

可变周期谐波平衡法求解周期性非定常涡脱落问题

柴振霞 刘伟 杨小亮 周云龙

Application of variable-time-period harmonic balance method to periodic unsteady vortex shedding

Chai Zhen-Xia Liu Wei Yang Xiao-Liang Zhou Yun-Long

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 124701 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190126

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190126>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一类可变禁区的不连续系统的加周期分岔

Period-adding bifurcations in a discontinuous system with a variable gap

物理学报. 2015, 64(12): 120502 <https://doi.org/10.7498/aps.64.120502>

周期性应变调控斯格明子在纳米条带中的运动

Control of skyrmion movement in nanotrack by using periodic strain

物理学报. 2018, 67(13): 137503 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180031>

部分相干光对周期性局域空心光束的影响

Effects of a partially coherent beam on periodic bottle beam

物理学报. 2016, 65(4): 044103 <https://doi.org/10.7498/aps.65.044103>

振动颗粒混合物中的周期性分聚现象与能量耗散

Energy dissipation and periodic segregation of vibrated binary granular mixtures

物理学报. 2015, 64(13): 134503 <https://doi.org/10.7498/aps.64.134503>

非定常输运问题适应于消息传递并行编程环境的香农熵计算方法

Efficient method of calculating Shannon entropy of non-static transport problem in message passing parallel programming environment

物理学报. 2016, 65(14): 142801 <https://doi.org/10.7498/aps.65.142801>

圆锥料仓内颗粒周期性脉动特征研究

Cyclical pulsation properties of particles in cone silo

物理学报. 2017, 66(1): 014501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.014501>

可变周期谐波平衡法求解周期性非定常涡脱落问题*

柴振霞 刘伟[†] 杨小亮 周云龙

(国防科技大学空天科学学院, 长沙 410073)

(2019年1月22日收到; 2019年3月28日收到修改稿)

谐波平衡法是一种高效周期性非定常流动频域计算方法. 本文研究可变周期谐波平衡法, 通过求解 Navier-Stokes 方程模拟低速不可压条件下的二维钝体绕流周期性非定常涡脱落问题. 对于这类流动变化周期未知的非定常问题, 将涡脱落周期 T 作为变量, 采用基于残差导数的可变周期计算方法推进求解. 以圆柱绕流和方柱绕流为例, 研究考察了谐波平衡法的计算精度和效率, 并分析研究了不同参数对计算结果的影响. 针对圆柱绕流问题, 采用三种不同优化方法进行周期 T 的迭代计算, 对比研究了它们的计算精度和效率. 计算结果表明: 谐波平衡法采用 3 个谐波数就可以准确模拟周期性非定常涡脱落问题, 辨识的涡脱落频率和阻力系数与实验值及其他数值结果一致, 与时域方法相比该方法具有较高的计算效率. 不同优化方法的计算结果相同, 共轭梯度法和牛顿法的收敛速度与最速下降法采用较大搜索步长时的收敛速度一致. 由于牛顿法没有参数问题, 因此该方法在工程计算中更有优势.

关键词: 周期性非定常流动, 数值模拟, 谐波平衡法, 可变周期计算方法

PACS: 47.11.-j, 47.10.ad, 47.11.Kb, 47.15.-x

DOI: 10.7498/aps.68.20190126

1 引言

周期性非定常流动是流体力学领域科学研究与实际工程应用中常见的流动现象, 根据非定常性产生原因可以将其分为两类: 第一类是由物体周期性运动引起并强制驱动的, 这类流动都有一个明显的特征频率, 物理量的波动周期已知, 如涡轮机械内部转子和静子相对运动引起的非定常流动、直升机的旋翼绕流、翼形的俯仰振荡等; 第二类是由流动本身的不稳定性导致的, 这类流动的波动周期事先未知, 如圆柱绕流中的涡脱落现象及其他包括分离和自由剪切层的流动^[1].

通常采用时域方法 (time domain method, TDM) 数值求解周期性非定常流动问题, 即在时间

方向上顺序求解流动控制方程, 直到流动达到周期性稳定状态. 时域计算方法思想简单, 可用于各种非定常流动问题. 但是, 时域计算方法没有利用流动的周期特性, 从初始条件迭代获得稳定周期解之前需要经历很长阶段的瞬态解的计算, 而这部分的计算时间通常比真实波动周期长很多^[2], 因此其计算效率较低. 同时, 时域计算通常使用较小的物理时间步长以满足稳定性条件, 从而导致非定常流动计算的时间较长.

对于周期性流动, 人们更关注的是流动达到周期性的稳定状态. 近二十年来, 许多学者利用流动变化的周期性特点发展了各种不同的频域方法, 如线性频域方法、非线性谐波法、谐波平衡法、非线性频域法和时间谱方法等. 早期的线性频域方法^[3,4]把流动变量分解为时均值和周期性小扰动量的和,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11502292, 11572348) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: fishfather6525@sina.com

将流动控制方程分解为不耦合的时均方程和扰动方程,并基于小扰动线性化假设对扰动方程进行线性化处理,通过求解线性化方程来模拟非定常扰动.该方法求解速度较快,但不适用于存在较强非线性的流动问题.为了能够模拟非定常流场中的非线性效应,Ning和He^[5]提出了非线性谐波法,该方法将时均方程和扰动方程耦合求解.虽然这种方法能够模拟一些变换复杂的非线性非定常流动,但仍然不能够求解非简谐周期性流动.随后,Hall等^[6]提出了基于傅里叶展开的谐波平衡法(harmonic balance method, HBM),该方法包含更多的非线性相互作用项.由于非线性项在频域内的表示比较复杂,HBM不直接求解变量傅里叶级数中的谐波系数,通过引入离散傅里叶变换,将非定常流动求解过程转换为一个周期内几个等时间间隔的瞬时流动耦合求解.计算采用的时刻点越多,HBM计算包含的谐波分量越多,计算精度越高,因此该方法可以获得较高的时间离散精度.Hall等^[6]采用HBM成功模拟了单级、多级涡轮机叶片绕流问题^[7],计算表明即使是强非线性流动HBM也能在较少的谐波数下达到工程要求的精度.McMullen等^[8]发展了非线性频域方法,该方法与HBM等价,但在每一步迭代中都需要进行快速傅里叶变换.Gopinath和Jameson^[9]基于傅里叶变换进一步提出了完全在时域求解流动控制方程的时间谱方法,该方法在本质上与HBM是相同的.时间谱方法被成功应用到二维和三维非定常流动,如翼形俯仰振荡和圆柱涡脱落问题.

与TDM相比,HBM能够在保证精度的同时大幅度地减少计算时间,在周期性的内流和外流非定常问题中得到了广泛应用.在内流计算中,HBM被广泛应用于计算叶轮机械内部的非定常流动^[10-17],如振荡叶栅^[6]、压气机转静干涉^[13,14,17]、叶栅气动弹性颤振及极限环振动^[11,12]等问题,与TDM相比,计算效率可实现1—2个数量级的提升.在外流计算中,Thomas等^[18,19]和Guillaume等^[20]对振荡翼形和机翼的非定常计算表明,HBM计算准确性高,可以模拟流动中存在的激波等强非线性作用.Ekici等^[21]采用HBM数值模拟了直升机旋翼的非定常绕流问题.HBM在飞行器动导数快速预测方面的应用研究也取得了较好的效果^[22-27].

由于HBM是在傅里叶级数展开的基础上构

建的,需要事先知道流动稳定周期解变化的频率,因此HBM特别适用于已知频率的第一类周期性非定常流动问题.对于非定常周期事先不能确定的流动问题,如钝体绕流中的涡脱落问题,HBM计算可以采用实验测得的频率或者TDM计算得到的频率作为基准频率^[28,29].由于钝体绕流的非定常流动是自发形成的,达到稳定后的流动变化周期与几何布置和流动参数有关.因此,采用HBM计算时应将频率作为变量处理,以适用于不同几何外形和来流条件.

为了求解这类周期不可预知的非定常问题,McMullen等^[30]提出了一种基于残差梯度的可变周期计算方法(gradient based variable time period method, GBVTP),并与非线性频域方法相结合,实现了流动变量和周期的同时迭代求解.McMullen等^[30]采用该方法成功模拟了低雷诺数定姿态圆柱绕流中的涡脱落周期.Gopinath和Jameson^[31]随后提出了基于残差梯度的可变周期时间谱方法,成功模拟了低雷诺数定姿态圆柱绕流和NACA0012翼型大攻角绕流问题.Spiker等^[32]提出了一种基于相位差的方法确定圆柱绕流涡脱落频率,并模拟了强迫振动圆柱绕流下的涡脱落问题.Mosahebi和Nadarajah^[2,33]将GBVTP应用到自适应HBM.Yao和Jaiman^[34]以及Yao和Marques^[35]采用可变周期HBM数值模拟了低雷诺数圆柱涡致振荡问题以及跨声速极限环振动问题,成功模拟了极限环振动的振幅和频率.国内关于可变周期频域方法的研究相对较少,比较典型的是2009年张炜和席光^[36]采用基于残差梯度的可变周期时间谱方法求解了二维不可压方柱绕流问题.总体来看,可变周期HBM的研究还比较少,需要开展深入研究.

本文基于上述文献,进一步开展可变周期HBM在周期性非定常涡脱落问题中的应用研究.以二维圆柱和方柱绕流为例,详细考察了该方法的计算精度和效率,并分析了不同参数对计算的影响.在GBVTP中,采用不同寻优方法搜索周期 T ,对比研究了不同优化方法的计算性能.

2 计算方法

2.1 流动控制方程

以RANS方程为控制方程,其有限体积离散形式可以写为

$$J^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \mathbf{R}(\mathbf{Q}) = 0, \quad (1)$$

其中 J 为雅克比行列式, 计算网格单元体积 $V = J^{-1}$; $\mathbf{Q} = (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho e)^T$ 为流动守恒变量; $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ 为无黏通量 $\mathbf{E}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$ 和黏性通量 $\mathbf{E}_v, \mathbf{F}_v, \mathbf{G}_v$ 空间离散产生的残差向量,

$$\mathbf{R}(\mathbf{Q}) = \delta_\xi(\mathbf{E} - \mathbf{E}_v) + \delta_\eta(\mathbf{F} - \mathbf{F}_v) + \delta_\zeta(\mathbf{G} - \mathbf{G}_v). \quad (2)$$

本文无黏通量的空间离散采用 AUSMPW+格式, 黏性通量空间离散采用格林公式.

2.2 时域计算方法

非定常时域计算采用 Jameson^[37] 提出的含双时间步的 LU-SGS 隐式时间格式对控制方程进行时间离散, 推进求解如下方程:

$$\left(\frac{3}{2\Delta t/J^{-1}} + \frac{1}{\Delta\tau/J^{-1}} + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{Q}} \right) \Delta \mathbf{Q} = - \left(\mathbf{R}(\mathbf{Q}) + \frac{3\mathbf{Q}^{n+1} - 4\mathbf{Q}^n + \mathbf{Q}^{n-1}}{2\Delta t/J^{-1}} \right), \quad (3)$$

其中 Δt 为真实物理时间步长, $\Delta\tau$ 为虚拟时间步长.

2.3 谐波平衡法

对于周期性流动, 其流动守恒变量 \mathbf{Q} 和残差 $\mathbf{R}(\mathbf{Q})$ 在时间上以频率 ω 周期变化, 可以表示为如下傅里叶级数的形式:

$$\mathbf{Q}(t) \approx \hat{\mathbf{Q}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\hat{\mathbf{Q}}_{cn} \cos(\omega n t) + \hat{\mathbf{Q}}_{sn} \sin(\omega n t)),$$

$$\left[\begin{array}{cccc} \frac{1}{\Delta\tau/J^{-1}} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Q}_1)}{\partial \mathbf{Q}_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\Delta\tau/J^{-1}} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Q}_2)}{\partial \mathbf{Q}_1} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{\Delta\tau/J^{-1}} \mathbf{I} + \frac{\partial \mathbf{R}(\mathbf{Q}_{N_T})}{\partial \mathbf{Q}_{N_T}} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \Delta \mathbf{Q}_1 \\ \Delta \mathbf{Q}_2 \\ \vdots \\ \Delta \mathbf{Q}_{N_T} \end{array} \right] = - \left[\begin{array}{c} \mathbf{R}^*(\mathbf{Q}_1) \\ \mathbf{R}^*(\mathbf{Q}_2) \\ \vdots \\ \mathbf{R}^*(\mathbf{Q}_{N_T}) \end{array} \right], \quad (9)$$

其中 \mathbf{Q}_i 表示第 $t_i = t_0 + i\Delta t$ 时刻的守恒变量, $\mathbf{R}^*(\mathbf{Q}_i) = \mathbf{R}(\mathbf{Q}_i) + J^{-1}\omega \sum_{j=1}^{N_T} D_{i,j} \mathbf{Q}_j$.

2.4 可变周期计算方法

时间频率 $\omega = 2\pi/T$, 谐波平衡方程 (8) 可写为

$$J^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + J^{-1} \frac{2\pi}{T} \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0. \quad (10)$$

$$\mathbf{R}(t) \approx \hat{\mathbf{R}}_0 + \sum_{n=1}^{N_H} (\hat{\mathbf{R}}_{cn} \cos(\omega n t) + \hat{\mathbf{R}}_{sn} \sin(\omega n t)), \quad (4)$$

其中 N_H 为谐波数.

将方程 (4) 代入到方程 (1) 中, 整理可得频域形式谐波平衡方程. 由于直接求解频域方程十分困难, Hall 等^[6] 将一个周期分为 N_T ($N_T = 2N_H + 1$) 等份, 利用离散傅里叶变换将频域方程转换回时域进行求解. 时域形式谐波平衡方程可以写为

$$J^{-1}\omega \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0, \quad (5)$$

详细推导过程可以参考文献 [27]. 式中 $J^{-1}\omega \mathbf{D} \mathbf{Q}$ 为谐波源项, \mathbf{D} 是 $N_T \times N_T$ 系数矩阵, 且

$$D_{ij} = \frac{2}{N_T} \sum_{k=1}^{N_H} k \sin\left(\frac{2\pi k(j-i)}{N_T}\right). \quad (6)$$

\mathbf{Q} 和 \mathbf{R} 表示这 N_T 个时刻的流动变量和残差向量, 则有

$$\mathbf{Q} = [Q(t_0 + \Delta T) \quad Q(t_0 + 2\Delta T) \quad \dots \quad Q(t_0 + T)]^T, \quad (7)$$

$$\mathbf{R} = [R(t_0 + \Delta T) \quad R(t_0 + 2\Delta T) \quad \dots \quad R(t_0 + T)]^T,$$

式中 $\Delta T = T/N_T$.

引入虚拟时间导数项来推进求解方程 (5):

$$J^{-1} \frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial \tau} + J^{-1}\omega \mathbf{D} \mathbf{Q} + \mathbf{R} = 0. \quad (8)$$

本文采用隐式 LU-SGS 方法求解方程 (8), 其中谐波源项显式计算, 推进求解如下方程组:

钝体绕流中的非定常性是自发形成的, 在不同参数下, 非定常流动的周期未知. 在非定常流动的每一时刻, 当且仅当 T 等于正确的周期 T^* 时才能使控制方程组 (10) 相容, 同时正确地反映流动现象. 对于时间周期不可预知的这类周期性流动, 本文采用基于残差梯度的方法从初始猜测值开始迭代求解正确的时间周期.

定义残差

$$\mathbf{R}_{\text{HB}} = J^{-1} \frac{2\pi}{T} \mathbf{DQ} + \mathbf{R}. \quad (11)$$

当 $T = T^*$ 时, 残差 $\mathbf{R}_{\text{HB}} = 0$, 否则 $\mathbf{R}_{\text{HB}} \neq 0$. 因此, 给定不同的周期 T , HBM 计算的残差将收敛到不同精度水平. T 越接近真实值, 残差越接近于零. 可变周期 HBM 的目的是求解真实的周期 T^* 使 $\mathbf{R}_{\text{HB}} \rightarrow 0$, 这是无约束的最优化问题, 通常采用最速下降法 (steepest descent method, SDM) 进行求解.

定义变量

$$L = \frac{1}{2} \mathbf{R}_{\text{HB}}^T \mathbf{R}_{\text{HB}} = R_{\text{HB}}^2(\rho) + R_{\text{HB}}^2(\rho u) + R_{\text{HB}}^2(\rho v) + R_{\text{HB}}^2(\rho w) + R_{\text{HB}}^2(\rho e). \quad (12)$$

对于残差变量 L , 不同研究采用的定义不同, 如文献 [36] 基于 y 方向动量方程的残差构造变量 L . 数值计算表明, 不同的 L 定义对收敛速度影响较大, 当其量级较小时, 收敛较慢, 计算时间长. 计算表明, 本文采用所有残差分量平方之和的方式总体收敛速度较快. 后续研究可以围绕不同残差分量的归一化或者加权来构造残差变量 L .

建立残差梯度

$$\frac{\partial L}{\partial T} = \left(J^{-1} \frac{-2\pi}{T^2} \mathbf{DQ} \right)^T \mathbf{R}_{\text{HB}}, \quad (13)$$

利用残差梯度更新时间周期:

$$T^{p+1} = T^p - \lambda \frac{\partial L^p}{\partial T}. \quad (14)$$

选择合适的初值 T_0 和步长 λ , 通过求解方程 (10) 和方程 (14) 流动变量和周期 T 同时迭代更新并达到收敛.

周期搜索过程中, 采用残差的相对值判断收敛, 定义

$$\varepsilon = \text{RHS}/\text{RHS}_0, \quad (15)$$

式中 RHS 为所有时刻所有网格点所有残差分量绝对值之和对总网格点的平均, RHS_0 为初始迭代的残差. 对于本文算例, $\varepsilon \leq 10^{-3}$ 能够满足精度要求, 因此计算采用 $\varepsilon = 10^{-3}$.

3 数值方法验证

NACA0012 翼型绕 1/4 弦点做俯仰振荡是一个典型的周期性非定常问题, 经常作为数值方法的验证算例. 翼型的正弦俯仰振荡运动采用如下攻角随时间的变换规律:

$$\alpha = \alpha_0 + \alpha_m \sin(kt), \quad (16)$$

式中 α_0 为平均攻角, α_m 为振幅, $k = 2\pi\tilde{f} \frac{\tilde{L}}{\tilde{V}_\infty}$ 为减缩频率, \tilde{f} 为俯仰振动的频率, \tilde{V}_∞ 为来流速度, 无量纲化长度 \tilde{L} 取翼型的弦长. 本文计算选取 AGARD 实验中的 CT5 算例 [38], 主要的计算条件见表 1.

表 1 NACA0012 翼型俯仰振荡 AGARD CT5 算例计算条件

Table 1. Computational conditions of the AGARD CT5 test case for the NACA0012 airfoil.

Parameter	Value
Ma	0.755
α_0	0.016°
α_m	2.51°
k	0.1628

3.1 网格划分

图 1 是计算网格情况, 采用 O 型拓扑结构, 网格数量为 84×287 (法向 \times 周向). 为了保证远场边界对计算的影响较小, 远场边界设在 20 倍弦长以外.

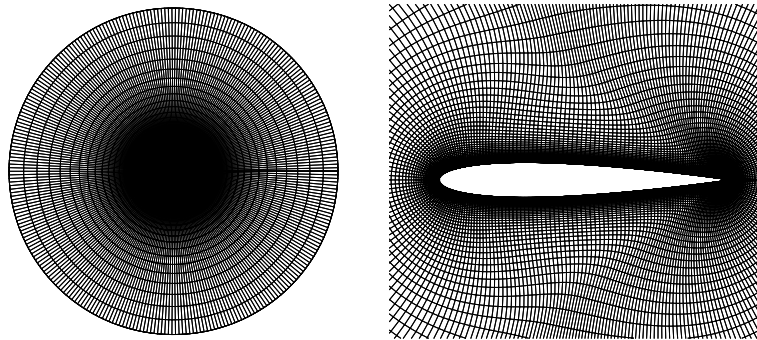


图 1 NACA0012 翼型计算网格

Fig. 1. Mesh for the NACA0012 airfoil.

3.2 计算结果及分析

采用 HBM 计算时, 谐波数 $N_H = 1, 2, 3, 4$, 即分别将一个周期 3, 5, 7, 9 等分, 计算得到各个时刻点的瞬时流场. 采用 TDM 计算时, 无量纲时间步长为 0.01, 子迭代收敛的判据为残差下降两个量级. 一个周期内 NACA0012 翼型的升力系数和力矩系数随攻角的变化如图 2 所示. 将 HBM 与 TDM 的计算结果与 AGARD 的实验数据 [38] 以及

Batina^[39] 的计算结果进行了比较. 对于线性特征明显的升力系数曲线, HBM 在 $N_H = 1$ 的计算结果与 TDM 计算结果符合良好, 且与 Batina^[39] 的计算结果一致, 但计算结果比实验结果偏小. 与升力系数相比, 俯仰力矩系数具有较强的非线性, HBM 计算至少需要 3 个谐波数才能模拟力矩系数随攻角的变化规律. HBM 重建的力矩系数曲线和时域计算结果及实验值能够较好地符合, 验证了 HBM 对周期性非定常运动的模拟能力.

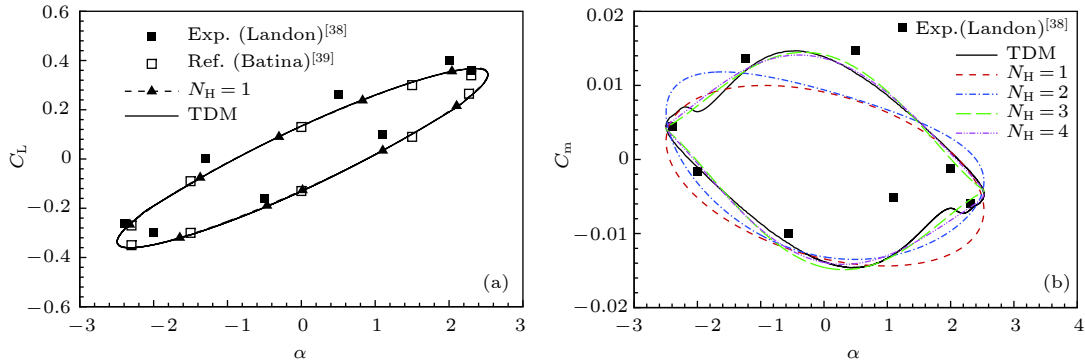


图 2 NACA0012 翼型的 (a) 升力系数和 (b) 俯仰力矩系数迟滞曲线

Fig. 2. (a) Lift and (b) pitching moment coefficients dynamic dependence of NACA0012 airfoil.

图 3 展示了瞬时压力系数沿翼型表面的分布规律. 数值计算结果与实验数据 [38] 基本符合. HBM 计算保留前 3 阶谐波分量能够较为准确地模拟翼型表面压力系数的变化规律, 即使在激波出现的位置也具有较高的精度.

采用 HBM 计算时, 俯仰力矩系数收敛速度几乎不受谐波数的影响, 如图 4 所示. HBM 计算迭

代 3000 步时, 动态气动力矩系数达到收敛状态. 为了定量分析 HBM 的计算效率, 定义加速比 $speedup = \frac{CPU\ time_{TDM}}{CPU\ time_{HBM}}$. 图 5 给出了加速度比随谐波数的变化. 其中, 为了保证力矩系数的收敛性, TDM 模拟两个周期的俯仰运动. HBM 计算所需 CPU 时间按 3000 步计算. 由图 5 可知, 保留 1 阶

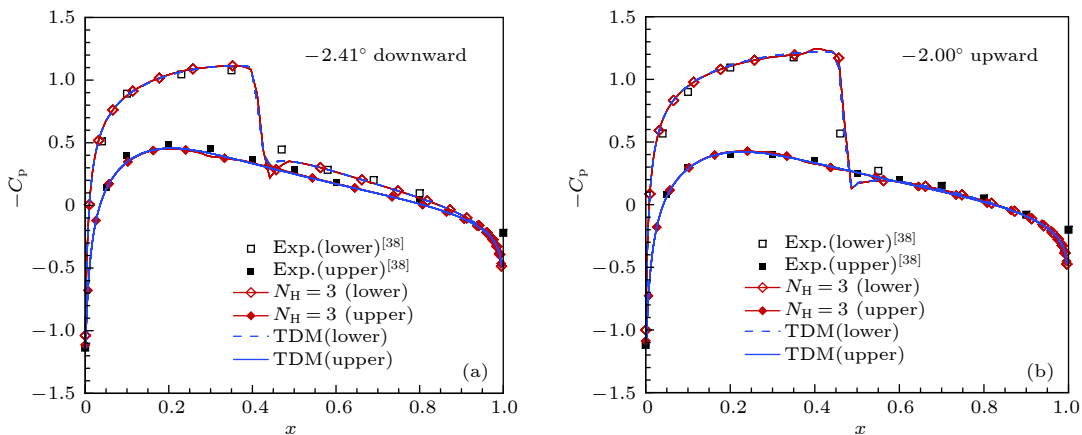


图 3 NACA0012 翼型俯仰振荡过程中的瞬时压力系数分布 (a) 攻角减小过程中 $\alpha = -2.41^\circ$; (b) 攻角增大过程中 $\alpha = -2.00^\circ$

Fig. 3. Instantaneous pressure coefficient distribution compared to experimental data of NACA0012 airfoil: (a) $\alpha = -2.41^\circ$ for decreasing angle; (b) $\alpha = -2.00^\circ$ for increasing angle.

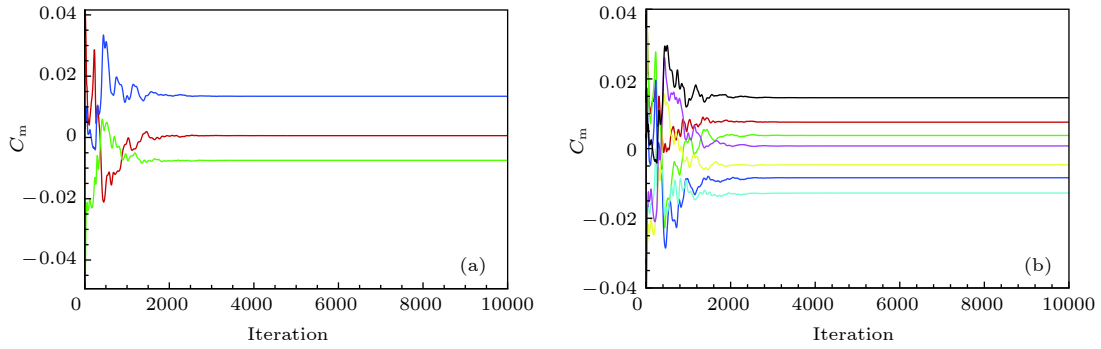


图 4 HBM 取不同谐波数时俯仰力矩系数收敛曲线 (a) $N_H = 1$; (b) $N_H = 3$

Fig. 4. Pitching moment coefficient convergence history for the HBM with respect to the number of harmonics: (a) $N_H = 1$; (b) $N_H = 3$.

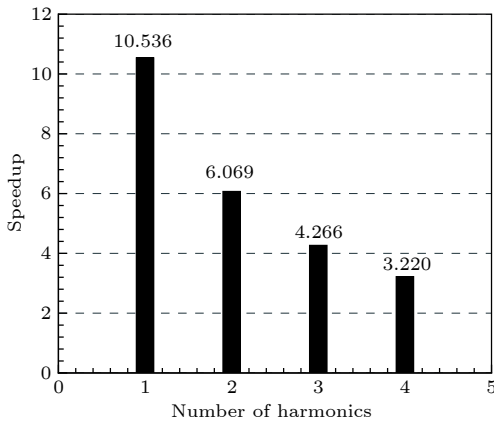


图 5 CPU 时间加速比随谐波数的变化

Fig. 5. CPU time speedup of the HBM with respect to the TDM.

谐波分量时, HBM 的计算效率比 TDM 高一个量级, 随着谐波数的增加, HBM 的计算效率下降. 谐波数等于 3 时, HBM 计算比 TDM 大约快 4 倍.

4 非定常圆柱绕流中的涡脱落问题

非定常圆柱绕流的流态与雷诺数密切相关, 当雷诺数 $47 < Re < 194$ 时, 圆柱底部会出现二维的周期性涡脱落, 称之为卡门涡街. 本文模拟低雷诺数下的二维非定常圆柱绕流, 来流马赫数为 0.2, 将模拟结果与 Williamson 的实验数据 [43,44] 及 McMullen 等 [30] 和 Spiker 等 [32] 的数值计算结果进行比较. 采用 O 型计算网格, 如图 6 所示, 计算网格大小为 105×61 (流向 \times 法向), 壁面第一层网格法向尺度为 $2.0 \times 10^{-4}D$, D 为圆柱直径.

4.1 非定常时域计算

首先采用本课题组开发的非定常时域计算软

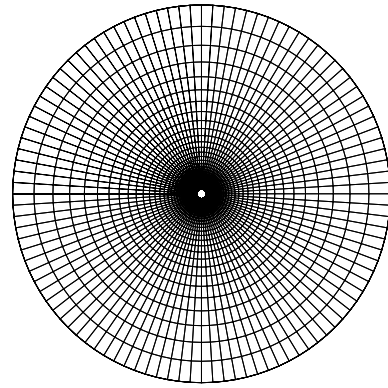


图 6 二维圆柱计算网格

Fig. 6. Computational grid for cylinder in cross flow.

件 ADCRP, 对来流 $Re = 180$ 条件下的圆柱绕流进行数值模拟, 计算得到升力系数 C_L 和阻力系数随时间的变化过程见图 7. 计算得到的平均阻力系数 $C_{D0} = 1.3457$, 最大升力系数 $C_{Lmax} = 0.6347$, 根据升力系数振动频率得到涡脱落频率 $St = 0.185$, 对应无量纲周期 $T = 5.41$. 计算结果与实验结果符合良好, 如表 2 所列.

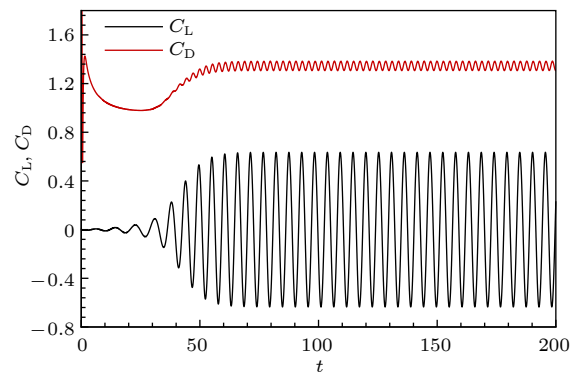


图 7 升、阻力系数收敛曲线

Fig. 7. Time history of lift coefficient C_L and drag C_D .

表 2 时域计算结果与实验结果对比

Table 2. Time-averaged coefficient and Strouhal number compared with experiment data.

Experiment	C_{D0}	St
Henderson ^[40]	1.336	
Wieselsberge ^[41]	1.3	
Roshko ^[42]		0.185
Williamson ^[43]		0.1919
Present	1.3457	0.185

4.2 可变周期谐波平衡法计算

4.2.1 谐波数收敛性分析

首先, 采用可变周期 HBM 对来流 $Re = 180$ 条件下的圆柱绕流进行数值模拟, 考察计算所需谐波数. 初始周期 $T_0 = 4$, 步长 $\lambda = 1$.

图 8 为不同谐波数下计算得到的周期 T 收敛曲线, 图 9 为谐波数取 3 时不同时刻升力系数收敛曲线. 由图 8 和图 9 可知, 非定常涡脱落周期和气动系数同时迭代更新并达到收敛. 图 10 和图 11 分别为不同谐波数下重建得到的升力系数和阻力系数在一个周期内的变化曲线. 表 3 列出了采用不同谐波数计算得到的涡脱落频率和平均阻力系数. 从计算结果可以看出, 随着谐波数的增加, 气动力及涡脱落周期逐渐收敛. 谐波数 $N_H = 3$ 计算结果与实验数据及 TDM 计算结果相符合, 谐波数再增加时计算精度没有明显变化, 说明 3 个谐波数能够满足计算精度要求.

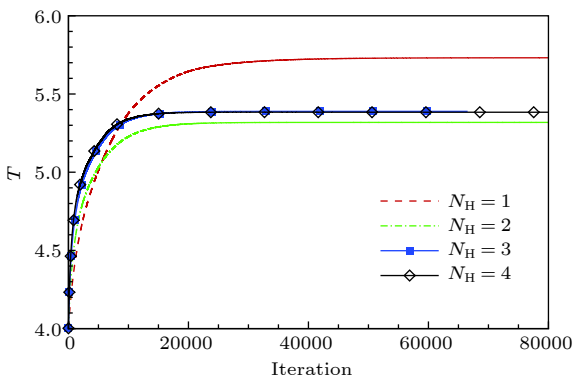


图 8 不同谐波数下的周期 T 收敛曲线

Fig. 8. Convergence from initial guess to exact time period with varying number of harmonics.

图 12 为流动变化周期内 3 个等间隔时刻的流线图, 清晰地表现出圆柱后缘交替产生的涡脱落现象. 图 13 为 HBM 还原得到的升力系数最小时刻

的非定常瞬态流场与时域计算结果的对比. 采用 3 阶谐波计算, 就可以很好地还原圆柱非定常涡脱落流场的多层次涡结构.

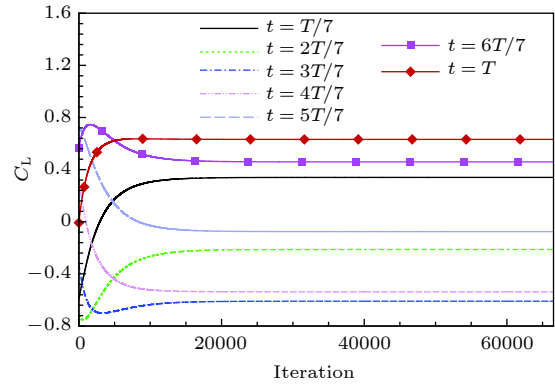


图 9 升力系数收敛曲线 ($N_H = 3$)

Fig. 9. Time history of lift coefficient C_L with $N_H = 3$.

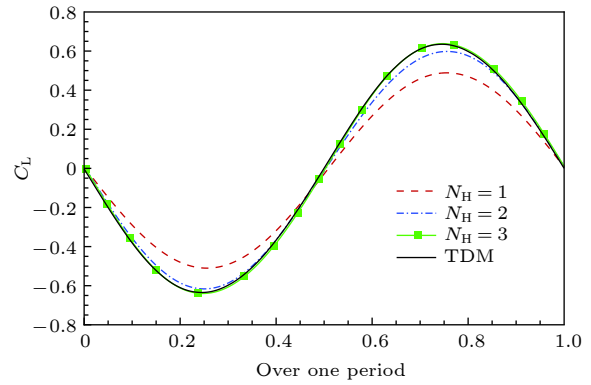


图 10 升力系数随时间的变化

Fig. 10. Variation of C_L over one period.

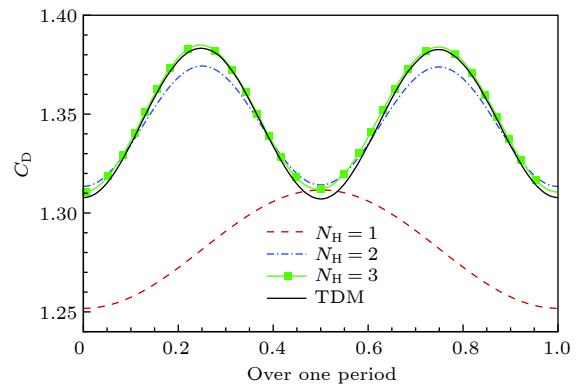


图 11 阻力系数随时间的变化

Fig. 11. Variation of C_D over one period.

取 3 阶谐波对雷诺数 $60 \leq Re \leq 180$ 的圆柱绕流进行数值模拟, 并将计算得到的斯特劳哈尔数 St 和 C_{D0} 与 Williamson^[43,44] 和 Henderson^[40] 的实验数据及 McMullen 等^[30] 和 Spiker 等^[32] 的数值

计算结果相比较. 图 14 为表征非定常运动周期特征的 St 随雷诺数的变化, 图 15 为平均阻力系数 C_{D0} 随雷诺数的变化. 本文可变周期 HBM 在 3 阶谐波数下的计算结果与实验值符合良好, 误差在 4% 以内. 对于 St , 数值计算结果都低于实验值, 本文计算结果与其他数值计算结果一致. 对于平均阻力系数, 可变周期 HBM 的计算结果比 McMullen 等^[30] 采用可变周期非线性频域方法计算的结果更接近于实验值.

表 3 不同谐波数下的计算结果

Table 3. Strouhal number and time-averaged coefficient computed by different number of harmonics.

N_H	St	C_{D0}
1	0.1745	1.2817
2	0.188	1.3440
3	0.1856	1.3479
4	0.1857	1.3506
TDM	0.185	1.3457
Roshko ^[42]	0.185	

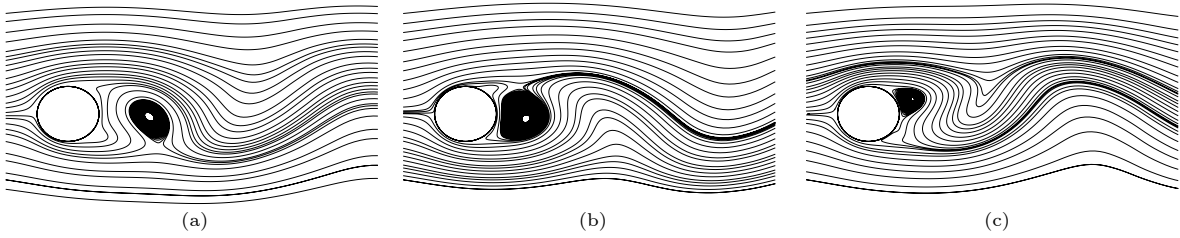


图 12 $Re = 180, N_H = 3$ 条件下不同时刻的流线图 (a) $t = T/3$; (b) $t = 2T/3$; (c) $t = T$

Fig. 12. Streamlines at various time instances over one period ($Re = 180, N_H = 3$): (a) $t = T/3$; (b) $t = 2T/3$; (c) $t = T$.

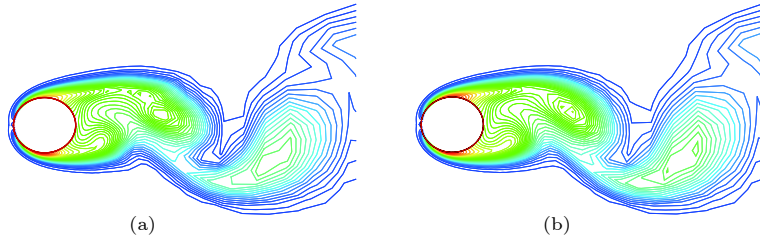


图 13 熵等值线图 (C_L 最小时刻) (a) TDM 计算结果; (b) HBM 计算结果 ($N_H = 3$)

Fig. 13. Comparison of instantaneous entropy contours: (a) TDM results; (b) HBM results ($N_H = 3$).

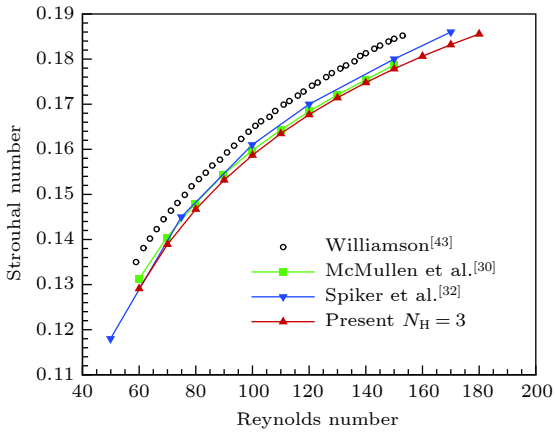


图 14 Strouhal 数随 Re 的变化

Fig. 14. Strouhal number as a function of Reynolds number.

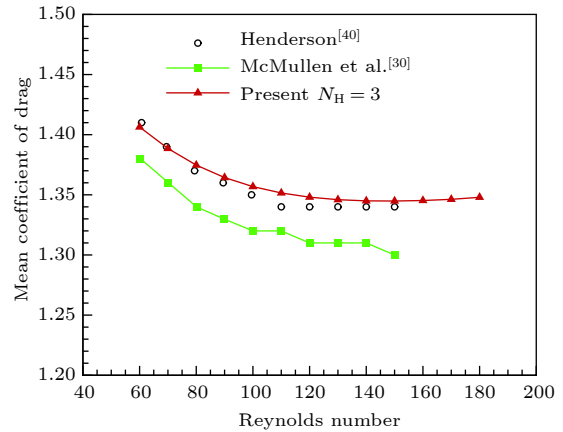


图 15 平均阻力系数随 Re 的变化

Fig. 15. Mean coefficient of drag versus Reynolds number.

4.2.2 迭代步长 λ 的影响分析

图 16 为 $Re = 180, N_H = 3$ 情况下, 取不同步长 λ 计算得到的周期 T . λ 对最终结果影响较小,

非定常涡脱落周期都收敛到同一值. $\lambda = 1$ 时周期 T 收敛最慢, 步长增大收敛速度有所加快, 但 $\lambda > 10$ 之后收敛曲线没有明显变化.

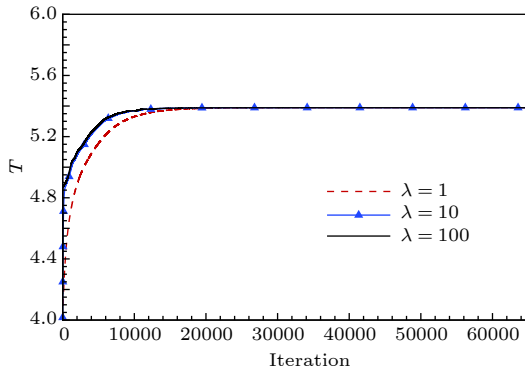


图 16 不同步长 λ 下的周期 T 收敛曲线

Fig. 16. Time period convergence computed with three different step sizes λ .

4.2.3 初始周期 T_0 对计算的影响分析

图 17 为 $Re = 180, N_H = 3$ 情况下, 取不同初始 T_0 计算得到的周期 T . 当 $T_0 < 5.8$ 时, 取不同初值 T_0 , 涡脱落周期最终都收敛到真实周期 $T^* = 5.389$; 当 $5.8 \leq T_0 \leq 13$ 时, 取不同初值 T_0 , 最终结果都收敛到 $T = 11.43$, 与 T^* 近似成两倍的关系, 升力系数在 $0 \leq t \leq 11.43$ 内也确实变化两个周期, 如图 18 所示; 当 T_0 再增大到 17 和 20 的时候, 涡脱落周期最终都收敛到 $T = 16.834$, 与 T^* 近似成三倍的关系. 对于周期性非定常问题, 如果 T^* 是流动变化周期, 那么 $2T^*$ 和 $3T^*$ 也是流动变化的周期. 对于可变周期 HBM, 在周期 T 搜索过程中有可能收敛到 nT^* ($n = 2, 3, \dots$). 值得注意的是, 实际计算结果并不是准确的倍数关系, 这可能与谐波数有关, 也可能是计算误差导致的, 此现象值得进一步深入研究. 同时, 有必要发展自动搜索最小周期的计算方法.

4.2.4 计算效率分析

图 19 比较了采用 HBM 与 TDM 计算得到的 St 随雷诺数的变化曲线. 当时域计算选择时间步长为 $\Delta t = 0.01$ 时, 在雷诺数 $80 \leq Re \leq 180$ 之间两种计算方法的结果符合良好, 雷诺数低于 80 时, HBM 的计算结果比 TDM 结果更接近实验值. 但当 TDM 计算采用较小步长 $\Delta t = 0.001$ 时, 较低雷诺数下的 TDM 计算结果与 HBM 计算保留前 3 阶谐波分量的结果基本重合, 不同的是此时的 TDM 付出的计算代价更大. 图 20 为雷诺数 $Re = 180$ 和 $Re = 60$ 的加速比. 由图 20 可知, 来流雷诺数越低, HBM 相对 TDM 的计算效率优势越明显.

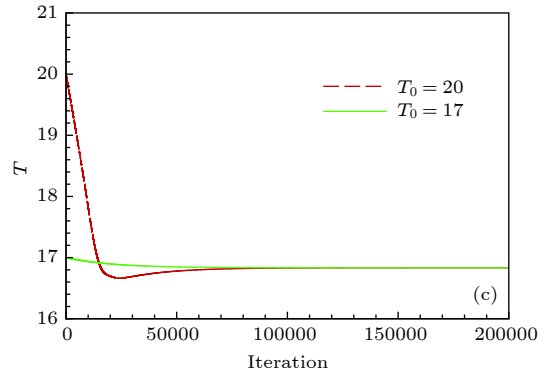
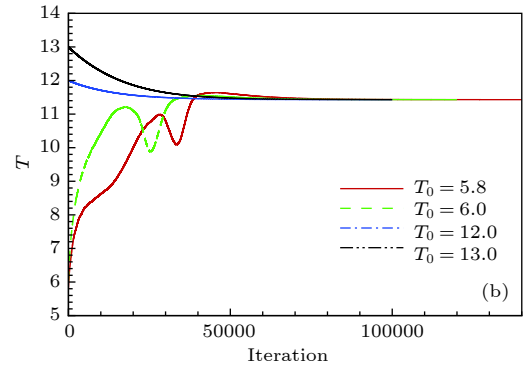
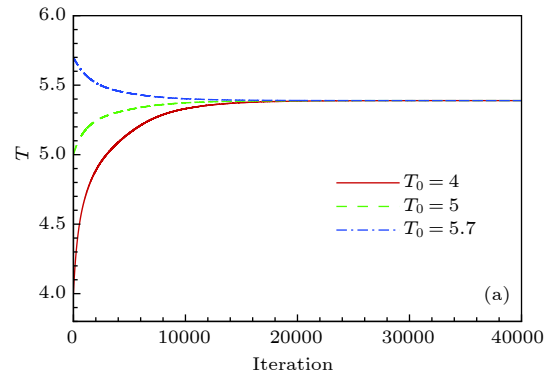


图 17 不同步长 T_0 下计算的周期 T 收敛曲线

Fig. 17. Time period convergence with various starting guesses T_0 .

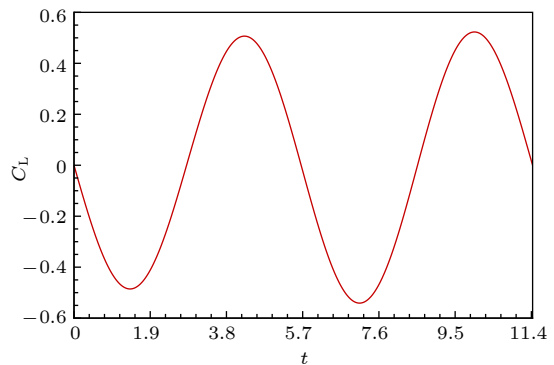


图 18 $T = 11.43$ 时重建的升力系数曲线

Fig. 18. Variation of C_L over one period with converged time period $T = 11.43$.

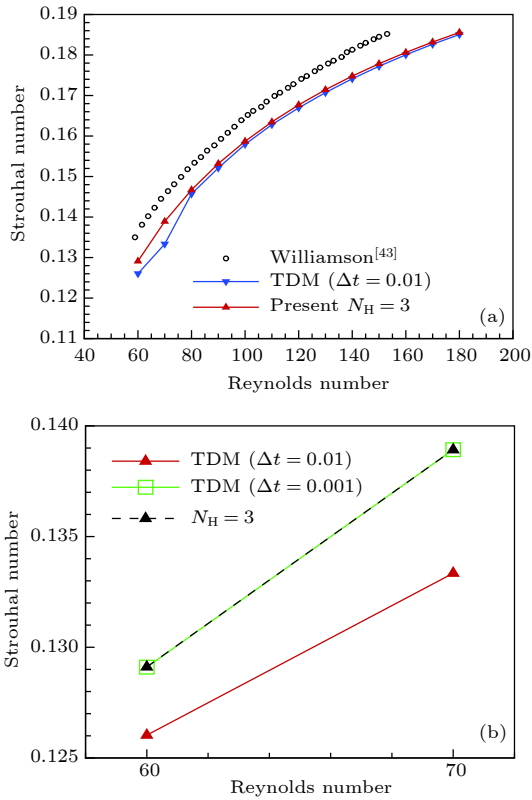


图 19 HBM 计算的 St 与 TDM 计算结果的对比
Fig. 19. Comparison of the HBM St data results with TDM results.

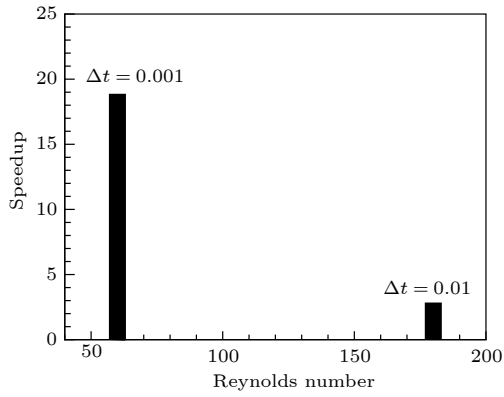


图 20 不同雷诺下的加速比
Fig. 20. CPU time speedup of various Reynolds number.

4.3 基于固定周期谐波平衡法的涡脱落周期辨识

对于固定周期 HBM 计算, 当给定的周期 T 不等于真实的物理周期 T^* 时, 残差将下降到一定水平, 并且收敛后的残差和气动力会随着虚拟迭代步的增加呈现周期性变化, 如图 21 所示, 其中 ρ 为密度; u, v 分别为 x 方向和 y 方向的速度; e 为单位质量总能. 当 $Re = 180$ 时, 采用可变周期 HBM

计算的圆柱绕流涡脱落周期为 $T^* = 5.389$. 固定周期 HBM 给定 $T = 4$ 时, 计算得到的升力系数和残差都呈现周期性变化的趋势, 相邻迭代步重建的升力系数曲线之间存在相位差, 如图 22 所示. 对于给定的 T , 当升力系数收敛后每一步虚拟迭代产生的相位差是常值. 而且这个相位差与给定的周期 T 呈近似线性的关系, 当且仅当给定的 T 为真实的周期 T^* 时相位差为 0, HBM 计算得到各个时刻的升力系数曲线不再周期性振荡, 而是收敛到常值, 如图 23 所示. Spiker 等 [32] 提出的相位差方法正是基于这一点来辨识涡脱落的频率. 图 24 给出了固定周期 HBM 计算时, 相位差随周期的变化. 由图 24 可知, 在一定范围内, 相位差的确与 T 成线性关系, 采用固定周期 HBM 辨识涡脱落周期时, 只需计算两个不同周期对应的相位差就可以通过线性关系推算相位差等于 0 时对应的 T^* . 值得注意的是, 采用 3 阶谐波进行计算时, 当 $T = 11.43$ 时相位差也等于 0, 在该值附近也存在线性关系, 说明 11.43 也是旋涡脱落的周期, 这与之前可变周期 HBM 的计算结果一致.

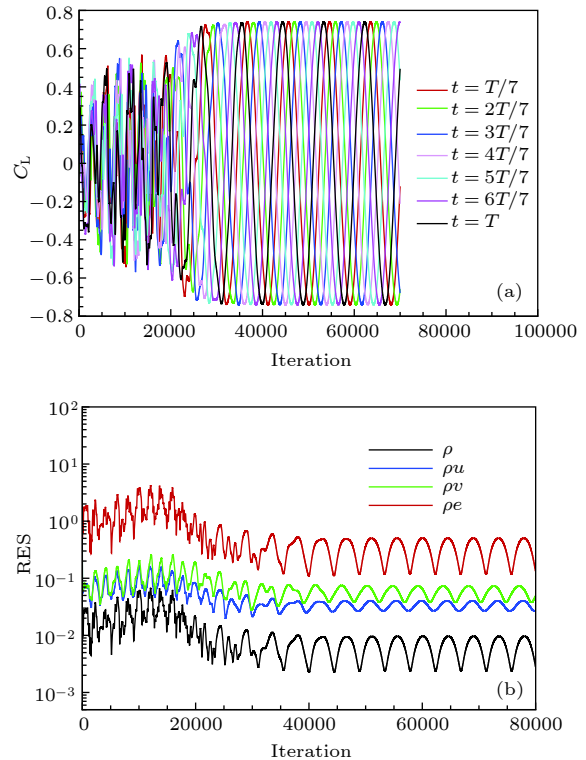


图 21 升力系数和 $t = T$ 时刻的残差收敛曲线 ($Re = 180, T = 4, N_H = 3$) (a) 升力系数; (b) 残差
Fig. 21. Time history of lift coefficient C_L at various time instances over one period and residual at $t = T$ ($Re = 180, T = 4, N_H = 3$): (a) Lift coefficient; (b) residual.

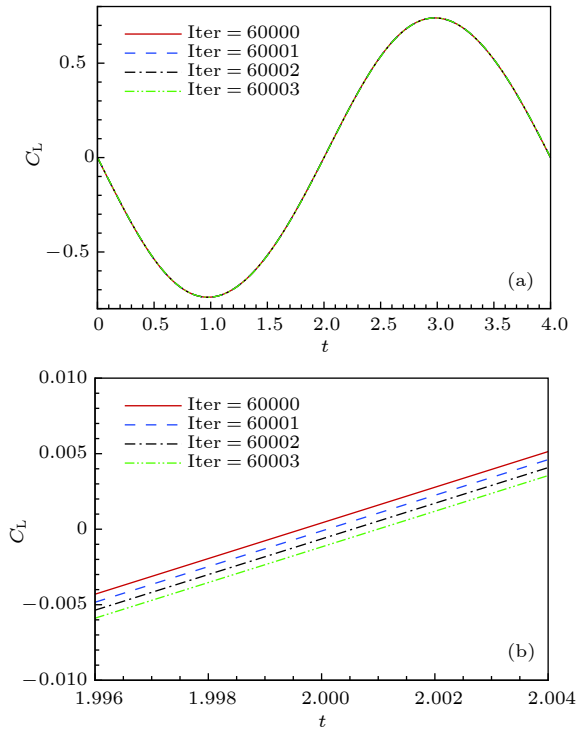


图 22 不同迭代步重建的升力系数随时间的变化 ($Re = 180, T = 4, N_H = 3$) (a) 整体; (b) 局部
Fig. 22. Variation of C_L over one period at different iterations: (a) Overall; (b) local.

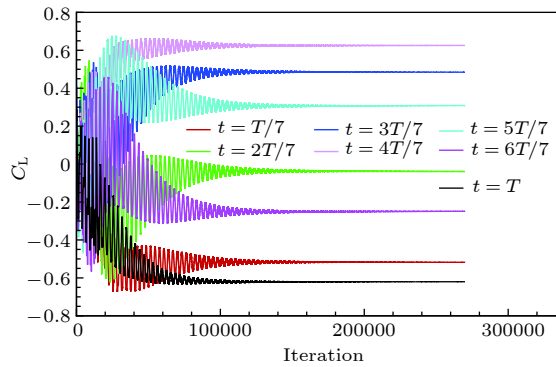


图 23 $T = 5.389$ 时各个时刻升力系数收敛曲线 ($N_H = 3$)
Fig. 23. Time history of lift coefficient C_L at various time instances over one period with $T = 5.389$ ($N_H = 3$).

GBVTP 的实现是基于残差在 $T = T^*$ 时最小的物理事实, 采用 SDM 沿着残差下降的方向进行搜索. 图 25 为采用固定周期 HBM 计算的残差随周期 T 的变化. 由图 25 可知, T 的精度决定了 HBM 计算的精度. 当给定的周期远离 T^* 时, 残差下降越来越困难, 当 $T = T^*$ 时残差迅速下降. 因为, 当且仅当给定的 T 为真实的涡脱落周期才能满足非定常流动控制方程, 使得残差接近于 0. 因此, 采用 3 个谐波数进行计算时, $T = 5.389$ 和 11.43 都是

旋涡脱落的周期, 这与可变周期计算的结果也相一致.

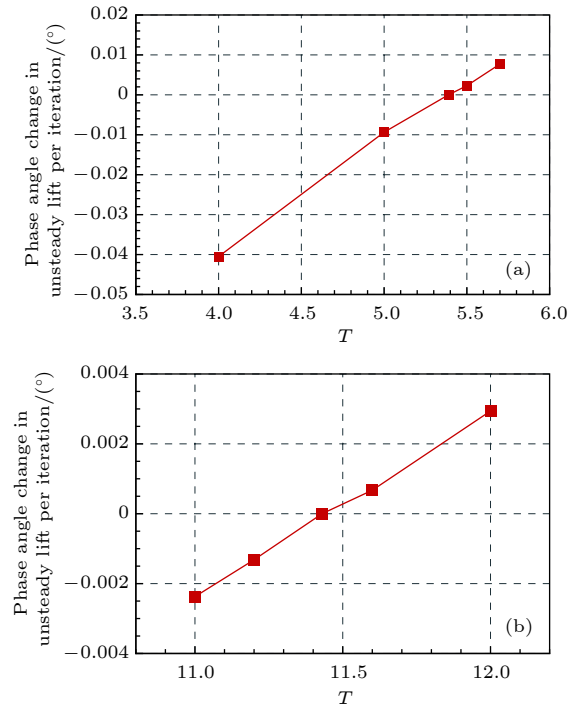


图 24 相位差随周期 T 的变化 ($Re = 180, N_H = 3$)
Fig. 24. Change in phase of unsteady lift versus time period for $Re = 180$ ($N_H = 3$).

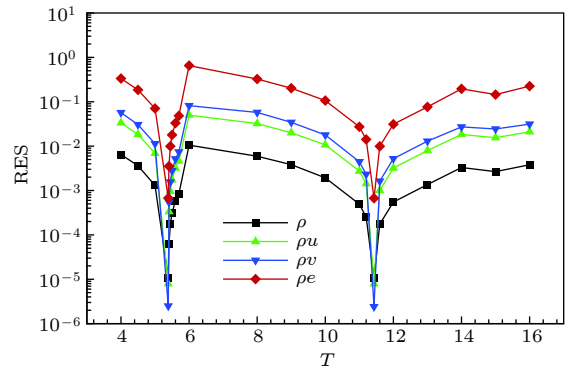


图 25 残差随周期 T 的变化 ($Re = 180, N_H = 3$)
Fig. 25. HBM solution residual versus time period for $Re = 180$ ($N_H = 3$).

5 多种寻优策略在可变周期计算方法中的比较

GBVTP 的核心思想是寻找 T^* 使得残差趋于 0, 这是单变量单目标函数的无约束最优化问题. 求解这类问题的最优化方法大致分为两类 [45]: 一类计算用到函数的导数; 一类只用目标函数不计算

导数, 为直接方法. 这里考察了用到函数导数的另外两种方法: 牛顿法和 Fletcher-Reeves 共轭梯度法 (简称 FR 法), 并和前面计算采用的 SDM 进行了比较.

5.1 优化方法

考虑无约束问题:

$$\begin{aligned} \min L(T) &= \frac{1}{2} \mathbf{R}_{\text{HB}}^T \times \mathbf{R}_{\text{HB}}, \\ \mathbf{R}_{\text{HB}} &= J^{-1} \frac{2\pi}{T} \mathbf{DQ} + \mathbf{R}, \quad T > 0, \end{aligned} \quad (17)$$

其中 \mathbf{R}_{HB} 表示谐波平衡方程的残差向量. 这个问题是求解 T^* 使得 $L(T^*) \rightarrow 0$.

采用 SDM 计算时, 沿着 L 下降最快的方向 (负梯度方向) 寻找 T^* , 迭代公式为

$$T^{p+1} = T^p - \lambda \frac{\partial L^p}{\partial T}, \quad (18)$$

其中 λ 表示搜索步长.

采用牛顿法计算时, 沿着牛顿方向计算 T^* , 迭代公式为

$$T^{p+1} = T^p - \frac{\frac{\partial L^p}{\partial T}}{\frac{\partial^2 L^p}{\partial T^2} + \varepsilon}, \quad (19)$$

其中 $d^p = -\frac{\partial L^p}{\partial T} / \left(\frac{\partial^2 L^p}{\partial T^2} + \varepsilon \right)$ 为 T^p 处的牛顿方向, ε 是修正系数, 且 $\varepsilon > 0$.

采用 FR 法计算时, 需要构造一组共轭方向, 然后沿着这组方向进行搜索, 求解 T^* :

$$\begin{aligned} T^{p+1} &= T^p + \lambda d^p, \\ d^p &= -\frac{\partial L^p}{\partial T} + \beta_{p-1} d^{p-1}, \\ \beta_{p-1} &= \left(\frac{\partial L^p}{\partial T} \right)^2 / \left(\frac{\partial L^{p-1}}{\partial T} \right)^2. \end{aligned} \quad (20)$$

不可忽略的是, 在 FR 方法中, 初始的搜索方向必须选择最速下降方向, 即:

$$d^1 = -\frac{\partial L^1}{\partial T}. \quad (21)$$

5.2 计算结果及分析

分别采用以上方法对 $Re = 180$ 的圆柱绕流进行数值模拟, 对比他们的计算精度和效率. 图 26

给出了牛顿法及 SDM 的计算结果, 可以看出, 牛顿法模拟的涡脱落周期与 SDM 的结果一致. 采用 SDM 时, 需要设置搜索步长 λ , 步长越大收敛越快. 而采用牛顿法计算时不需要设置此参数, 其收敛曲线介于 SDM 采用 $\lambda = 1$ 和 $\lambda = 100$ 的收敛曲线之间, 且接近于 $\lambda = 100$ 的计算结果.

与 SDM 类似, 共轭梯度法也需要设置搜索步长 λ . 在本文算例中, 取不同时间步长计算时, 共轭梯度法计算得到的周期 T 收敛曲线基本重合, 步长对共轭梯度法计算结果的影响不大, 如图 27 所示. 共轭梯度法的收敛速度与 SDM 采用 $\lambda = 100$ 时的相同.

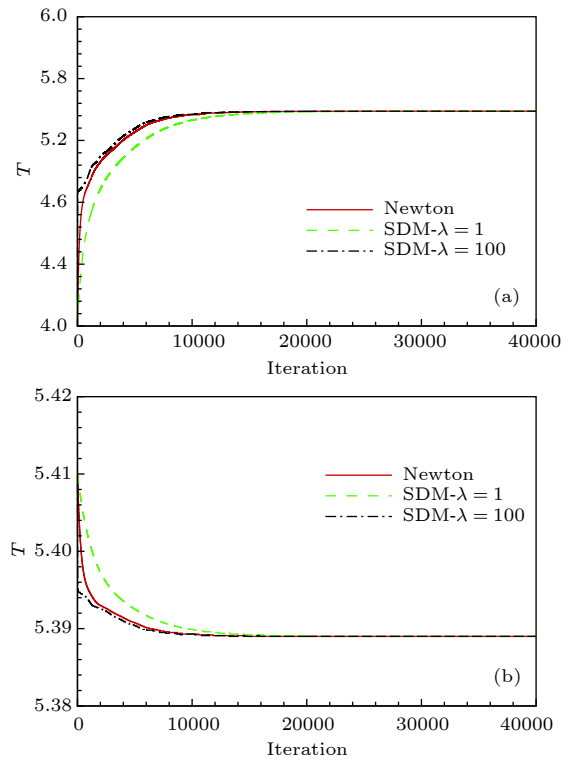


图 26 采用牛顿法和 SDM 计算的周期 T 收敛曲线对比图 (a) 初始 $T_0 = 4$; (b) 初始 $T_0 = 5.41$
Fig. 26. Convergence of shedding time period computed by Newton method and SDM: (a) $T_0 = 4$; (b) $T_0 = 5.41$.

可变周期 HBM 采用三种不同优化方法计算得到的周期 T 收敛曲线对比如图 28 所示. 由图 28 可知, 三种方法的计算精度相同, 最终计算得到的涡脱落周期 T 均为 5.389. 共轭梯度法和牛顿法的收敛速度与 SDM 采用最大搜索步长时的收敛速度一致. 由于牛顿法不需要设置搜索步长等参数, 在实际工程计算中更有优势.

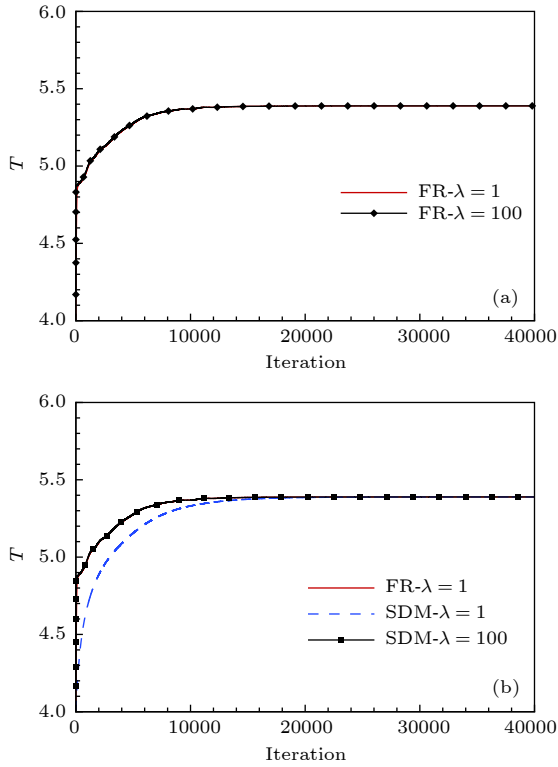


图 27 采用 FR 法计算的周期 T 收敛曲线 (a) 及其与 SDM 计算结果的比较 (b)

Fig. 27. Convergence of shedding time period computed by FR conjugate gradient method (a) and compared with the SDM results (b).

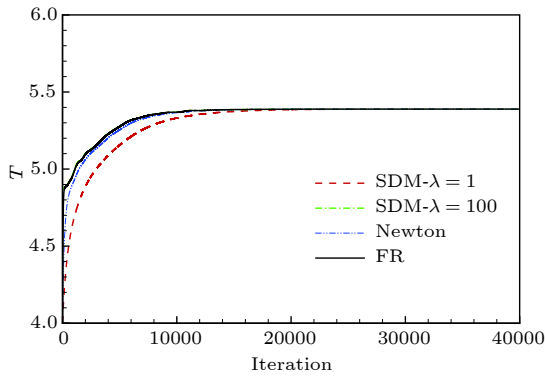


图 28 采用三种不同优化方法计算得到的周期 T 收敛曲线图

Fig. 28. Convergence of shedding time period computed by three different methods of optimization.

6 非定常方柱绕流中的涡脱落问题

采用可变周期 HBM 数值模拟二维不可压非定常方柱绕流. 来流雷诺数为 $Re = 100$, 采用 H 型计算网格 (如图 29 所示), 网格大小为 $147 \times$

106. 为了对比研究, 时域计算方法的结果列于表 4. 计算结果表明, TDM 计算采用时间步长 0.01 能够满足计算精度要求.

表 5 列出了涡脱落频率、平均阻力系数和加速比随谐波数的变化. 随着谐波数的增加, 计算结果逐渐收敛. 对于涡脱落频率, 采用 3 个谐波的计算结果与 4 个谐波的相同, 且与 TDM 计算及实验值相符合. 与 TDM 相比, HBM 计算保留 3 个谐波数时计算效率提高了将近 18 倍. 谐波数越少, 计算速度越快, 但精度会有所损失. 当谐波数增加时, 需要减小虚拟时间步长以满足计算稳定性的要求, 因此收敛速度明显减慢. 一个周期内升力系数对比如图 30 所示. 图 31 为升力系数最小时刻对应的熵等值线图. 从图 30 和图 31 可以看出, HBM 采用 3 个谐波数就能够重现时域结果, 达到时域计算的精度.

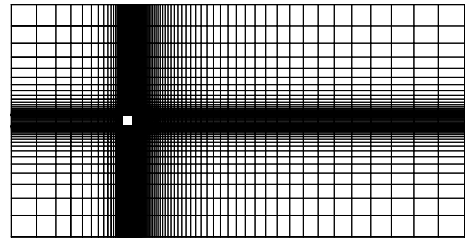


图 29 二维方柱绕流计算网格

Fig. 29. Computational grid for rectangular in cross flow.

表 4 时域计算结果

Table 4. Time-averaged coefficient and Strouhal number computed by time-domain solver using different physical time steps.

Δt	St	$C_{d, avg}$
0.1	0.134	1.443
0.01	0.1415	1.487
Sohankar ^[46]	0.142	1.466

表 5 $Re = 100$ 时不同谐波数下的计算结果对比

Table 5. Convergency of frequency and time-averaged coefficient with speedup estimates.

N_H	St	$C_{d, avg}$	Speedup
2	0.1419	1.4846	23.27
3	0.1414	1.4863	17.88
4	0.1414	1.4865	1.944
TDM	0.1415	1.487	1

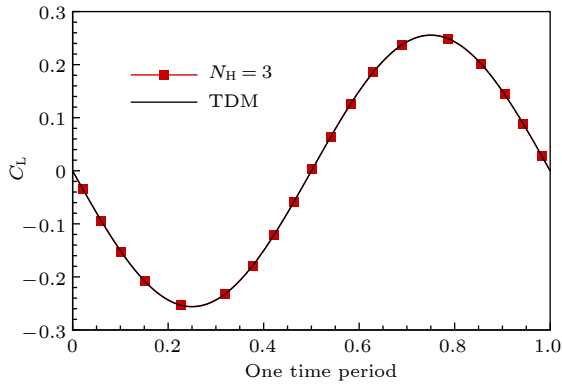


图 30 升力系数随时间的变化

Fig. 30. Comparison of lift coefficients of HBM and TDM at $Re = 100$.

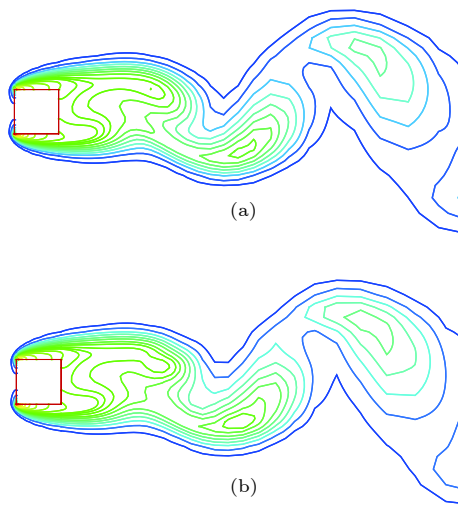


图 31 熵等值线图 (C_L 最小时刻) (a) TDM 计算结果; (b) HBM 计算结果 ($N_H = 3$)

Fig. 31. Comparison of the instantaneous entropy contours: (a) TDM results; (b) HBM results ($N_H = 3$).

7 结 论

本文以 RANS 方程为控制方程, 采用 HBM 对低雷诺数二维不可压绕圆柱和方柱的周期性非定常流动进行了数值模拟. 对于这类流动周期未知的非定常流动问题, 采用基于残差导数的 GBVTP 求解涡脱落周期. 得到的以下主要结论.

1) 可变周期 HBM 可以准确地模拟周期性非定常涡脱落问题, 计算得到的 Strouhal 数和平均阻力系数与实验值及其他数值计算数据符合良好, 与传统的 TDM 相比该方法具有较高的计算效率.

2) 周期搜索步长 λ 对计算结果影响较小, 非定常涡脱落周期都收敛到同一值; 当初值 T_0 较大时, 最终计算得到的周期 T 可能会收敛到 nT^* ($n =$

2, 3, \dots), 因此有必要发展自动搜索最小周期的计算方法.

3) 基于不同优化策略的可变周期计算结果表明: 不同优化方法的计算精度相当; 牛顿法没有参数问题, 其收敛速度与共轭梯度法及 SDM 采用最大搜索步长时的收敛速度一致. 因此, 牛顿法在工程计算中更有优势.

参考文献

- [1] McMullen M, Jameson A, Alonso J 2006 *AIAA J.* **44** 1428
- [2] Mosahebi A, Nadarajah S 2013 *Comput. Fluids* **75** 140
- [3] Hall K C, Grawley E F 1989 *AIAA J.* **27** 777
- [4] Zhang Z, Yang S, Chen P C 2012 *J. Aircraft* **49** 922
- [5] Ning W, He L 1998 *J. Turbomach.* **120** 508
- [6] Hall K C, Thomas J P, Clark W S 2002 *AIAA J.* **40** 879
- [7] Ekici K, Hall K C 2007 *AIAA J.* **45** 1047
- [8] McMullen M, Jameson A, Alonso J 2001 39th *Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, NV, January 8–11, 2001 AIAA 2001-0152
- [9] Gopinath A, Jameson A 2005 43rd *AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, Nevada, January 10–13, 2005 AIAA 2005-1220
- [10] Rubino A, Pini M, Colonna P, Albring T, Nimmagadda S, Economon T, Alonso J 2018 *J. Comput. Phys.* **372** 220
- [11] Lindblad D, Montero Villar G, Andersson N, Capitao Patrao A, Courty-Audren S K, Napias G 2018 *AIAA Aerospace Sciences Meeting* Kissimmee, Florida, January 8–12, 2018 AIAA 2018-1004
- [12] Reddy T S R, Bakhle M 2009 45th *AIAA/ASME/SAE/ASEE Joint Propulsion Conference & Exhibit* Denver, Colorado, August 2–5, 2009 AIAA 2009-5420
- [13] Cvijetic G, Jasak H 2018 *AIAA Aerospace Sciences Meeting* Kissimmee, Florida, January 8–12, 2018 AIAA 2018-0833
- [14] Hall K C, Thomas J P, Ekici K, Voytovych D M 2003 33rd *AIAA Fluid Dynamics Conference and Exhibit* Orlando, Florida, June 23–26, 2003 AIAA 2003-3998
- [15] Hall K C, Ekici K, Thomas J P, Dowell E H 2013 *Int. J. Comput. Fluid Dyn.* **27** 54
- [16] Lindblad D, Andersson N 2017 55th *AIAA Aerospace Sciences Meeting* Grapevine, Texas, January 9–13, 2017 AIAA 2017-1171
- [17] Du P C, Ning F F 2017 *Journal of Aerospace Power* **32** 528 (in Chinese) [杜鹏程, 宁方飞 2017 航空动力学报 **32** 528]
- [18] Thomas J P, Custer C H, Dowell E H, Hall K C, Corre C 2013 *AIAA J.* **51** 1374
- [19] Thomas J P, Custer C H, Dowell E H, Hall K C 19th *AIAA Computational Fluid Dynamics* San Antonio, Texas, June 22–25, 2009 AIAA 2009-4270
- [20] Guillaume D, Frédéric S, Guillaume P 2010 *AIAA J.* **48** 788
- [21] Ekici K, Hall K C, Dowell E H 2008 *J. Comput. Phys.* **227** 6206
- [22] Da Ronch A, Vallespin D, Ghoreyshi M, Badcock K J 2012 *AIAA J.* **50** 470
- [23] Da Ronch A, McCracken A J, Badcock K J, Widhalm M, Campobasso M S 2013 *J. Aircraft* **50** 694
- [24] Murman S M 2005 43rd *AIAA Aerospace Sciences Meeting* Reno, NV, January 10–13, 2005 AIAA 2005-0840
- [25] Hassan D, Sicot F 2011 49th *AIAA Aerospace Sciences*

- Meeting including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* Orlando, Florida, January 4–7, 2011 AIAA 2011-1242
- [26] Chen Q, Chen J Q, Yuan X X, Xie Y F 2014 *Chinese Journal of Theoretical and Applied Mechanics* **46** 183 (in Chinese) [陈琦, 陈坚强, 袁先旭, 谢昱飞 2014 *力学学报* **46** 183]
- [27] Chai Z X, Liu W, Liu X, Yang X L 2018 *J. Nat. Univ. Defense Technol.* **40** 30 (in Chinese) [柴振霞, 刘伟, 刘绪, 杨小亮 2018 *国防科技大学学报* **40** 30]
- [28] Clark E B, Ekici K, Beran P S 2014 *44th AIAA Fluid Dynamics Conference* Atlanta, GA, June 16–20, 2014 AIAA 2014-3323
- [29] Cvijetic G, Jasak H, Vukcevic V 2016 *54th AIAA Aerospace Sciences Meeting* San Diego, California, USA, January 4–8, 2016 AIAA 2006-0070
- [30] McMullen M, Jameson A, Alonso J J 2002 *40th AIAA Aerospace Sciences Meeting & Exhibit* Reno, NV, January 14–17, 2002 AIAA 2002-0120
- [31] Gopinath A K, Jameson A 2006 *44th AIAA Aerospace Sciences Meeting and Exhibit* Reno, Nevada, January 9–12, 2006 AIAA 2006-449
- [32] Spiker M A, Thomas J P, Hall K C, Kielb R E, Dowell E H 2006 *47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference* Newport, Rhode Island, May 1–4, 2006 AIAA 2006-1965
- [33] Mosahebi A, Nadarajah S K 2010 *48th AIAA Aerospace Sciences Meeting Including the New Horizons Forum and Aerospace Exposition* Orlando, Florida, January 4–7, 2010 AIAA 2010-1267
- [34] Yao W, Jaiman R K 2016 *J. Fluids Struct.* **65** 313
- [35] Yao W, Marques S 2015 *AIAA J.* **53** 2040
- [36] Zhang W, Xi G 2009 *Journal of Xi'an Jiaotong University* **43** 114 (in Chinese) [张炜, 席光 2009 *西安交通大学学报* **43** 114]
- [37] Jameson A 1991 *10th Computational Fluid Dynamics Conference* Honolulu, HI, June 24–26, 1991 AIAA 1991-1596
- [38] Landon R H 1982 *NACA 0012 Oscillatory and Transient Pitching* Tech. Rep. AGARD-R-702
- [39] Batina J T 1990 *AIAA J.* **28** 1381
- [40] Henderson R D 1995 *Phys. Fluids* **7** 2102
- [41] Wieselsberger C 1922 *Physik. Z.* **22** 321
- [42] Roshko A 1954 *On the Development of Turbulent Wakes From Vortex Streets* (California Institute of Technology, NACA) Tech. Rep. 1191
- [43] Williamson C H K 1988 *Phys. Fluids* **31** 2742
- [44] Williamson C H K 1998 *J. Fluids Struct.* **12** 1073
- [45] Zhang B L 2005 *Theory and Algorithms of Optimization* (Beijing: Tsinghua University Press) (in Chinese) [张宝林 2005 *最优化理论与算法* (北京: 清华大学出版社)]
- [46] Sohankar A, Davidson L, Norberg C 1995 *Twelfth Australasian Fluid Mechanics Conference Sydney, Australia, December, 1995* p517

Application of variable-time-period harmonic balance method to periodic unsteady vortex shedding*

Chai Zhen-Xia Liu Wei[†] Yang Xiao-Liang Zhou Yun-Long

(College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China)

(Received 22 January 2019; revised manuscript received 28 March 2019)

Abstract

The harmonic balance method (HBM) is an efficient frequency-domain approach to computing periodically unsteady flows. The basic principle of this method is to decompose the flow variables into a Fourier series, and transform the unsteady flow into several steady problems coupled by a spectral time-derivative operator, from which the whole time history of a complete unsteady periodic flow can be reconstructed. In the present work, we investigate the ability of the HBM to be used for modeling the periodic unsteady vortex shedding behind a bluff body at low Reynolds numbers via solving the unsteady incompressible Navier-Stokes equations. For the periodic problem where the time period T of the unsteadiness is unknown, a variable-time-period method based on residual gradients is used to compute the exact time period iteratively starting from an initial guess T_0 . By simulating the two-dimensional laminar flows over a circular cylinder and a square cylinder, the accuracy and efficiency of the HBM are investigated and the effects of different parameters on the final results are analyzed. Comparisons with the results of fixed-time-period HBM using a constant time period are also implemented. Three practical methods of optimization are used to iterate the time period, and the values of accuracy and efficiency of different methods are compared with each other. The results show that the HBM can accurately capture the complex nonlinear flow field physics with only three harmonics. The Strouhal frequency and mean drag coefficient each as a function of the Reynolds number agree well with existing experimental and computational data. For both test cases, the computational efficiency of HBM is higher than that from the traditional time-domain method. For the square cylinder test case, the HBM offers speedup rate up to nearly 18 times. The real time period of vortex shedding can be predicted by the gradient based variable-time-period method, and the final result is insensitive to search step λ . The calculation result is sensitive to the initial T_0 , and when such a variable is greater than a certain value, the result will converge to an approximate integer multiple of the real one. Therefore, it deserves further exploration on how to specify this initial condition. The shedding time periods computed by different optimization methods are converged to the same value. The computational efficiency from the FR conjugate gradient method and that from Newton method are both equivalent to that from the steepest descent method with the maximum search step $\lambda = 100$. Avoiding prescribing parameters such as the search step λ , the Newton method possesses higher application value in engineering calculation than the other two schemes.

Keywords: periodic unsteady flows, numerical simulation, harmonic balance method, variable-time-period method

PACS: 47.11.-j, 47.10.ad, 47.11.Kb, 47.15.-x

DOI: 10.7498/aps.68.20190126

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11502292, 11572348).

[†] Corresponding author. E-mail: fishfather6525@sina.com