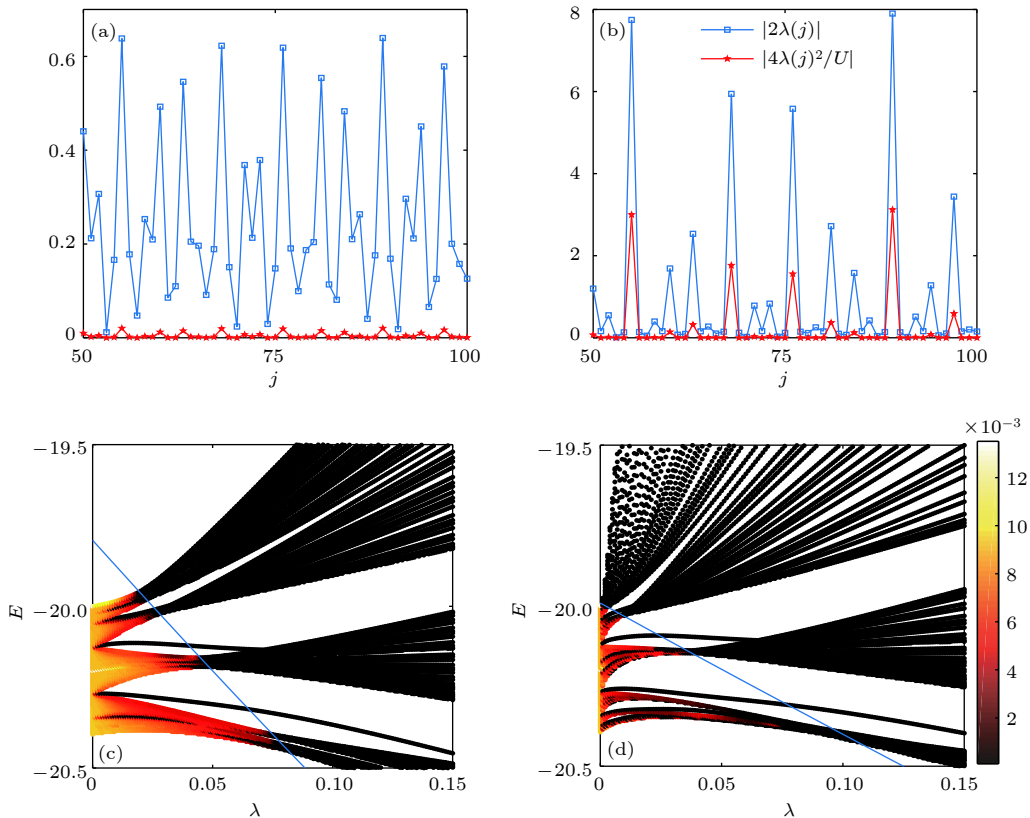


图 4 (a), (b) 分别为  $\lambda = 0.08, b = 0.5, 0.96$  时,  $|2\lambda(j)|$  与  $|4\lambda(j)^2/U|$  在格点上的分布情况; (c), (d) NPR 在  $L = 150$  时随无序强度  $\lambda$  和能量本征值  $E$  的变化, 其参数与 (a), (b) 相同; 蓝色的实线对应迁移率边的表达式

Fig. 4. (a), (b)  $|2\lambda(j)|$  and  $|4\lambda(j)^2/U|$  changing with different sites  $j$  for  $\lambda = 0.08, b = 0.5$  and  $0.96$ , respectively; (c), (d) NPR varying with  $\lambda$  and  $E$  for  $L = 150$  and with the same parameters as (a) and (b), respectively. The blue solid line represents the analytical expression of the mobility edges.

大偏离. 然而通过数值计算, 我们发现即使在  $b \rightarrow 1$  情况下, 玻色子对系统仍然存在迁移率边.

## 4 结 论

多体迁移率边是研究多体局域化系统的过程中被提出的, 已经引起了广泛的关注, 但是由于数值能力等限制, 它的存在性仍然是一个开放问题. 本文证明了捕陷于一维准周期晶格的紧束缚的玻色子对系统存在迁移率边. 在强相互作用极限下利用微扰方法扩展到三阶, 得到了一个有效的玻色子对的哈密顿量, 它具有和单粒子薛定谔方程相类似的形式, 通过对比, 给出  $b$  较小时迁移率边的解析形式. 数值结果和解析结果符合得很好. 然而在  $b \rightarrow 1$  时, 由于化学势趋于发散导致解析结果发生偏离. 数值结果表明, 即使在  $b \rightarrow 1$  极限, 系统仍然存在迁移率边. 我们希望本文的结果对研究多体迁移率边有一定的帮助. 进一步的研究是在实验上如何去探测玻色子对系统中的迁移率边.

## 参考文献

- [1] Anderson P W 1958 *Phys. Rev.* **109** 1492
- [2] Sarma S D, Song H, Xie X C 1988 *Phys. Rev. L* **61** 2144
- [3] Hiramoto H, Kohmoto M 1989 *Phys. Rev. B* **40** 8225
- [4] Sarma S D, Song He, Xie X C 1990 *Phys. Rev. B* **41** 5544
- [5] Biddle J, Sarma S D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 070601
- [6] Biddle J, Wang B, Priour D J, Sarma S D 2009 *Phys. Rev. A* **80** 021603(R)
- [7] Ganeshan S, Pixley J H, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 146601
- [8] Hofstadter D R 1983 *Phys. Rev. Lett.* **51** 1198
- [9] Lanini Y, Bromberg Y, Christodoulides D N, Silberberg Y 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 163905
- [10] Lanini Y, Avidan A, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Christodoulides D N, Silberberg Y 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 013906
- [11] Schwartz T 2007 *Nature* **44** 652
- [12] Evers F, Mirlin A D 2007 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1355
- [13] Lüschen H K, Scherg S, Kohlert T, Schreiber M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 160404
- [14] McGehee W R, Kondov S S, Xu W, Zirbel J J, DeMarco B 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 145303
- [15] Lahini Y, Pugatch R, Pozzi F, Sorel M, Morandotti R, Davidson N, Silberberg Y 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 013901
- [16] Aubry S, André G 1980 *Ann. Isr.: Phys. Soc.* **3** 18
- [17] Aulbach C 2004 *New J. Phys.* **3** 70
- [18] Eilmes A, Grimm U, Römer R A, Schreiber M 1999 *Eur. Phys. J. B* **8** 547
- [19] Wiater D, Sowiński T, Zakrzewski J 2017 *Phys. Rev. A* **96** 043629
- [20] Borelli A, Bellissard J, Jacquod P, Shepelyansky D L 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 4752
- [21] Shepelyansky D L 1996 *Phys. Rev. B* **54** 14896
- [22] Dufour D, Orso G 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 155306
- [23] Basko D M, Aleiner I L, Altshuler B L 2006 *Ann. Phys.* **321** 1126
- [24] Lev Y B, Reichman D R 2014 *Phys. Rev. B* **89** 220201(R)
- [25] Nag S, Garg A 2017 *Phys. Rev. B* **96** 060203(R)
- [26] Wang Y C, Hu H P, Chen S 2016 *Eur. Phys. J. B* **89** 77
- [27] Ponte P, Papić Z, Huveneers F 2015 *Phys. Rev. B* **751** 55111
- [28] Velhinho M T, Pimentel I R, 2000 *Phys. Rev. B* **61** 1043
- [29] Macé N, Laflorencie N, Alet F 2018 arXiv: 1811.01912
- [30] Li X P, Ganeshan S, Pixley J H, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 186601
- [31] Modak R, Mukerjee S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 230401
- [32] Hsu Y T, Li X, Deng D L, Sarma S D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 245701

# Mobility edges of bosonic pairs in one-dimensional quasi-periodical lattices\*

Xu Zhi-Hao<sup>†</sup> Huangfu Hong-Li Zhang Yun-Bo

(*Institute of Theoretical Physics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 17 December 2018; revised manuscript received 20 February 2019)

## Abstract

Mobility edge as one of the most important concepts in a disordered system in which there exists an energy dependent conductor-to-insulator transition has aroused great interest. Unlike an arbitrarily small disorder inducing the Anderson localization in one-dimensional random potential, the well-known Aubry-André model presents a metal-to-insulator transition without mobility edges. Some generalized Aubry-André models are proposed whose the mobility edges in compactly analytic forms are found. However, the existence of the many-body mobility edges in thermodynamic limit for an interacting disordered system is still an open question due to the dimension of the Hilbert space beyond the numerical capacity. In this paper, we demonstrate the existence of the mobility edges of bosonic pairs trapped in one dimensional quasi-periodical lattices subjected to strongly interactions. We believe that our theory will provide a new insight into the studying of the many-body mobility edges.

Two strongly interacting bosons are trapped in an incommensurate model, which is described as  $\hat{H} = -J \sum_j (\hat{c}_j^\dagger \hat{c}_{j+1} + \text{h.c.}) + 2\lambda \sum_j \frac{\cos(2\pi\alpha j)}{1 - b \cos(2\pi\alpha j)} \hat{n}_j + \frac{U}{2} \sum_j \hat{n}_j (\hat{n}_j - 1)$ , where there exists no interaction, the system displays mobility edges at  $b\varepsilon = 2(J - \lambda)$ , which separates the extended regime from the localized one and  $b = 0$  is the standard Aubry-André model. By applying the perturbation method to the third order in a strong interaction case, we can induce an effective Hamiltonian for bosonic pairs. In the small  $b$  case, the bosonic pairs present the mobility edges in a simple closed expression form  $b \left( \frac{E^2}{U} - E - \frac{4}{E} \right) = -4 \left( \frac{1}{E} + \lambda \right)$ , which is the central result of the paper. In order to identify our results numerically, we define a normalized participation ratio (NPR)  $\eta(E)$  to discriminate between the extended properties of the many-body eigenvectors and the localized ones. In the thermodynamic limit, the NPR tends to 0 for a localized state, while it is finite for an extended state. The numerical calculations finely coincide with the analytic results for  $b = 0$  and small  $b$  cases. Especially, for the  $b = 0$  case, the mobility edges of the bosonic pairs are described as  $\lambda = -1/E$ . The extended regime and the one with the mobility edges will vanish with the interaction  $U$  increasing to infinity. We also study the scaling of the NPR with system size in both extended and localized regimes. For the extended state the NPR  $\eta(E) \propto 1/L$  tends to a finite value with the increase of  $L$  and  $L \rightarrow \infty$ , while for the localized case,  $\eta(E) \propto (1/L)^2$  tends to zero when  $L \rightarrow \infty$ . The  $b \rightarrow 1$  limit is also considered. As the modulated potential approaches to a singularity when  $b \rightarrow 1$ , the analytic expression does not fit very well. However, the numerical results indicate that the mobility edges of bosonic pairs still exist. We will try to consider the detection of the mobility edges of the bosonic pairs in the future.

**Keywords:** Anderson localization, mobility edges, disorder

**PACS:** 72.20.Ee, 72.15.Rn, 67.85.-d

**DOI:** 10.7498/aps.68.20182218

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11604188, 11234008, 11474189, 11674201), the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 201601D201027), and the Fund for Shanxi "1331 Project" Key Subjects, China.

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xuzhihao@sxu.edu.cn