

基于真实信息传播者的谣言传播模型的动力学分析

张菊平 郭昊明 荆文君 靳祯

Dynamic analysis of rumor propagation model based on true information spreader

Zhang Ju-Ping Guo Hao-Ming Jing Wen-Jun Jin Zhen

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 150501 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190191

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190191>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

考虑谣言清除过程的网络谣言传播与抑制

Propagation and inhibition of online rumor with considering rumor elimination process

物理学报. 2015, 64(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.64.240501>

一种基于社交影响力和平均场理论的信息传播动力学模型

An information diffusion dynamic model based on social influence and mean-field theory

物理学报. 2017, 66(3): 030501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.030501>

一种基于用户相对权重的在线社交网络信息传播模型

An information spreading model based on relative weight in social network

物理学报. 2015, 64(5): 050501 <https://doi.org/10.7498/aps.64.050501>

一种基于分支过程的信息流行度动力学模型

Modeling information popularity dynamics based on branching process

物理学报. 2019, 68(7): 078901 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181948>

具有跨邻居传播能力的信息辐射模型研究

Information radiation model with across neighbor spread abilities of nodes

物理学报. 2017, 66(3): 038901 <https://doi.org/10.7498/aps.66.038901>

考虑边聚类与扩散特性的信息传播网络结构优化算法

Network structure optimization algorithm for information propagation considering edge clustering and diffusion characteristics

物理学报. 2018, 67(19): 190502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180395>

基于真实信息传播者的谣言传播模型的动力学分析*

张菊平¹⁾²⁾ 郭昊明¹⁾²⁾ 荆文君¹⁾²⁾ 靳祯^{1)2)†}

1) (山西大学复杂系统研究所, 太原 030006)

2) (山西大学, 疾病防控的数学技术与大数据分析山西省重点实验室, 太原 030006)

(2019年2月10日收到; 2019年5月5日收到修改稿)

在谣言传播过程中加入真实信息的传播者, 考虑了人们对谣言的遗忘因素, 建立了 SITR (susceptible-infective-true-removed) 谣言传播模型. 利用下一代矩阵得到了谣言传播的阈值 K_0 , 证明了 $K_0 < 1$ 时无谣言传播者无真实信息传播者平衡点的稳定性, 给出了边界平衡点 (即有谣言传播者但无真实信息传播者, 及无谣言传播者但有真实信息传播者平衡点) 存在的条件, 以及它们的稳定性, 发现了两个边界平衡点出现双稳的区域, 获得了不同条件下正平衡点的存在性, 及其局部稳定性. 最后, 通过数值模拟验证了理论结果, 模拟分析了真实信息传播者的初始值对谣言传播者的峰值及谣言的持续时间等的影响.

关键词: 谣言传播, 真实信息, 阈值, 平衡点

PACS: 05.10.-a, 87.23.Ge, 89.75.Fb

DOI: 10.7498/aps.68.20190191

1 引言

谣言, 指的是没有相应事实基础, 却被捏造出来并通过一定手段推动传播的言论. 近年来, 随着移动互联网 + 时代的到来, 使信息化传播门槛进一步降低, 加之移动通信工具的普遍, 谣言传播变得速度更快, 作用力更强. 网络谣言滋生蔓延, 不仅败坏个人名誉, 给受害人造成极大的精神困扰, 更损害国家形象, 影响社会稳定. 因此, 对于谣言传播规律的研究十分必要. 谣言传播模型的研究始于 20 世纪 60 年代, Daley 和 Kendall^[1] 提出的 D-K 模型, 按照谣言传播把受众分为三类, 未曾听过谣言的人、传播谣言的人和听过谣言但不传播谣言的人, 利用随机过程的方法进行分析. Sudbury^[2] 认为可以借鉴传染病 SIR (susceptible-infective-removed) 模型研究谣言的传播. Zanette^[3,4] 和

Nekovee 等^[5] 分别在小世界网络和无标度网络上研究谣言的传播. Moreno 等^[6] 基于 SIR 模型在非均匀网络上建立网络谣言传播模型. Zhao 等^[7,8] 研究提出了遗忘机制、记忆机制对谣言传播的影响. Deng 和 Li^[9] 在研究谣言传播模型时考虑了遗忘率和记忆率. Zan 等^[10] 基于 SIR 模型提出了具有反击机制的谣言传播模型. Wang 等^[11] 基于 SIR 模型提出了带有信任机制的谣言传播模型. Yang 等^[12] 和 He 等^[13] 研究了真理传播和辟谣策略对于谣言传播的影响. Huo 等^[14] 考虑了传播节点的活跃度, 将谣言传播者分为高活跃状态下的传播者和低活跃状态下的传播者, 最后得出谣言传播者的活跃程度对于谣言传播有着非常大的影响. Zhang 和 Zhu^[15] 建立了 I2S2R (ignorants-spreaders-stifler) 的谣言传播动态模型. Xiao 等^[16] 提出了一种基于进化博弈和反谣言信息的谣言传播动力学模型, 证明谣言不仅受到反谣言信息的影响, 而且还受到用

* 国家自然科学基金 (批准号: 61873154, 11601294) 和山西省自然科学基金 (批准号: 201801D121008, 201801D121206) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jinzhn@263.net

户行为和心理因素的影响. 顾亦然和夏玲玲^[17] 基于在线社交网络建立 SEIR (susceptible-exposed-infective-removed) 谣言传播模型, 并提出重要熟人免疫策略. 王辉等^[18] 研究了社会加强效应对谣言传播的影响. 张亚明等^[19] 研究了双重社会强化对谣言传播的影响. 万贻平等^[20] 在谣言传播模型的基础上增加谣言清除者, 研究了谣言清除过程的网络谣言传播与抑制. 冉茂洁等^[21] 同时考虑个体兴趣度差异和辟谣机制问题, 提出建立了 IWSR (ignorant-weak spreader-strong spreader-removal) 谣言传播模型. 赵敏等^[22] 考虑媒体正面宣传报道和负面报道对谣言传播的影响, 基于社交网络建立了新的谣言传播模型.

在谣言传播过程中, 一些人已知事实真相或经过判断知道真相, 并传播有关谣言的真实信息, 但是已有的研究未考虑真实信息传播对于谣言传播的动力学影响. 因此加入真实信息的传播者会使得谣言传播更加符合实际, 而且现有的谣言模型对其进行数学分析的较少. 本文考虑真实信息传播的影响, 建立谣言传播模型并对其进行动力学分析, 第 2 节根据谣言传播的机理建立了含有真实信息传播者的谣言传播 SITR 模型; 第 3 节给出了谣言传播的阈值条件; 第 4 节讨论了谣言传播者存在真实信息传播者不存在平衡点的条件, 及谣言传播者不存在真实信息传播者存在平衡点的条件, 并分析了它们的动力学性态; 第 5 节分析了谣言传播者与真实信息传播者共同存在的平衡点存在性及其动力学性态; 第 6 节数值模拟验证理论结果; 第 7 节为总结.

2 模型的建立

在谣言传播过程中加入真实信息的传播者, 将人群分为四类: 未知者 S (susceptible), 谣言的传播者 I (infective), 真实信息的传播者 T (true), 免疫者 R (removed). 未知者与谣言传播者接触率为 β , 接触后未知者以概率 α_1 成为谣言传播者, 以概率 $1 - \alpha_1$ 成为免疫者; 未知者和谣言传播者与真实信息传播者接触, 未知者和谣言传播者以概率 δ 成为真实信息传播者; 谣言传播者与谣言传播者接触后, 谣言传播者对谣言失去兴趣变为免疫者的概率为 ϵ ; 谣言传播者的遗忘率为 θ .

用 $S(t)$, $I(t)$, $T(t)$ 和 $R(t)$ 分别表示在 t 时刻的

未知者、谣言的传播者、真实信息的传播者和免疫者的数量, $N(t)$ 表示在 t 时刻四类人群的总数, 则有 $N(t) = I(t) + S(t) + T(t) + R(t)$. 假设个体以恒定速率 A 进入人群且全部为未知者, 四类人群以速率 μ 移出群体, 他们之间的关系如图 1 所示.

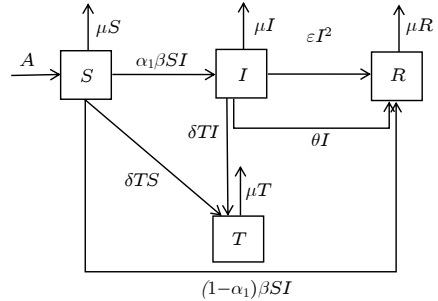


图 1 真实信息影响下谣言传播流程图

Fig. 1. Flow chart of rumor propagation under the influence of true information.

根据图 1, 建立 SITR 谣言传播模型如下:

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \beta SI - \delta ST - \mu S, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha_1 \beta SI - \delta IT - \epsilon I^2 - \theta I - \mu I, \\ \frac{dT(t)}{dt} = \delta T(S + I) - \mu T, \\ \frac{dR(t)}{dt} = (1 - \alpha_1) \beta SI + \epsilon I^2 + \theta I - \mu R. \end{cases} \quad (1)$$

将系统 (1) 的四个方程相加, 得到 $\frac{dN(t)}{dt} = A - \mu N(t)$, 解得 $N(t) = N_0 e^{-t} + \frac{A}{\mu}$, 其中 $N(0) = N_0$ 表示初始时刻四类人群的总数. 有

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} N(t) = \frac{A}{\mu}.$$

因为系统 (1) 的前三个方程不含 R , 因此只考虑系统 (1) 的前三个方程, 得

$$\begin{cases} \frac{dS(t)}{dt} = A - \beta SI - \delta ST - \mu S, \\ \frac{dI(t)}{dt} = \alpha_1 \beta SI - \delta IT - \epsilon I^2 - \theta I - \mu I, \\ \frac{dT(t)}{dt} = \delta T(S + I) - \mu T. \end{cases} \quad (2)$$

容易验证系统 (2) 的正向不变集是

$$D = \{(S(t), I(t), T(t)) | S(t), I(t), T(t) \geq 0, 0 \leq S(t) + I(t) + T(t) \leq \frac{A}{\mu}\}.$$

3 无谣言传播者无真实信息传播者平衡点与阈值

系统 (2) 有一个无谣言传播者无真实信息传播者平衡点 $E_0 (A/\mu, 0, 0)$, 下面用下一代矩阵法^[23]求系统 (2) 的阈值.

记 $X = (I, T)^\top$, \top 表示向量 (I, T) 的转置, 则

$$\mathcal{F}(X) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta S I \\ \delta T S \end{pmatrix}, \mathcal{V}(X) = \begin{pmatrix} \delta I T + \epsilon I^2 + \theta I + \mu I \\ \mu T - \delta I T \end{pmatrix}.$$

在无谣言传播者无真实信息传播者平衡点 E_0 处有

$$F(E_0) = \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta \frac{A}{\mu} & 0 \\ 0 & \delta \frac{A}{\mu} \end{pmatrix}, V(E_0) = \begin{pmatrix} \theta + \mu & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix},$$

得 $FV^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\alpha_1 \beta A}{\mu(\theta + \mu)} & 0 \\ 0 & \delta A/\mu^2 \end{pmatrix}$, 则系统 (2) 的

阈值是 FV^{-1} 的最大谱半径, 即

$$K_0 = \max\{\rho(FV^{-1})\} = \max\{K_1, K_2\},$$

其中 $K_1 = \frac{\delta A}{\mu^2}$, $K_2 = \frac{\alpha_1 \beta A}{\mu(\theta + \mu)}$.

定理 1 当 $K_0 < 1$ 时, 系统 (2) 的无谣言传播者无真实信息传播者平衡点 E_0 是局部渐近稳定的.

4 边界平衡点的存在性及局部渐近稳定性

4.1 无谣言传播者但真实信息传播者存在的平衡点

在谣言传播的过程中, 由于真实信息传播者的存在, 人群中最终没有了谣言传播者, 即无谣言传播者但有真实信息传播者平衡点存在性的问题. 通过对系统 (2) 求平衡点得, 如果 $K_1 > 1$, 那么系统 (2) 存在无谣言传播者但有真实信息传播者平衡点 $E_1 (\frac{\mu}{\delta}, 0, \frac{\mu}{\delta}(K_1 - 1))$, 简称为系统 (2) 的边界平衡点 E_1 .

定理 2 当 $K_1 > 1$, 且 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时,

$$J(E_2) = \begin{pmatrix} \frac{-\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) - \sqrt{\Delta}}{2\epsilon} & \frac{\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) - \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\beta} & \frac{\delta[\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) - \sqrt{\Delta}]}{2\alpha_1\beta^2} \\ \frac{\alpha_1[-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}]}{2\epsilon} & \frac{\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) - \sqrt{\Delta}}{2\beta} & \frac{\delta[\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) - \sqrt{\Delta}]}{2\epsilon\beta} \\ 0 & 0 & \delta \left[\frac{-\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\beta^2} + \frac{-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\epsilon\beta} \right] - \mu \end{pmatrix},$$

系统 (2) 的边界平衡点 E_1 是局部渐近稳定的.

证明 系统 (2) 在 E_1 处的雅可比矩阵为

$$J(E_1) = \begin{pmatrix} -\mu K_1 & -\frac{\beta\mu}{\delta} & -\mu \\ 0 & \frac{\alpha_1\beta\mu}{\delta} - \mu K_1 - \theta & 0 \\ \mu K_1 - \mu & \mu K_1 - \mu & 0 \end{pmatrix},$$

特征方程为: $(\lambda - \frac{\alpha_1\beta\mu}{\delta} + \mu K_1 + \theta)[\lambda^2 + \mu K_1\lambda + \mu^2(K_1 - 1)] = 0$. 因此, 特征方程有一个特征根为 $\lambda_1 = \frac{\alpha_1\beta\mu}{\delta} - \mu K_1 - \theta$, 另外两个特征根满足方程:

$$\lambda^2 + \mu K_1\lambda + \mu^2(K_1 - 1) = 0, \quad (3)$$

当 $K_1 > 1$ 时, 方程 (3) 的两个根都具有负实部. 又当 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, $\lambda_1 < 0$. 因此, 当 $K_1 > 1$, 且 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, E_1 是局部渐近稳定的.

4.2 谣言传播者存在但无真实信息传播者的平衡点

在谣言传播的过程中, 可能会出现谣言传播者存在但没有真实信息传播者, 即 $I \neq 0, T = 0$. 令系统 (2) 右端为零, 当 $I \neq 0, T = 0$ 时, 得到方程

$$aI^2 + bI + c = 0, \quad (4)$$

其中 $a = \epsilon\beta > 0, b = \epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) > 0, c = \mu(\theta + \mu) \times (1 - K_2)$.

当 $K_2 < 1$ 时, 方程 (4) 无正实根. 当 $K_2 > 1$ 时, 方程 (4) 存在唯一正根 $I_2 = \frac{-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\epsilon\beta}$, 其中, $\Delta = [\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu)]^2 - 4\epsilon\beta\mu(\theta + \mu)(1 - K_2)$. 故当 $K_2 > 1$ 时, 系统 (2) 存在有谣言传播者但无真实信息传播者的平衡点 $E_2 \left(\frac{-\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\beta^2}, \frac{-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\epsilon\beta}, 0 \right)$, 我们称为边界平衡点 E_2 .

定理 3 当 $K_2 > 1$, 且

$$K_1 < \frac{2\epsilon\beta(\theta + \mu)}{(\epsilon\beta - \alpha_1\beta^2)(\theta + \mu) + (\sqrt{\Delta} - \epsilon\mu)(\epsilon + \alpha_1\beta)} K_2$$

时, 系统 (2) 的边界平衡点 E_2 是局部渐近稳定的.

证明 系统 (2) 在 E_2 处的雅可比矩阵为

相应的特征方程为

$$\left\{ \lambda + \mu - \delta \left[\frac{-\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\beta^2} + \frac{-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\epsilon\beta} \right] \right\} (\lambda^2 + p_0\lambda + q_0) = 0,$$

其中,

$$p_0 = \frac{(\beta + \epsilon)[- \epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}]}{2\epsilon\beta} + \mu, \\ q_0 = \frac{\sqrt{\Delta}[- \epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}]}{2\epsilon\beta}. \text{ 特征方程有一个特征根为}$$

$$\lambda_1 = \delta \left[\frac{-\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\beta^2} + \frac{-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\epsilon\beta} \right] - \mu,$$

另外两个特征根满足方程

$$\lambda^2 + p_0\lambda + q_0 = 0, \quad (5)$$

因为 $-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta} > 0$, 从而有 $p_0 > 0, q_0 > 0$. 故方程 (5) 的两个根都具有负实部. 因此, 当

$$\lambda_1 = \delta \left[\frac{-\epsilon\mu + \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\alpha_1\beta^2} + \frac{-\epsilon\mu - \beta(\theta + \mu) + \sqrt{\Delta}}{2\epsilon\beta} \right] - \mu < 0$$

时, 即

$$K_1 < \frac{2\epsilon\beta(\theta + \mu)}{(\epsilon\beta - \alpha_1\beta^2)(\theta + \mu) + (\sqrt{\Delta} - \epsilon\mu)(\epsilon + \alpha_1\beta)} K_2,$$

系统 (2) 的边界平衡点 E_2 是局部渐近稳定的. 令

$$m = \frac{(\epsilon\beta - \alpha_1\beta^2)(\theta + \mu) + (\sqrt{\Delta} - \epsilon\mu)(\epsilon + \alpha_1\beta) - 2\epsilon\beta\theta}{2\epsilon\beta\mu},$$

$$n = \frac{2\epsilon\beta(\theta + \mu)}{(\epsilon\beta - \alpha_1\beta^2)(\theta + \mu) + (\sqrt{\Delta} - \epsilon\mu)(\epsilon + \alpha_1\beta)}. \text{ 直线 } K_2 = \frac{1}{n}K_1 \text{ 的斜率为}$$

$$\frac{1}{n} = \frac{(\epsilon\beta - \alpha_1\beta^2)(\theta + \mu) + (\sqrt{\Delta} - \epsilon\mu)(\epsilon + \alpha_1\beta)}{2\epsilon\beta(\theta + \mu)}, \text{ 因为 } \sqrt{\Delta} > \epsilon\mu + \beta(\theta + \mu), \text{ 所以 } 1/n > 1. \text{ 因此 } K_2 =$$

$K_2 = \frac{1}{n}K_1$ 与 $K_2 = K_1(\mu K_1 + \theta)/(\mu + \theta)$ 始终有一个交点, 且 $K_2 = \frac{1}{n}K_1$ 与 $K_2 = K_1(\mu K_1 + \theta)/(\mu + \theta)$ 的交点的横坐标为 $m > 1$.

综上所述, 当 $K_1 > 1$, 且 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$

时, 系统 (2) 存在边界平衡点 E_1 , 且 E_1 是局部渐近稳定的 (见图 2). 当 $K_2 > 1$, 且 $K_1 < nK_2$ 时, 系统 (2) 存在边界平衡点 E_2 , 且 E_2 是局部渐近稳定的 (见图 2). 当 $K_1 > m$, 且 $\frac{1}{n}K_1 < K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, 系统 (2) 存在两个边界平衡点 E_1 与 E_2 , 且 E_1 与 E_2 是局部渐近稳定的, 系统 (2) 出现双稳现象 (见图 2 红色区域). 即在谣言传播的过程中, 初始值处于不同范围时, 系统 (2) 的解或者趋于有真实信息传播者但无谣言传播者的平衡点, 或者趋于有谣言传播者但无真实信息传播者的平衡点.

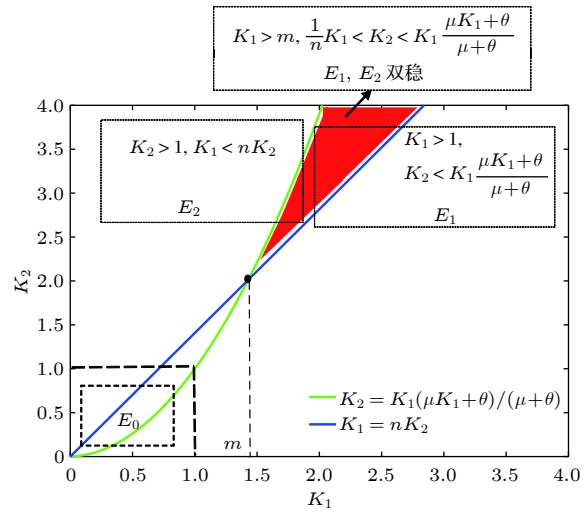


图 2 K_1 与 K_2 的关系图, 参数取值为 $\alpha_1 = 0.6, \beta = 0.6, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01$

Fig. 2. Diagram of K_1 and K_2 . The parameter values are $\alpha_1 = 0.6, \beta = 0.6, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01$.

5 正平衡点的存在性及局部稳定性

下面求在谣言传播中, 谣言传播者和真实信息传播者共存的平衡点, 为了简便起见称其为正平衡点.

令系统 (2) 右端为零, 当 $I \neq 0, T \neq 0$ 时, 解得

$$S^* = \frac{\mu}{\delta} - I^*, \quad T^* = \frac{(\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right) - (\epsilon + \alpha_1\beta)I^*}{\delta},$$

其中, I^* 满足方程

$$a_0 I^{*2} + b_0 I^* + c_0 = 0, \quad (6)$$

$$a_0 = \beta - \epsilon - \alpha_1\beta, \quad b_0 = (\theta + \mu) \frac{K_2}{K_1} - \theta - \frac{\mu}{\delta} a_0, \quad c_0 = \frac{\mu(\theta + \mu)}{\delta K_1} \left[\frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta} - K_2 \right]. \text{ 方程 (6) 的判别式为}$$

$$\Delta_1 = \left[(\theta + \mu) \frac{K_2}{K_1} - \theta + \frac{\mu}{\delta} a_0 \right]^2 - 4a_0 A.$$

若正平衡点 $E^*(S^*, I^*, T^*)$ 存在, 则要求 $S^* > 0$, $I^* > 0$, $T^* > 0$. 可得到 $0 < I^* < \mu/\delta$, $0 < I^* < \frac{(\theta + \mu)(K_2/K_1 - 1)}{\epsilon + \alpha_1 \beta}$. 因此, 要想使得正平衡点 E^* 存在, 只需 $K_2 > K_1$. 又因为 $\frac{(\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right)}{\epsilon + \alpha_1 \beta} < \frac{\mu}{\delta}$, 故 $0 < I^* < \frac{(\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right)}{\epsilon + \alpha_1 \beta}$.

下面分情况讨论方程 (6) 正根的存在性.

情形 1 当 $K_2 > \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, 有 $c_0 < 0$, $(\theta + \mu) \frac{K_2}{K_1} - \theta > \frac{\delta}{\mu} A$. 所以 $\Delta_1 > \left(\frac{\delta}{\mu} A - \frac{\mu}{\delta} a_0 \right)^2 \geq 0$.

(i) 当 $a_0 \geq 0$, 即 $\epsilon \leq (1 - \alpha_1)\beta$ 时, 方程 (6) 有唯一正实根 $I_1^* = \frac{-b_0 + \sqrt{\Delta_1}}{2a_0}$. 因此, 系统 (2) 存在唯一正平衡点 $E_1^*(S_1^*, I_1^*, T_1^*)$.

(ii) 当 $a_0 < 0$, 即 $\epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$ 时, 可由 $(\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right) > 0$, 得到 $(\theta + \mu) \frac{K_2}{K_1} - \theta > 0$, 故有 $b_0 > 0$, 此时方程 (6) 有两个正实根 $I_2^* = \frac{-b_0 + \sqrt{\Delta_1}}{2a_0}$ 和 $I_3^* = \frac{-b_0 - \sqrt{\Delta_1}}{2a_0} > \frac{\mu}{\delta}$ (舍去). 因此, 系统 (2) 存在唯一的正平衡点 $E_2^*(S_2^*, I_2^*, T_2^*)$.

情形 2 当 $K_2 = \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, 有 $c_0 = 0$, $\Delta_1 = b_0^2 > 0$.

(i) 当 $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, 即 $\epsilon < (1 - 2\alpha_1)\beta + \frac{\delta\theta}{\mu}$ 时, 方程 (6) 有唯一正实根 $I_4^* = \frac{-b_0}{a_0}$. 因此, 系统 (2) 存在唯一正平衡点 $E_4^*(S_4^*, I_4^*, T_4^*)$.

(ii) 当 $a_0 < 0$, 即 $\epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$ 时, 有 $b_0 > 0$, 此时方程 (6) 有唯一正实根 $I_5^* = \frac{-b_0}{a_0} > \frac{\mu}{\delta}$ (舍去).

情形 3 当 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, 有 $c_0 > 0$.

(i) 当 $a_0 > 0$, $b_0 < 0$, $\Delta_1 \geq 0$ 时, 即 $\epsilon < (1 - 2\alpha_1)\beta + \frac{\delta\theta}{\mu}$ 和 $\frac{\mu(\beta - \epsilon)}{\delta(\theta + 2\sqrt{a_0 A})} \geq 1$, 此时方程 (6) 存在两个正实根 $I_6^* = \frac{-b_0 + \sqrt{\Delta_1}}{2a_0}$ 和 $I_7^* = \frac{-b_0 - \sqrt{\Delta_1}}{2a_0}$. 因此, 系统 (2) 存在两个正平衡点 $E_6^*(S_6^*, I_6^*, T_6^*)$ 和 $E_7^*(S_7^*, I_7^*, T_7^*)$.

(ii) 当 $a_0 < 0$, 即 $\epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$ 时, 有 $b_0 > 0$, $\Delta_1 > 0$. 此时方程 (6) 有唯一正实根 $I_8^* =$

$\frac{-b_0 - \sqrt{\Delta_1}}{2a_0} > \frac{\mu}{\delta}$ (舍去). 因此, 系统 (2) 的正平衡点存在性仅在 $K_2 > K_1$ 范围内考虑.

综上所述, 系统 (2) 平衡点的存在性分下面两种情形:

1) $\epsilon < (1 - \alpha_1)\beta$: 当 $K_2 > \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, 若 $K_2 < 1$, E_1^* 存在, 此时系统 (2) 存在两个平衡点 E_0, E_1^* (见图 3(a) 黄色区域). 若 $K_2 > 1, K_1 < 1$ 时, E_1^* 存在, 此时系统 (2) 存在三个平衡点 E_0, E_2, E_1^* (见图 3(a) 绿色区域). 若 $K_2 > 1, K_1 > 1$ 时, E_1^* 存在, 此时系统 (2) 存在四个平衡点 E_0, E_1, E_2, E_1^* (见图 3(a) 紫色区域). 当 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$, 且满足 $\epsilon < (1 - 2\alpha_1)\beta + \frac{\delta\theta}{\mu}$, $\Delta_1 \geq 0$ 时, E_6^* 和 E_7^* 存在, 此时系统 (2) 存在五个平衡点 $E_0, E_1, E_2, E_6^*, E_7^*$ (见图 3(a) 蓝色区域). 若 $1 < K_2 < K_1$, 此时系统 (2) 存在三个平衡点 $E_0,$

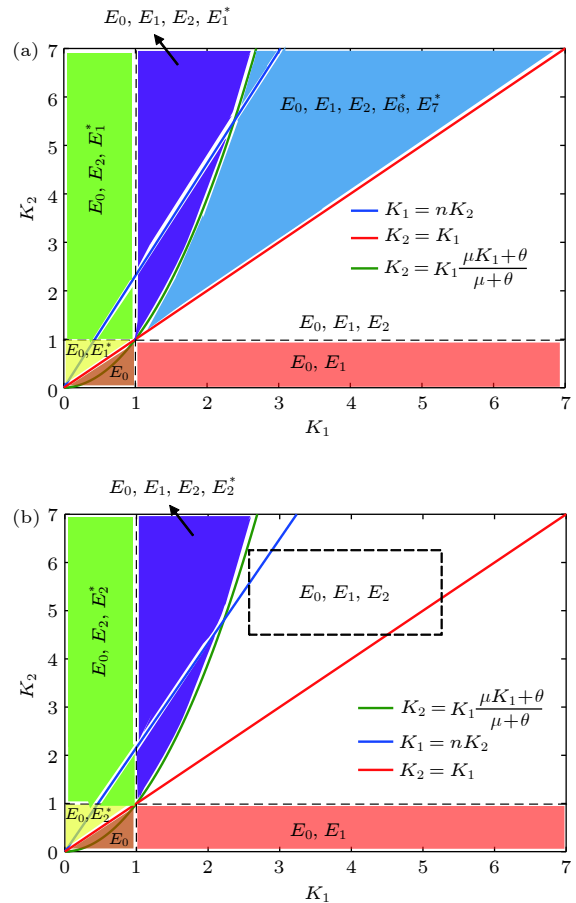


图 3 K_1 与 K_2 关系图 ($\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01$) (a) $\epsilon = 0.01, \epsilon < (1 - \alpha_1)\beta$; (b) $\epsilon = 0.3, \epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$

Fig. 3. Diagram of K_1 and K_2 ($\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01$): (a) $\epsilon = 0.01, \epsilon < (1 - \alpha_1)\beta$; (b) $\epsilon = 0.3, \epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$.

E_1, E_2 (见图 3(a) 白色区域). 若 $K_1 > 1 > K_2$, 此时系统 (2) 存在两个平衡点 E_0, E_1 (见图 3(a) 红色区域). 若 $1 > K_1 > K_2$ 时, 此时系统 (2) 存在一个平衡点 E_0 存在 (见图 3(a) 橙色区域).

2) $\epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$: 具体见图 3(b).

因此, 我们进一步表示系统 (2) 平衡点之间的关系见表 1.

定理 4 当 $K_2 > \max\{K_1, \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}\}$, 且 $\epsilon < (1 - \alpha_1)\beta$ 时, 如果 $\frac{[(a_0 + \epsilon)I_1^* + g] \left[a_0 \epsilon I_1^{*2} + \left(g\epsilon + \alpha_1 \beta^2 \frac{\mu}{\delta} \right) I_1^* - \mu h \right]}{\alpha_1 \beta^2 (a_0 + \epsilon) I_1^{*3} + \alpha_1 \beta^2 g I_1^{*2} - \delta h \sqrt{\Delta_1}} > 1$, 那么系统 (2) 的正平衡点 E_1^* 是局部渐近稳定的.

证明 系统 (2) 在正平衡点 $E^*(S^*, I^*, T^*)$ 处的雅可比矩阵为

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -\beta I^* - \delta T^* - \mu & -\beta S^* & -\delta S^* \\ \alpha_1 \beta I^* & \alpha_1 \beta S^* - \delta T^* - 2\epsilon I^* - \theta - \mu & -\delta I^* \\ \delta T^* & \delta T^* & \delta(S^* + I^*) - \mu \end{pmatrix},$$

其中 $S^* = \frac{\mu}{\delta} - I^*, T^* = \frac{(\theta + \mu)(K_2/K_1 - 1) - (\epsilon + \alpha_1 \beta)I^*}{\delta}$, 代入化简得

$$J(E^*) = \begin{pmatrix} -a_0 I^* - (\theta + \mu) \frac{K_2}{K_1} + \theta & -\beta \frac{\mu}{\delta} + \beta I^* & -\mu + \delta I^* \\ \alpha_1 \beta I^* & -\epsilon I^* & -\delta I^* \\ (\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right) - (\epsilon + \alpha_1 \beta) I^* & (\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right) - (\epsilon + \alpha_1 \beta) I^* & 0 \end{pmatrix},$$

相应的特征方程为

$$\lambda^3 + b_1 \lambda^2 + b_2 \lambda + b_3 = 0, \tag{7}$$

其中, $b_1 = (a_0 + \epsilon)I^* + g, b_2 = (a_0 \epsilon - \alpha_1 \beta^2)I^{*2} + \left(g\epsilon + \alpha_1 \beta^2 \frac{\mu}{\delta} \right) I^* - \mu h, b_3 = -\delta h(2a_0 I^{*2} + b_0 I^*), g = (\theta + \mu) \frac{K_2}{K_1} - \theta > 0, h = (\epsilon + \alpha_1 \beta)I^* - (\theta + \mu) \left(\frac{K_2}{K_1} - 1 \right) < 0$. 计算得

$$W_1 = b_1 = (a_0 + \epsilon)I^* + g > 0,$$

表 1 系统 (2) 平衡点之间的关系

Table 1. Relationship table between the equilibria of system (2).

系统(2)的平衡点		
	$K_2 < 1$	图3(a)中黄色区域 E_0, E_1^*
$K_2 > K_1$	$K_2 > 1 > K_1$	图3(a)中绿色区域 E_0, E_2, E_1^*
	$K_1 > 1$	图3(a)中紫色区域 E_0, E_1, E_2, E_1^*
$\epsilon < (1 - \alpha_1)\beta$	$K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$	图3(a)中蓝色区域 $E_0, E_1, E_2, E_6^*, E_7^*$
	$\epsilon < (1 - 2\alpha_1)\beta + \frac{\delta\theta}{\mu}, \Delta_1 \geq 0$	
$K_2 < K_1$	$K_1 < 1$	图3(a)中橙色区域 E_0
	$K_1 > 1 > K_2$	图3(a)中红色区域 E_0, E_1
	$K_1 > K_2 > 1$	图3(a)中空白色区域 E_0, E_1, E_2
$K_2 > K_1$	$K_2 < 1$	图3(b)中黄色区域 E_0, E_2^*
	$K_2 > 1 > K_1$	图3(b)中绿色区域 E_0, E_2, E_2^*
	$K_1 > 1$	图3(b)中紫色区域 E_0, E_1, E_2, E_2^*
$\epsilon > (1 - \alpha_1)\beta$	$K_1 < 1$	图3(b)中橙色区域 E_0
	$K_1 > 1 > K_2$	图3(b)中红色区域 E_0, E_1
	$1 < K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$	图3(b)中空白色区域 E_0, E_1, E_2

$$W_2 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 \\ b_3 & b_2 \end{vmatrix} = [(a_0 + \epsilon)I^* + g] \left[a_0 \epsilon I^{*2} + \left(g\epsilon + \alpha_1 \beta^2 \frac{\mu}{\delta} \right) I^* - \mu h \right] + h[2\delta a_0 I^{*2} - (\mu a_0 - g\delta)I^*] - \alpha_1 \beta^2 (a_0 + \epsilon)I^{*3} - \alpha_1 \beta^2 g I^{*2}$$

和

$$W_3 = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 \\ 0 & 0 & b_3 \end{vmatrix} = b_3 W_2.$$

把 I_1^* 代入得 $b_3 = -\delta h \sqrt{\Delta_1} > 0$, 从而知 W_3 与 W_2 同号. 进一步把 I_1^* 代入 W_2 , 由 Hurwitz 判据^[24] 可知, 当 $W_2 > 0$, 即

$$\frac{[(a_0 + \epsilon)I_1^* + g] \left[a_0 \epsilon I_1^{*2} + \left(g\epsilon + \alpha_1 \beta^2 \frac{\mu}{\delta} \right) I_1^* - \mu h \right]}{\alpha_1 \beta^2 (a_0 + \epsilon) I_1^{*3} + \alpha_1 \beta^2 g I_1^{*2} - \delta h \sqrt{\Delta_1}} > 1$$

时, E_1^* 是局部渐近稳定的.

注: 1) 可类似证明其他正平衡点的稳定性.

2) 当 $\epsilon = 0$ 时, 阈值 K_0 , 无谣言传播者无真实信息传播者平衡点 E_0 , 及无谣言传播者但真实信息传播者存在的平衡点 E_1 没有变化; 谣言传播者存在但无真实信息传播者的平衡点 E_2 的大小发生变化, 影响着双稳区域; 谣言传播者真实信息传播者共存的平衡点 (即正平衡点) 存在的条件及个数发生变化, 影响着其动力学性态.

6 数值模拟

为了验证理论结果, 下面对系统 (2) 进行数值模拟.

参数取值为 $\alpha_1 = 0.3$, $\beta = 0.6$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$, $\theta = 0.01$, $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.15$ 时, $K_1 = 0.75 < 1$, $K_2 = 0.857 < 1$, 则 E_0 渐近稳定 (见图 4).

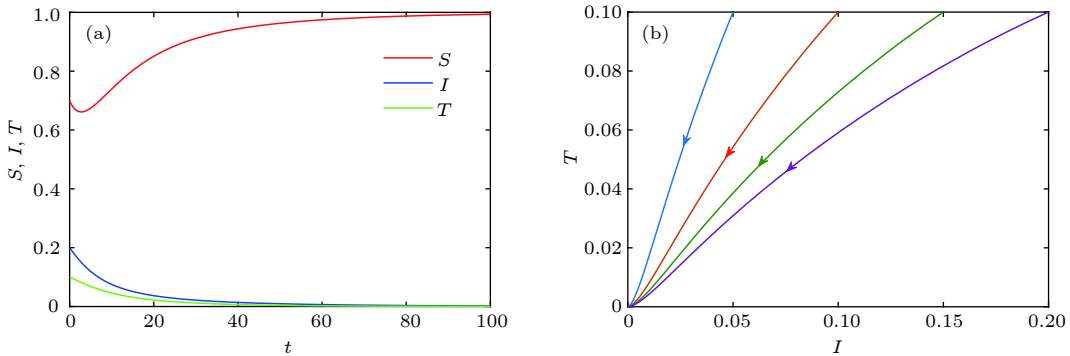


图 4 $\alpha_1 = 0.3$, $\beta = 0.6$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$, $\theta = 0.01$, $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.15$ 时, (a) S, I, T 的时间序列图和 (b) $I-T$ 相平面图

Fig. 4. When $\alpha_1 = 0.3$, $\beta = 0.6$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$, $\theta = 0.01$, $\epsilon = 0.01$, $\delta = 0.15$, (a) time series graph of S, I , and T ; (b) phase plan of $I-T$.

参数取值为 $\alpha_1 = 0.7$, $\beta = 0.9$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$, $\theta = 0.01$, $\epsilon = 0.01$. 当取 $\delta = 0.36$ 时, $K_1 = 1.8 > 1$, $K_2 = 3 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta} = 3.17$, 则 E_1 渐近稳定 (见图 5). 当取 $\delta = 0.22$ 时, $K_2 = 3 > 1$, $K_1 = 1.1 < nK_2 = 1.296$, 则 E_2 渐近稳定 (见图 6).

从图 5 可以看出, 随着谣言的传播, 谣言传播者的数量会达到一个峰值, 之后不断下降, 真实信息传播者数量随着时间逐渐增大, 最后达到稳定状态. 即系统 (2) 达到没有谣言传播者, 只有真实信息传播者和易感者的稳定状态. 从图 6 可以看出, 随着谣言的传播, 谣言传播者的数量逐渐增加, 真实信息传播者数量会逐渐减少变为零, 最后达到稳定状态. 即系统 (2) 达到没有真实信息传播者, 只有谣言传播者和易感者的稳定状态.

参数取值为 $\alpha = 0.4$, $\beta = 0.7$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$, $\epsilon = 0.01$, $\theta = 0.01$, $\delta = 0.234$, 且满足 $\frac{1}{n}K_1 < K_2 < \frac{K_1(K_1\mu + \theta)}{\mu + \theta}$, 当 $T(0)$ 值不相同, 系统 (2) 的解会趋于不同的边界平衡点 (见图 7).

参数取值为 $\alpha_1 = 0.7$, $\beta = 0.9$, $\delta = 0.3$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$, $\theta = 0.01$, 则 $K_2 = 3 > \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta} = 2.21429$. 当取 $\epsilon = 0.01$ 时, $\epsilon = 0.01 < (1 - \alpha_1)\beta = 0.27$, E_1^* 是渐近稳定的 (见图 8). 当取 $\epsilon = 0.3$ 时, $\epsilon = 0.3 > (1 - \alpha_1)\beta = 0.27$, E_2^* 是渐近稳定的 (见图 9).

取 $\alpha_1 = 0.5$, $\beta = 0.6$, $\delta = 0.24$, $A = 0.2$, $\mu = 0.2$,

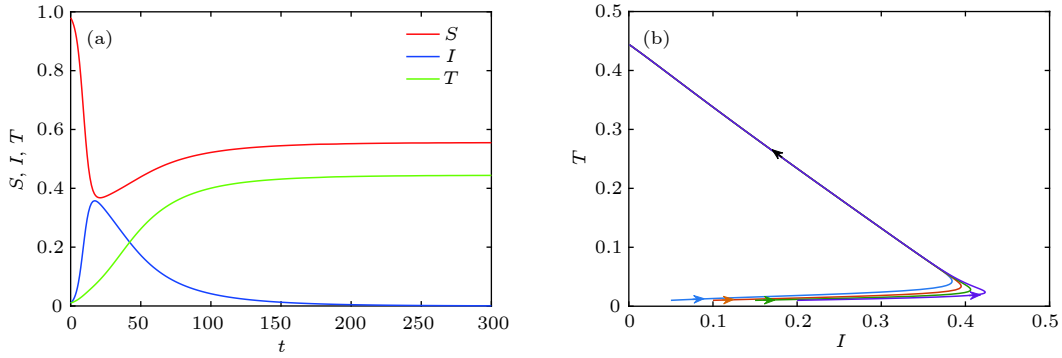


图 5 $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.36$ 时, (a) S, I, T 的时间序列图和 (b) $I-T$ 相平面图
 Fig. 5. When $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.36$, (a) time series graph of S, I , and T ; (b) phase plan of $I-T$.

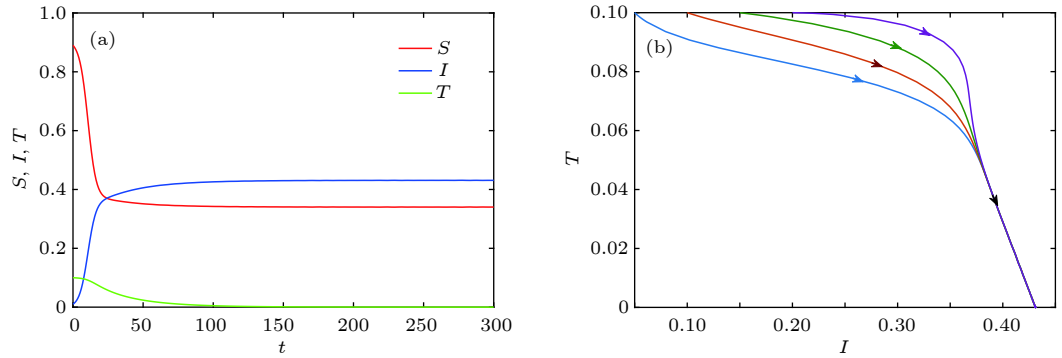


图 6 $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.22$ 时, (a) S, I, T 的时间序列图和 (b) $I-T$ 相平面图
 Fig. 6. When $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.22$, (a) time series graph of S, I , and T ; (b) phase plan of $I-T$.

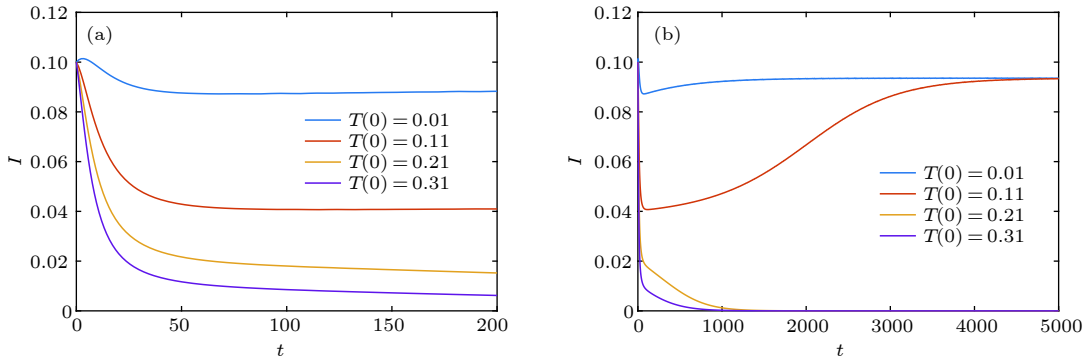


图 7 当 $T(0)$ 不相同, 系统 (2) 的解趋于不同的边界平衡点 (a) I 的时间序列图; (b) 时间增加后 I 的时间序列图
 Fig. 7. When $T(0)$ is different, the solution of system (2) tends to the different boundary equilibrium: (a) Time series graph of I ; (b) time series graph of I after time increment.

$\theta = 0.01$, 则 $K_2 = \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta} = 1.42857$, 当取 $\epsilon = 0.01 < (1 - 2\alpha_1)\beta + \delta\theta/\mu = 0.012$, E_4^* 是渐近稳定的 (见图 10).

从图 8—图 10 可看出, 随着谣言的传播, 易感者数量先减小后增大, 谣言传播者的数量会先增大后减小, 真实信息传播者数量逐渐增大, 最后达到

稳定状态. 即系统 (2) 达到同时存在易感者、言传播者和真实信息传播者的稳定状态.

从图 11(a) 可以看出, 真实信息传播者的初始值影响着谣言传播者的峰值以及谣言传播的时间, 真实信息传播者的初始值越大谣言传播者的峰值越小, 峰值到达的时间越早, 谣言灭绝得越快. 从

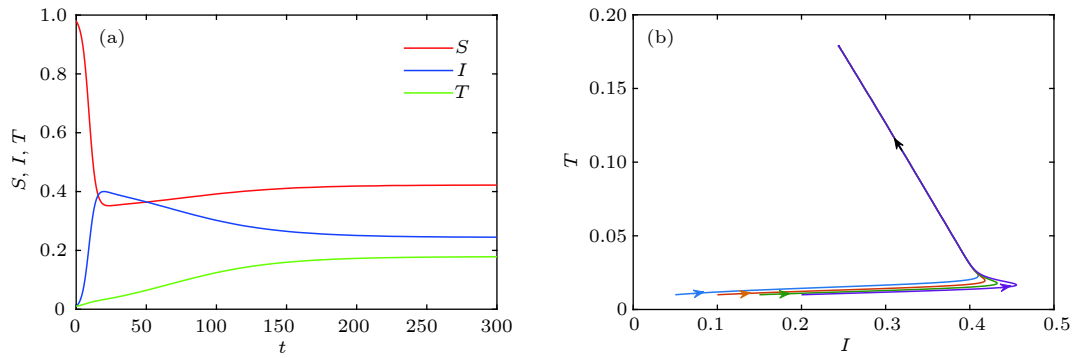


图 8 $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.3$ 时, (a) S, I, T 的时间序列图和 (b) $I-T$ 相平面图
 Fig. 8. When $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.3$, (a) time series graph of S, I , and T ; (b) phase plan of $I-T$.

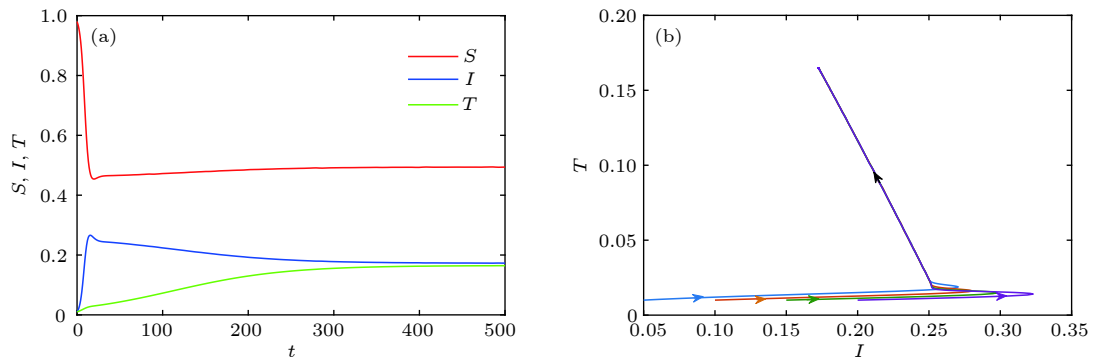


图 9 $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.3, \delta = 0.3$ 时, (a) S, I, T 的时间序列图和 (b) $I-T$ 相平面图
 Fig. 9. When $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.3, \delta = 0.3$, (a) time series graph of S, I , and T ; (b) phase plan of $I-T$.

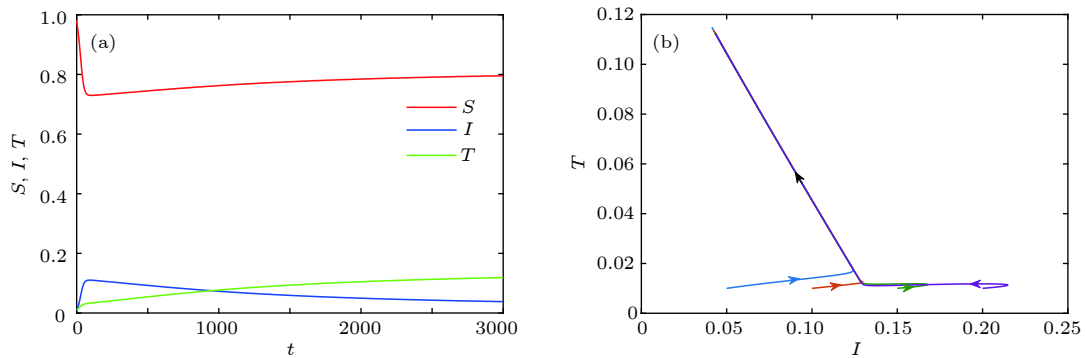


图 10 $\alpha_1 = 0.5, \beta = 0.6, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.24$ 时, (a) S, I, T 的时间序列图和 (b) $I-T$ 相平面图
 Fig. 10. When $\alpha_1 = 0.5, \beta = 0.6, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01, \delta = 0.24$, (a) time series graph of S, I , and T ; (b) phase plan of $I-T$.

图 11(b) 可以看出, 谣言传播者的初始值影响着谣言传播者的峰值以及谣言传播者峰值到达的时间, 谣言传播者的初始值越大谣言传播者的峰值越大, 峰值到达的时间越早, 但不影响谣言持续的时间。

从图 11(a) 得到谣言传播者峰值 I_{\max} 的散点图 (见图 12(a)), 通过 MATLAB 拟合得到函数表

达式: $I_{\max} = x_1 e^{x_2 T(0)} + y_1 e^{y_2 T(0)}$, 其中, $x_1 = 0.2881, x_2 = -20.11, y_1 = 0.1296, y_2 = -6.828$ (结果见图 12(b)), 故 $T(0)$ 与 I_{\max} 之间的函数关系为 $I_{\max} = 0.2881 e^{-20.11 T(0)} + 0.1296 e^{-6.828 T(0)}$, 可以看出谣言传播者峰值 I_{\max} 随着 $T(0)$ 的增加按上述函数关系衰减。

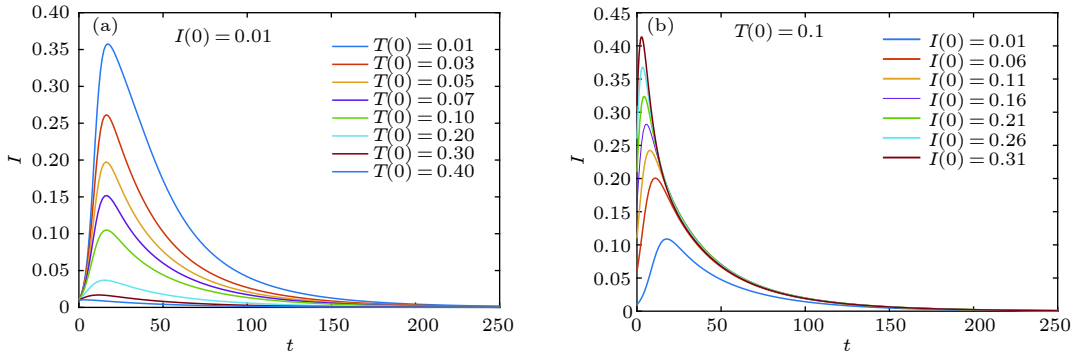


图 11 (a) 不同真实信息传播者的初始值对谣言传播的影响; (b) 不同谣言传播者的初始值对谣言传播的影响; 参数取值 $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, \delta = 0.36, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01$

Fig. 11. (a) Influence of different initial values of true information spreaders; (b) influence of different initial values of rumor spreaders on the rumor propagation. The parameter values are $\alpha_1 = 0.7, \beta = 0.9, \delta = 0.36, A = 0.2, \mu = 0.2, \theta = 0.01, \epsilon = 0.01$.

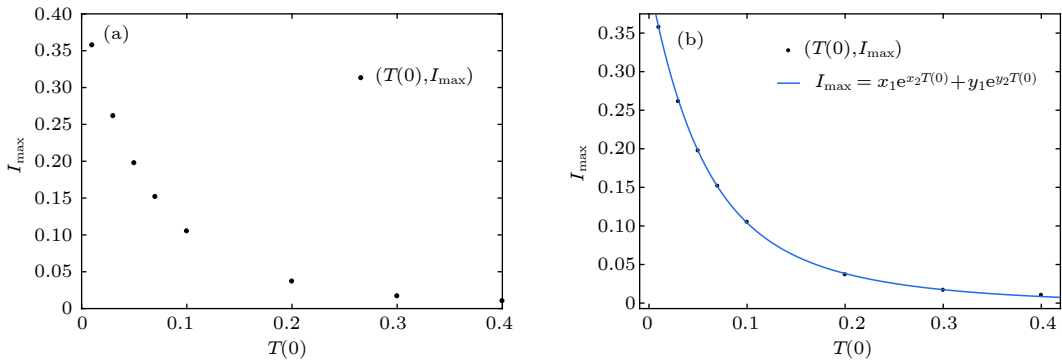


图 12 (a) $T(0)$ 与谣言传播者峰值 I_{\max} 的散点图; (b) 根据数据点拟合得到的曲线图

Fig. 12. (a) Scatter plot of $T(0)$ and the peak value I_{\max} of rumor spreaders; (b) the curve graph of fitting data points.

7 结 论

本文在谣言传播模型中加入真实信息的传播者 T , 构建了 SITR 谣言传播模型, 利用下一代矩阵得到了谣言传播的阈值 K_0 , 当 $K_0 < 1$ 时, 无谣言传播者无真实信息传播者平衡点存在, 且是局部渐近稳定的. 当 $K_1 > 1$ 时, 边界平衡点 E_1 存在, 若 $K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 成立, 则边界平衡点 E_1 是局部渐近稳定的. 当 $K_2 > 1$ 时, 边界平衡点 E_2 存在, 若 $K_1 < nK_2$ 成立, 则边界平衡点 E_2 是局部渐近稳定的. 当 $K_1 > m$, 且 $\frac{1}{n}K_1 < K_2 < \frac{K_1(\mu K_1 + \theta)}{\mu + \theta}$ 时, 两个边界平衡点同时稳定, 即系统出现双稳. 进一步得到了不同情形下正平衡点的存在性及其条件 (见表 1), 分析了正平衡点的稳定性. 最后通过数值模拟验证了理论结果, 且发现当真实信息传播者的初始值不同时, 谣言传播者的峰值是不相同的, 真实信息传播者的初始值越大谣言传播者的峰值

越小, 谣言灭绝时间越短等. 因此, 在谣言传播过程中, 通过对谣言传播模型的数学分析, 可以为有效降低谣言负面效应提供理论依据. 在谣言出现时, 当传播真实信息的人越多, 谣言的危害性会越低. 我们国家和政府要通过各种途径传播谣言的危害性, 加大宣传力度, 加强对民众的教育. 政府和相关部门要随时做好应急预案, 确保当谣言出现时, 以“最真信息、最快速度、最佳效果”为目标做好工作, 减少谣言传播给社会带来的危害.

系统 (2) 中考虑了人口的移入和移出, 所以人群构成的网络是一个动态网络, 即网络中的节点和连边都是实时变化的, 在动态网络中, 新进入网络的个体的连边数目的分布 (新个体的度分布) 以及新节点与网络中已有节点的连边机制 (随机连接、度优先连接、自适应连接等) 等都影响着网络结构的变化, 而网络结构又影响着网络上的传播过程, 目前, 网络动态的演化对网络上传染病的传播影响已有一些研究 [25–27]. 如果考虑网络结构, 需要考虑不同的新节点度分布, 和新节点与旧节点的连边机

制对网络结构的影响, 然后再考虑不同情况下谣言传播的动力学行为, 这是值得深入研究的内容, 下一步我们将做这些方面的研究.

参考文献

- [1] Daley D J, Kendall D G 1964 *Nature* **204** 1118
- [2] Sudbury A 1985 *J. Appl. Prob.* **22** 443
- [3] Zanette D H 2001 *Phys. Rev. E* **64** 050901
- [4] Zanette D H 2002 *Phys. Rev. E* **65** 041908
- [5] Nekovee M, Moreno Y, Bianconi G, Marsili M 2007 *Physica A* **374** 457
- [6] Moreno Y, Nekovee M, Pacheco A F 2004 *Phys. Rev. E* **69** 066130
- [7] Zhao L J, Wang J J, Chen Y C, Wang Q, Cheng J J, Cui H X 2012 *Physica A* **391** 2444
- [8] Zhao L J, Wang Q, Cheng J J, Chen Y C, Wang J J, Huang W 2011 *Physica A* **390** 2619
- [9] Deng S F, Li W 2017 *Phys. Rev. E* **95** 042306
- [10] Zan Y L, Wu J L, Li P, Yu Q L 2014 *Physica A* **405** 159
- [11] Wang Y Q, Yang X Y, Han Y L, Wang X A 2013 *Commun. Theor. Phys.* **59** 510
- [12] Yang L X, Zang T R, Yang X F, Wu Y B, Tang Y Y 2017 [arXiv: 1705.10618v1](https://arxiv.org/abs/1705.10618v1) [cs.SI]
- [13] He Z B, Cai Z P, Yu J G, Wang X M, Sun Y C, Li Y S 2017 *IEEE. T. Veh. Technol.* **66** 2789
- [14] Huo, Liang'an, Wang L, Song N X, Ma C Y, He B 2017 *Physica A* **468** 855
- [15] Zhang Y H, Zhu J J 2018 *Physica A* **503** 862
- [16] Xiao Y P, Chen D Q, Wei S H, Li Q, Wang H H, Xu M 2019 *Nonlinear Dyn.* **95** 523
- [17] Gu Y R, Xia L L 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 238701 (in Chinese) [顾亦然, 夏玲玲 2012 物理学报 **61** 238701]
- [18] Wang H, Han J H, Deng L, Cheng K Q 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 110505 (in Chinese) [王辉, 韩江洪, 邓林, 程克勤 2013 物理学报 **62** 110505]
- [19] Zhang Y M, Su Y Y, Liu H O 2017 *J. Sys. Sci. Math. Scis.* **37** 1960 (in Chinese) [张亚明, 苏妍嫻, 刘海鸥 2017 系统科学与数学 **37** 1960]
- [20] Wan Y P, Zhang D G, Ren Q H 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 240501 (in Chinese) [万贻平, 张东戈, 任清辉 2015 物理学报 **64** 240501]
- [21] Ran M J, Liu C, Huang X Y, Liu X Y, Yang H Y, Zhang G J 2018 *J. Comput. Appl.* **38** 3312 (in Chinese) [冉茂洁, 刘超, 黄贤英, 刘小洋, 杨宏雨, 张光建 2018 计算机应用 **38** 3312]
- [22] Zhao M, Chen W X, Song Q K 2018 *Appl. Math. Mech.* **39** 1400 (in Chinese) [赵敏, 陈文霞, 宋乾坤 2018 应用数学和力学 **39** 1400]
- [23] Driessche P, Watmough J 2002 *Math. Biosci.* **180** 29
- [24] Routh E J 1877 *A Treatise on the Stability of Given State of Motion* (London: Macmillan) pp3–21
- [25] Jin Z, Sun G Q, Zhu H P 2014 *Math. Biosci. Eng.* **11** 1295
- [26] Yao Y R, Zhang J P 2016 *J. Biol. Syst.* **24** 577
- [27] Jing W J, Jin Z, Zhang J P 2018 *J. Biol. Dynam.* **12** 486

Dynamic analysis of rumor propagation model based on true information spreader*

Zhang Ju-Ping¹⁾²⁾ Guo Hao-Ming¹⁾²⁾ Jing Wen-Jun¹⁾²⁾ Jin Zhen^{1)2)†}

1) (*Complex Systems Research Center, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Shanxi Key Laboratory of Mathematical Techniques and Big Data Analysis on Disease Control and Prevention, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 10 February 2019; revised manuscript received 5 May 2019)

Abstract

In the process of rumor propagation, people who know the truth or judge the truth can spread true information about rumors. Therefore, on the rumor propagation, it is significant to introduce the spreaders who spread true information in the rumor propagation. But the previous studies did not take into consideration the influence of true information spreading on the rumor propagation. In this paper, the susceptible-infective-true-removed (SITR) rumor propagation model with the true information spreader and the forgetting factor of rumors is established. The threshold K_0 is obtained by using the method of the next generation matrix. If $K_0 < 1$, the balance between no rumor and no true information spreader is locally asymptotically stable. The existence and stability of two boundary balance (that is, there are rumor spreaders but no true information spreaders, and there are no rumor spreaders but true information spreaders) are proved. The bistable region of two-boundary balance is given. Further, under different conditions we obtain the existence and locally asymptotical stability of positive balance (rumor spreaders and true information spreaders coexist). Finally, the theoretical results are verified by numerical simulations. We find that the initial value of the true information spreaders affects the peak value of the rumor spreaders and the duration of the rumor. The bigger the initial value of the true information spreaders, the smaller the peak value of the rumor spreaders is and the shorter the duration of the rumor is. The initial value of the rumor spreaders affects the peak value of the rumor spreaders, and the time when the rumor spreaders reach the peak value. The larger the initial value of the rumor spreaders, the larger the peak value of the rumor spreaders is and the earlier the peak value appears. But the initial value of the rumor spreaders does not affect the duration of the rumor. Therefore, in the process of rumor propagation, according to mathematical analysis of the rumor propagation model, we find that the rumor spread is a very complicated process. The results of mathematical analysis can provide theoretical basis to control the rumor propagation and reduce the negative effects of rumors.

Keywords: rumor propagation, true information, threshold, equilibrium

PACS: 05.10.-a, 87.23.Ge, 89.75.Fb

DOI: 10.7498/aps.68.20190191

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61873154, 11601294) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant Nos. 201801D121008, 201801D121206).

† Corresponding author. E-mail: jinzhn@263.net