

一类扰动Kadomtsev–Petviashvili方程的雅可比椭圆函数解的收敛性探讨

焦小玉 贾曼 安红利

Convergence for Jacobi elliptic function series solutions to one kind of perturbed Kadomtsev–Petviashvili equations

Jiao Xiao-Yu Jia Man An Hong-Li

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 140201 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190333

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190333>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

各向异性海森伯自旋链中的超椭圆函数波解

Wave solitons of hyper-elliptic function in anisotropic Heisenberg spin chain

物理学报. 2018, 67(19): 197502 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181005>

一类高阶非线性波方程的李群分析、最优系统、精确解和守恒律

Lie symmetry analysis, optimal system, exact solutions and conservation laws of a class of high-order nonlinear wave equations

物理学报. 2016, 65(14): 140201 <https://doi.org/10.7498/aps.65.140201>

一类非线性发展方程的复合型双孤子新解

New complexion two-soliton solutions of a class of nonlinear evolution equation

物理学报. 2015, 64(2): 020201 <https://doi.org/10.7498/aps.64.020201>

两能级原子主方程和激光通道主方程的解之间的超对称性

Supersymmetry of the solution to the master equation between two-level atom and laser channel

物理学报. 2016, 65(3): 030301 <https://doi.org/10.7498/aps.65.030301>

广义(3+1)维Zakharov–Kuznetsov方程的对称约化、精确解和守恒律

Symmetry reductions, exact equations and the conservation laws of the generalized (3+1) dimensional Zakharov–Kuznetsov equation

物理学报. 2017, 66(8): 080201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.080201>

一类多能级Rosen–Zener模型的精确解

Exact solution to a kind of multi-level Rosen–Zener models

物理学报. 2019, 68(13): 133201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190353>

一类扰动 Kadomtsev-Petviashvili 方程的雅可比椭圆函数解的收敛性探讨*

焦小玉^{1)†} 贾曼²⁾ 安红利³⁾

1) (南京财经大学应用数学学院, 南京 210023)

2) (宁波大学物理与技术学院, 宁波 315211)

3) (南京农业大学理学院, 南京 210095)

(2019年3月9日收到; 2019年5月12日收到修改稿)

为构造一类扰动 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程的级数解, 利用同伦近似对称法求出三种情形下具有通式形式的相似解以及相应的相似方程. 而且, 对于第三种情形下的前几个相似方程, 雅可比椭圆函数解亦遵循共同的表达式, 这可以产生形式紧凑的级数解, 从而为收敛性的探讨提供便利: 首先, 对于扰动 KP 方程的微扰项, 给定 u 关于变量 y 的导数阶数 n , 若 $n \leq 1$ ($n \geq 3$), 则减小 (增大) $|a/b|$ 致使收敛性改善; 其次, 减小 ε , $|\theta - 1|$ 以及 $|c|$ 均有助于改进收敛性. 在更一般情形下, 仅当微扰项的导数阶数为偶数时, 扰动 KP 方程才存在雅可比椭圆函数解.

关键词: 同伦近似对称法, 扰动 Kadomtsev-Petviashvili 方程, 级数解, 收敛性

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.68.20190333

1 引言

对于源于现实问题中各种现象的非线性方程, 人们通常研究其数值解. 除去数值解之外, 近似解析解也有助于非线性方程的研究. 非线性方程附加了微扰项则变成扰动非线性方程, 这类方程的近似解析解可以利用扰动理论^[1,2] 结合精确求解方法进行构造.

作为非线性方程的一类精确解析解, 群不变解可以通过李群或者李对称理论^[3,4] 中的经典或非经典李群法^[5]、李对称方法与直接法^[6] 进行求解. 这些方法通过减少自变量的个数实现偏微分方程的化简. 作为直接法的一种修正, 改进的直接法^[7,8] 貌似与李群理论无关, 但是却可以重构李对称群甚

至离散变换群.

经典李群法用于延拓方程组而不是原偏微分方程可以得到更多的约化, 非经典李群法实质为经典李群法应用于原偏微分方程与不变曲面条件组合成的延拓方程组. 延拓方程组也可以通过引入辅助变量并且将非局域对称局域化^[9] 而产生, 这套方案引领了诸如孤立子、cnoidal 周期波与 Painlevé 波等不同类型非线性波之间相互作用的研究^[10,11].

扰动理论和李群理论两种方式结合为近似对称法: Baikov 等^[12] 提出的近似对称法实际上是对称群的近似, 因为对称群生成元推广至扰动形式; 而 Fushchich 等^[13] 提出的近似对称法则是基于扰动方程近似子方程的精确对称. 文献^[14,15] 对两种方法进行了比较, 说明第二种方法优于第一种方法. 文献^[16,17] 进一步推广了第二种近似对称法,

* 国家自然科学基金 (批准号: 11505094, 11775116) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK20150984) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jiaoxiaoyu@nufe.edu.cn

得到了通式形式的约化方程. 第二种近似对称法甚至可以求出扰动非线性方程的级数解^[18]. 近似直接法^[16]改为利用直接法求解这些子方程, 则可以得到与近似对称法相同的约化结果.

扰动理论也可以结合同伦理论以产生同伦分析法^[19-21], 该方法通过将非线性方程分解为无穷多线性子方程实现非线性方程的化简与求解. 此方法适用于非扰动方程, 因而较扰动理论优越, 甚至能够求出扰动方法、人工参数法^[22]、 δ 扰动展开法^[23]以及 Adomian 分解法^[24]求解的级数解.

若近似对称法引入同伦, 则同伦分析法的诸多优点能够得以保留, 产生的同伦近似对称法^[25]与同伦分析法的主要区别在于, 同伦近似对称法将非线性方程分解为无穷多非线性子方程. 类似地, 同伦结合近似直接法可以得到同伦近似直接法^[26].

本文的主要目的是探讨扰动非线性方程的雅可比椭圆函数级数解的存在性以及收敛性. 在第 2 节, 对于具有相似微扰项的一类扰动 Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程, 根据同伦近似对称法, 无穷多约化方程以及约化解的通式形式得以构造. 前几个约化方程的雅可比椭圆函数解亦具有通式形式. 第 3 节主要涉及级数解的收敛性的讨论. 第 4 节是结论部分, 针对更加广泛的微扰项, 讨论了扰动 KP 方程雅可比椭圆函数级数解的存在性.

2 扰动 KP 方程的同伦近似对称

扰动 KP 方程形如

$\mathcal{A}(u) \equiv (u_t + 6uu_x + u_{x^3})_x + \alpha u_{yy} - \varepsilon E(u) = 0$, (1)
是通过如下 KP 方程^[27]添加微扰项 $\varepsilon E(u)$ 而产生的:

$$\mathcal{H}(u) \equiv (u_t + 6uu_x + u_{x^3})_x + \alpha u_{yy} = 0. \quad (2)$$

通常, 微扰项的补充可以使模型方程对实际问题的刻画更为贴切. 为方便起见, 本文采用诸如 $u_{x^3} = u_{xxx}$ 的记号.

扰动 KP 方程的同伦模型

$$(1 - q)\mathcal{H}(u) + q(1 - \theta)\mathcal{A}(u) = 0, \quad (3)$$

在同伦参数 q 由 0 变到 1 时, 逐渐由 KP 方程转变为扰动 KP 方程, 这体现了由简单到复杂的渐变过程. 其中, $\theta \neq 1$ 是辅助参数. 暂取定一类特殊微扰项 $\varepsilon E(u) = \varepsilon u_{x^{6-n}y^n}$, ($n = 0, 1, \dots, 6$), 即因变量

关于空间变量 $\{x, y\}$ 的所有六阶导数. 关于同伦参数 q 的级数展开

$$u = \sum_{k=0}^{\infty} u_k q^k, \quad (4)$$

可以将该同伦模型分解为一系列近似子方程

$$\begin{aligned} & \left(u_{k,t} + 6 \sum_{i=0}^k u_{k-i} u_{i,x} + u_{k,x^3} \right)_x + \alpha u_{k,yy} \\ & + \varepsilon (\theta - 1) \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} u_{i,x^{6-n}y^n} = 0, \\ & (k = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (5)$$

其中 $u_{-1} = 0$. 本文所有负指标量均取 0. 这些近似子方程的线性化方程为

$$\begin{aligned} & \left[\sigma_{k,t} + 6 \sum_{i=0}^k (\sigma_{k-i} u_{i,x} + u_{k-i} \sigma_{i,x}) + \sigma_{k,x^3} \right]_x \\ & + \alpha \sigma_{k,yy} + \varepsilon (\theta - 1) \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} \sigma_{i,x^{6-n}y^n} = 0, \\ & (k = 0, 1, \dots), \end{aligned} \quad (6)$$

其中函数形式的点对称为

$$\sigma_k = X u_{k,x} + Y u_{k,y} + T u_{k,t} - U_k, \quad (k = 0, 1, \dots), \quad (7)$$

其中 $\{X, Y, T, U_k (k = 0, 1, \dots)\}$ 的变量为 $\{x, y, t, u_k (k = 0, 1, \dots)\}$.

(5) 式—(7) 式联立用于决定 $\{X, Y, T, U_k\}$ ($k = 0, 1, \dots$). 取定 n , 将 (7) 式代入 (6) 式, 利用 (5) 式消去 $u_{k,xt}$, 并且将 u_k 的所有导数系数取 0, 得到关于 $\{X, Y, T, U_k (k = 0, 1, \dots)\}$ 的无数方程组成的决定方程组. 为简化求解, 仅考虑 (5) 式的前几个方程. 例如限定 (5) 式中的 k 的范围 $k \in \{0, 1, 2\}$. 易知 $\{X, Y, T, U_0, U_1, U_2\}$ 的变量减少为 $\{x, y, t, u_0, u_1, u_2\}$, 尝试不同的 n 的取值, 反复求解决定方程组, 可以推断决定方程组的解形如

$$\begin{aligned} X &= C_1 x + 6f(t), \quad Y = 2C_1 y + C_3, \quad T = 3C_1 t + C_2, \\ U_k &= C_1 [(n+2)(k-1)\theta u_{k-1} - ((n+2)k+2)u_k \\ & + \delta_{k,0} f'(t)], \quad (k = 1, 2, \dots), \end{aligned} \quad (8)$$

其中, C_1, C_2 都是任意常数; $f(t)$ 是关于 t 的任意函数. 满足 $\delta_{0,0} = 1$ 以及 $\delta_{k,0} = 0, (k \neq 0)$ 的记号 $\delta_{i,j}$ 亦适用于下文. 令 (7) 式中的所有 σ_k 取 0, 求解相应的特征方程, 则可以确定 (5) 式的相似解.

情形 1: 当 $C_1 \neq 0$ 时, 不失一般性, 做变换 $C_2 \mapsto C_1 a$, $C_3 \mapsto C_1 b$, $f(t) \mapsto C_1 f(t)$, 使得如下的相似解不会出现 C_1

$$u_k = \sum_{i=0}^{k-1} \frac{\binom{k-1}{i} \theta^{k-1-i} P_{i+1}(\xi, \eta)}{(3t+a)^{\frac{1}{3}[(n+2)i+(n+4)]}} + \delta_{k,0} \left(\frac{f(t)}{3t+a} + \frac{R(t) + P_0(\xi, \eta)}{(3t+a)^{\frac{2}{3}}} \right),$$

$$\xi = \frac{x}{(3t+a)^{\frac{1}{3}}} - 6R(t), \quad \eta = \frac{2y+b}{2(3t+a)^{\frac{2}{3}}},$$

$$R(t) = \int \frac{f(t)}{(3t+a)^{\frac{4}{3}}} dt, \quad (9)$$

此时, (5) 式约化为统一形式

$$\left[P_{k,\xi^3} - 2\eta P_{k,\eta} - [(n+2)k+3] P_k + 6 \sum_{i=0}^k P_{i,\xi} P_{k-i} \right]_{\xi} - \xi P_{k,\xi\xi} + \alpha P_{k,\eta\eta} + \varepsilon(\theta-1) P_{k-1,\xi^{(6-n)}\eta^n} = 0. \quad (10)$$

$$\left(6\alpha f(t) P_{k,\xi} + \frac{a^4}{216f^3(t)} P_{k,\xi^3} - \frac{af'(t)}{f(t)} P_k - aP_{k,t} + \frac{a^2}{f(t)} \sum_{i=0}^k P_{i,\xi} P_{k-i} \right)_{\xi} + \delta_{k,0} f''(t) + \frac{(-1)^n a^{(6-n)} (\theta-1) \varepsilon}{(6f(t))^{(5-n)}} \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} P_{i,\xi^6} = 0. \quad (14)$$

若指标 k 给定, 且 $\{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}\}$ 已知, 以上三种情况的相似方程显然是关于 P_k 的四阶偏微分方程.

考虑 (14) 式中约化方程的诸如雅可比椭圆函数形式的特解, 做出假设

$$P_k = \sum_{i=0}^{n_k} f_{k,i}(\xi, t) \operatorname{sn}^i(g(\xi, t), m), \quad (15)$$

其中 $\{f_{k,i}, g\}$ 是关于所含变量的待定函数. 所有 $f_{k,i}$ 都不是 $\{\operatorname{sn}^i(g(\xi, t), m), i=0, 1, 2, \dots\}$ 的线性组合. 由于 (14) 式中的系数包含 $f(t)$ 及其导数, 所以这些系数的化简可以通过假设 $f(t)$ 为一个常数 b 实现. 此时, 这些系数退化为常数.

类似文献 [18] 中关于各阶约化方程的求解过程, (15) 式中 P_k 的确定也是通过分步求解过程实现的. 在第 k 步中, 将已知解 $\{P_0, P_1, \dots, P_{k-1}\}$ 以及未知解 P_k 代入 (14) 式中的 k 阶方程, 再取所有

情形 2: 当 $C_1 = 0, C_2 \neq 0$ 时, 不失一般性, 做变换 $C_3 \mapsto C_2 a$, $f(t) \mapsto C_2 f(t)$, 求解特征方程, 可以得出相似解

$$u_k = f(t) \delta_{k,0} + P_k(\xi, \eta),$$

$$\xi = x - 6 \int f(t) dt, \quad \eta = y - at, \quad (11)$$

此时, (5) 式约化为统一形式

$$\left(P_{k,\xi^3} - aP_{k,\eta} + 6 \sum_{i=0}^k P_{i,\xi} P_{k-i} \right)_{\xi} + \alpha P_{k,\eta\eta} + \varepsilon(\theta-1) \sum_{i=0}^{k-1} \theta^{k-1-i} P_{i,\xi^{(6-n)}\eta^n} = 0. \quad (12)$$

情形 3: 当 $C_1 = 0, C_2 = 0, C_3 \neq 0$ 时, 将 C_3 改写为 a , 可得相似解

$$u_k = \frac{f'(t)x}{6f(t)} \delta_{k,0} + P_k(\xi, t), \quad \xi = y - \frac{ax}{6f(t)}, \quad (13)$$

此时, (5) 式约化为统一形式

含有 $\{\operatorname{sn}(g(\xi, t), m), \operatorname{cn}(g(\xi, t), m), \operatorname{dn}(g(\xi, t), m)\}$ 的各项系数为 0, 则可以得到 (15) 式中各项系数 $f_{k,i}(\xi, t)$ 的方程组. 通过求解这些方程组, 再回代入 (15) 式, 即可得到约化方程 (14) 中的前几个方程的雅可比椭圆函数解 (见附录).

若继续求解 (14) 式中的约化方程, 则可以求出 $\{P_4, P_5, P_6, \dots\}$ 等更多的解. 易知每个 P_k 都是 k 项 $\{\operatorname{sn}^l(c\xi + h, m), l=0, 2, 4, \dots, 2(k+1)\}$ 的线性组合. 当 k 增加时, P_k 表达式中的线性组合系数的复杂程度迅速增加.

3 扰动 KP 方程的级数解

在 $q=1$ 条件下, 将 (13) 式以及附录中的雅可比椭圆函数解代入 (4) 式, 提取关于 $\operatorname{sn}(c\xi + h, m)$ 的不同幂次的系数, 可以将级数解重新表示为如下紧凑形式

$$u = \frac{b}{a} \frac{h_t}{c} - 6\alpha \left(\frac{b}{a}\right)^2 + c^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{sn}^{2k}(c\xi + h, m),$$

$$A_k = \sum_{i=\max\{k,1\}}^{\infty} (a_{k,i}\theta + b_{k,i}) [c^2 \varepsilon (\theta - 1)]^{(i-1)} \times [a/(6b)]^{[(2-n)i+n]}, \quad (16)$$

其中 $a_{k,i}$ 与 $b_{k,i}$ 只包含常数 m . 容易验证, 若 $\theta = 0$, 该级数解一定是近似对称法所得级数解.

已知每个雅可比椭圆函数取值于区间 $[-1, 1]$, 所以, 为了确保 (16) 式的收敛性, 须满足 $\lim_{k \rightarrow \infty} |A_k| = 0$. 显而易见, 当 k 增加时, 减小 ε , $|\theta - 1|$ 或者 $|c|$ 有助于减小 $|A_k|$. 任意常数 a 和 b 对于收敛性的影响需另当别论. 尤其需要注意 A_k 之中 $[a/(6b)]^{[(2-n)i+n]}$ 的幂次 $[(2-n)i+n]$. 当 $n \geq 3$ 时, 对于 $i \geq k$ 有 $(2-n)i < 0$, 仅当 $|a/(6b)| > 1$ 时, $\lim_{i \rightarrow \infty} [a/(6b)]^{[(2-n)i+n]} = 0$ 成立, 此时增大 $|a/b|$ 可改善收敛性; 当 $n = 2$ 时, $(2-n)i + n = 2$. 任意常数 a 和 b 与收敛性之间没有明显关系; 当 $n \leq 1$ 时, $(2-n)i > 0$. 仅当 $|a/6b| < 1$ 时, $\lim_{i \rightarrow \infty} (a/6b)^{[(2-n)i+n]} = 0$ 成立. 此时, 减小 $|a/b|$ 改善收敛性.

当 $t = 0$ 且 $y = 0$ 时, 取 $\alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1$ 以及 $\varepsilon = 0.1$, 在图 1—图 4 中对截断级数解关于变量 x 做图, 这些图可以说明辅助参数 θ 与比值 $|a/b|$ 如何影响级数解的收敛性. 实线、虚线、点线、点划线分别表示 k 取值 $\{0, 1, 2, 3\}$ 情形下的级数解 $\sum_{i=0}^k u_k$. 在这些截线图, 相邻曲线之间相对距离的变化趋势可用于研究级数解的收敛性. 当 k 增加时, 若相邻曲线之间的相对距离显著减少, 则收敛性得以保证, 相应区域可视为收敛域. 从这些截线图容易看出, 相邻曲线之间最大相对距离的区域恰好是波峰与波谷区域. 发散区域可以从波峰与波谷区域中寻找.

图 1—图 4 中的每个子图 (a), (b), (c), (d) 分别对应参数 θ 取值 0.90, 0.99, 1.01, 1.10. 图 1 和图 2 取值 $n = 1$, 而图 3 和图 4 取值 $n = 3$. 图 1 和图 3 取定 $a = 2b$, 而图 2 和图 4 取定 $a = b/2$. 从每个图的各个子图之间的比较易知, $\theta = 0.99$ 以及 $\theta = 1.01$ 两种情形的级数解的收敛性明显强于 $\theta = 0.90$ 以及 $\theta = 1.10$ 两种情形. 于是, 辅助参数愈接近 1, 级数解的收敛性愈好.

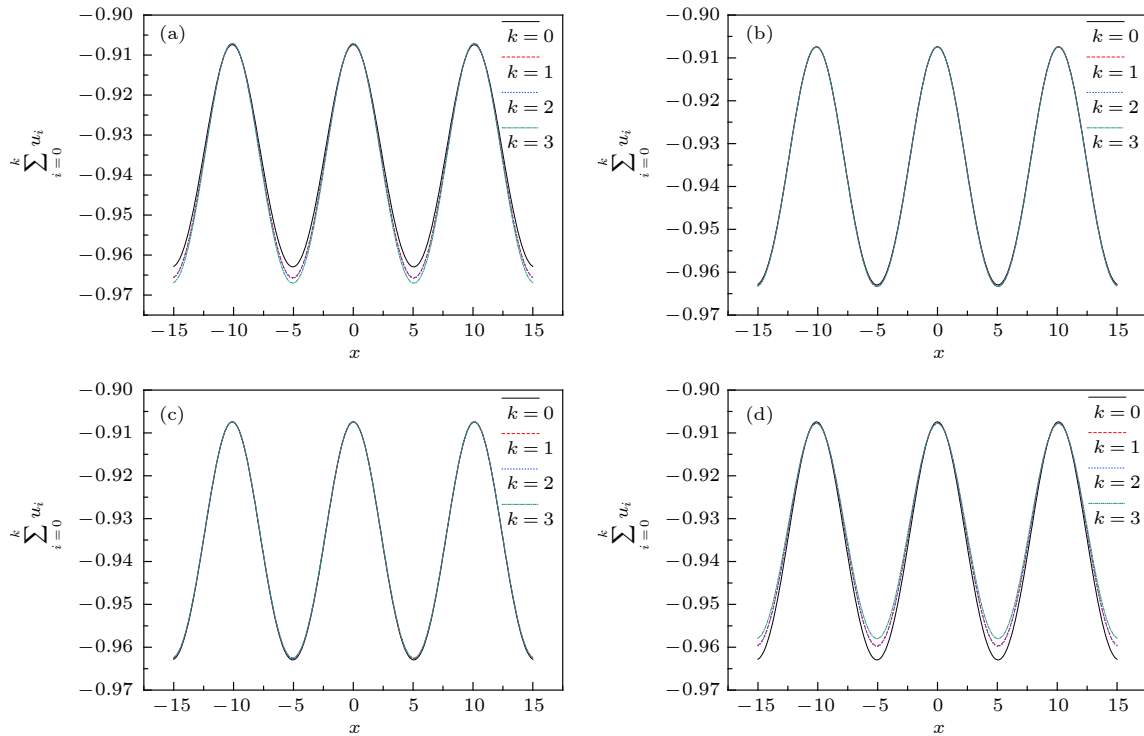


图 1 当 $n = 1, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = 2b$ 并且 $t = 0, y = 0$ 时, 截断级数解 $\sum_{i=0}^k u_k (k = 0, 1, 2, 3)$ 的截线图
 Fig. 1. Transversals of truncated series solution $\sum_{i=0}^k u_k$ for $(k = 0, 1, 2, 3)$ when $n = 1, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = 2b$ and $t = 0, y = 0$.

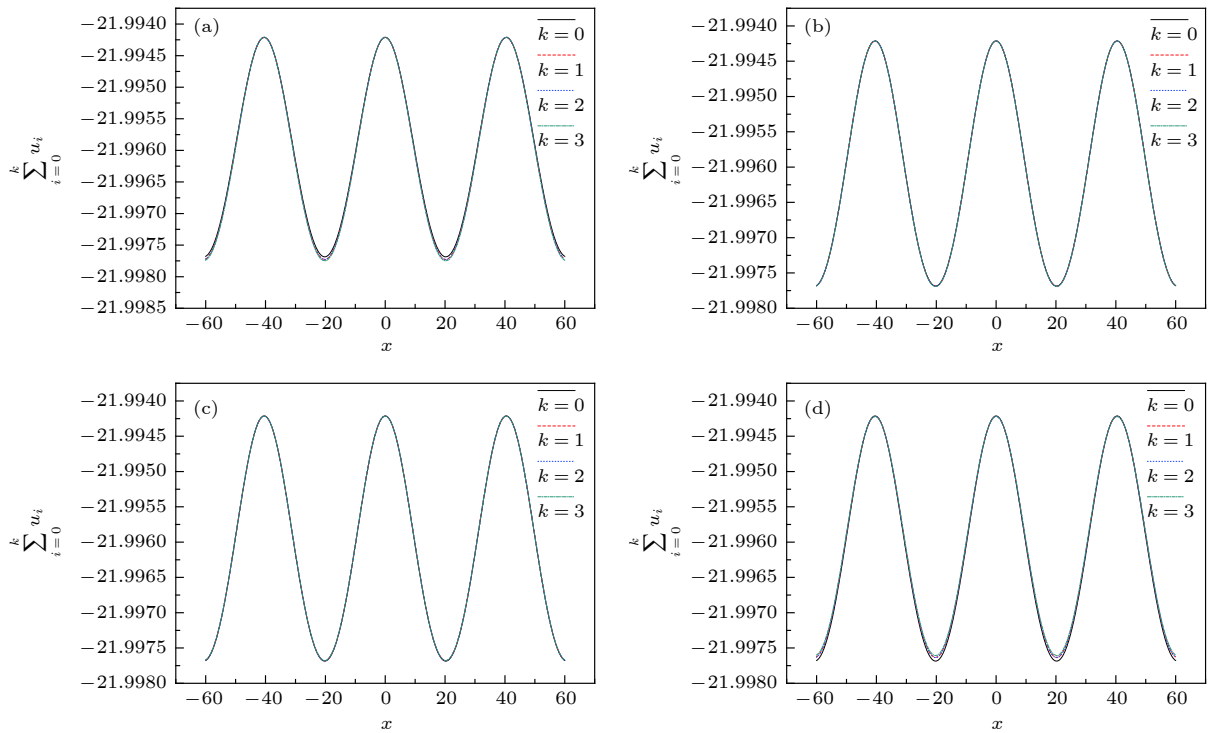


图 2 当 $n = 1, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = b/2$ 并且 $t = 0, y = 0$ 时, 截断级数解 $\sum_{i=0}^k u_k (k = 0, 1, 2, 3)$ 的截线图
 Fig. 2. Transversals of truncated series solution $\sum_{i=0}^k u_k$ for $(k = 0, 1, 2, 3)$ when $n = 1, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = b/2$ and $t = 0, y = 0$.

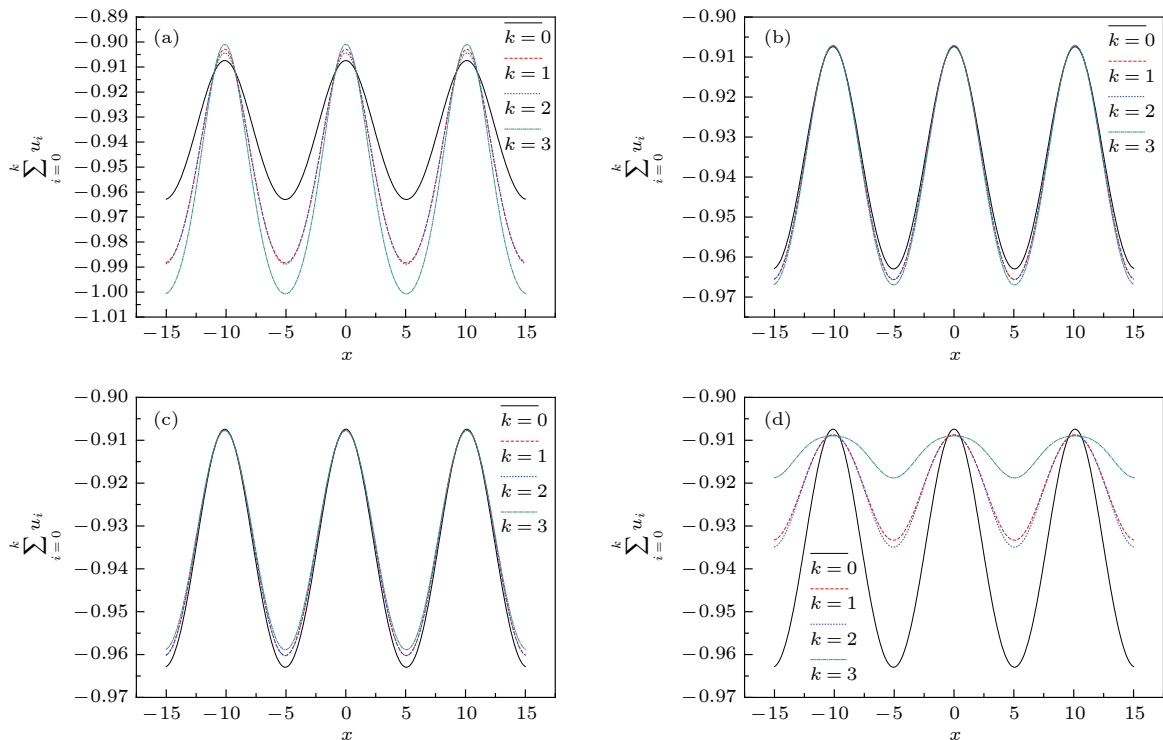


图 3 当 $n = 3, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = 2b$ 并且 $t = 0, y = 0$ 时, 截断级数解 $\sum_{i=0}^k u_k (k = 0, 1, 2, 3)$ 的截线图
 Fig. 3. Transversals of truncated series solution $\sum_{i=0}^k u_k$ for $(k = 0, 1, 2, 3)$ when $n = 3, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = 2b$ and $t = 0, y = 0$.

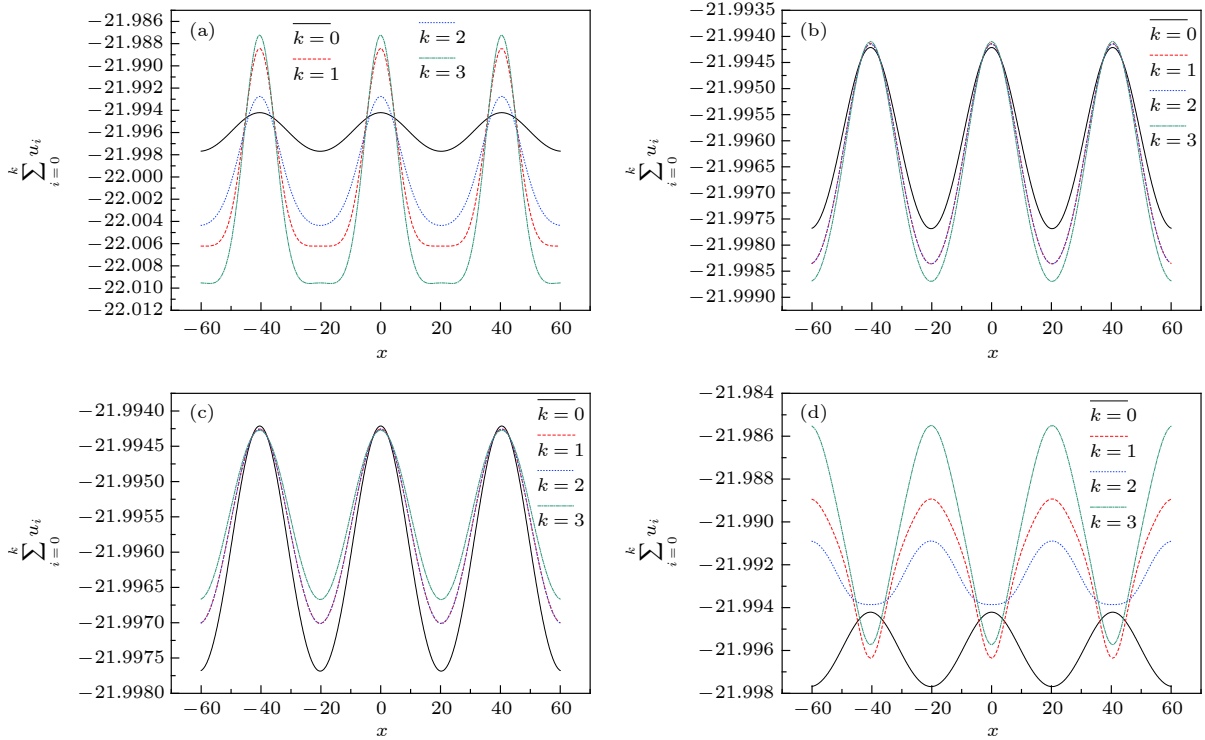


图 4 当 $n = 3, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = b/2$ 并且 $t = 0, y = 0$ 时, 截断级数解 $\sum_{i=0}^k u_k (k = 0, 1, 2, 3)$ 的截线图
 Fig. 4. Transversals of truncated series solution $\sum_{i=0}^k u_k$ for $(k = 0, 1, 2, 3)$ when $n = 3, \alpha = 1, h(t) = t, m = 0.5, c = 1, \varepsilon = 0.1, a = b/2$ and $t = 0, y = 0$.

图 1 和图 2 的唯一区别是常数 a 和 b . 比较图 1 和图 2 的对应图形可得, $a = b/2$ 情形的收敛性强于 $a = 2b$ 情形. 同样方式, 图 3 和图 4 的唯一区别也是常数 a 和 b . 比较图 3 和图 4 的对应图形可得, $a = 2b$ 情形的收敛性强于 $a = b/2$ 情形. 由于图 1 和图 2 区别于图 3 和图 4 之处仅是微扰项中 n 关于变量 y 的导数阶数 n , 这也可以说明, 若 $n \leq 1$, $|a/b|$ 取值越小收敛性越好; 若 $n \geq 3$, $|a/b|$ 取值越大收敛性越好.

观察级数解 (16) 的表达式, A_k 中的 $[c^2\varepsilon(\theta - 1)]^{i-1}$ 表明, 满足 $|c^2\varepsilon(\theta - 1)| < 1$ 且减小 $|c^2\varepsilon(\theta - 1)|$ 可以改善级数解的收敛性. 减小 $c^2, \varepsilon, |\theta - 1|$ 对收敛性的改善效果基本相同, 但是三者应区分对待. 首先, 扰动参数 ε 是小参数, 表明实际问题中微扰因素的强弱, 具体取值取决于实际问题. 其次, 在同伦模型 (3) 式中, θ 越接近 1, 该模型越接近 KP 方程而不是扰动 KP 方程, 从而级数解 (16) 式更好地刻划 KP 方程而不是扰动 KP 方程. 最后, 减小 $|c|$ 有利于改善收敛性, 但是, $|c|$ 并不是越小越好, 顾及 (13) 式中的相似变量 $\xi = y - \frac{ax}{6f(t)}$ 和 $f(t) = b$, 级数解 (16) 式可以化为

$$u = \frac{b}{a} \frac{h_t}{c} - 6\alpha \left(\frac{b}{a}\right)^2 + c^2 \sum_{k=0}^{\infty} A_k \text{sn}^{2k} \left(cy - \frac{acx}{6b} + h, m \right). \quad (17)$$

c 的取值对级数解的形态有很大影响: 第一, 减小 $|c|$ 致使级数解的周期变大, 波动愈加平缓; 第二, 减小 $|c|$ 时, $(b/a)(h_t/c)$ 会使级数解急剧增加或减小, 级数项的系数 c^2 会使级数解急剧减小. 所以, 减小 $|c|$ 也应适度. 此外, 此级数解也表明: 减小 $|a/b|$ 致使 x 轴方向周期变大.

4 总结与讨论

总之, 对于微扰项为 $\varepsilon E(u) = \varepsilon u_{x^{6-n}y^n}$, ($n = 0, 1, \dots, 6$) 的一类扰动 KP 方程, 同伦近似对称法可以求出无穷多相似方程和对应相似解的通式. 通过分步求解的方法可以求解前几个相似方程的雅可比椭圆函数解, 值得注意的是, 这些雅可比椭圆函数解亦具有通式形式.

换作更一般的微扰项 $\varepsilon E(u) = \varepsilon u_{x^p-n}y^n$, ($p \geq 6, n = 0, 1, \dots, p$), 同伦近似对称法亦适用. 通过关于 p 以及 n 不同取值的反复计算, 可以发现, 相似解 (11) 式和 (13) 式仍然有效. 而且, 近似

方程、相似方程以及相应的相似解都具有通式形式. 然而, 仅当 p 为偶数时, 才可以解出约化方程的雅可比椭圆函数解. 并且, 这些雅可比椭圆函数解亦具有类似附录中雅可比椭圆函数解的通式形式, 从而得出原扰动 KP 方程的级数解. 所以, p 为偶数时扰动 KP 方程 (1) 的可解性强于 p 为奇数时的情况. 在某种程度上, 扰动非线性方程是否有雅可比椭圆函数 (或双曲正切函数) 形式的级数解可用于可解性优劣的判定, 从而确立为原扰动方程可解性的一个判断依据. 关于可解性的全面的讨论

见文献 [28].

级数解的收敛性依赖于任意常数 $\{a, b, c\}$, 扰动参数 ε 以及辅助参数 θ . 然而, 任意常数 $\{a, b, c\}$ 的调整会导致级数解的周期随之显著变化. 所以, 减小扰动参数 ε 是改进收敛性最便捷最有效的手段. 不同于任意常数 $\{a, b, c\}$, 调整扰动参数不会显著影响级数解的形态.

附录 (14) 式的雅可比椭圆函数解

$$\begin{aligned}
 P_0 &= \frac{1}{54} \left(\frac{a}{b}c\right)^2 (1+m^2) + \frac{b}{a} \frac{h_t}{c} - 6\alpha \left(\frac{b}{a}\right)^2 - \frac{1}{18} \left[\frac{a}{b}cm\operatorname{sn}(c\xi+h, m)\right]^2, \\
 P_1 &= (-1)^n c^4 \varepsilon (\theta-1) \left(\frac{a}{6b}\right)^{(4-n)} \left[30m^4 \operatorname{sn}^4(c\xi+h, m) - 20m^2 (1+m^2) \operatorname{sn}^2(c\xi+h, m) + \frac{2}{3} (-4m^4 + 19m^2 - 4)\right], \\
 P_2 &= 30m^2 c^4 \varepsilon^2 (\theta-1)^2 \left(\frac{a}{6b}\right)^{(6-2n)} \left[-31c^2 m^4 \operatorname{sn}^6(c\xi+h, m) + m^2 \left(31c^2 (1+m^2) + \left(-\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{\theta}{\varepsilon(\theta-1)}\right)\right. \\
 &\quad \times \operatorname{sn}^4(c\xi+h, m) - \left(c^2 (29m^2 + 2m^4 + 2) + \left(\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{2(-1)^n \theta (1+m^2)}{3\varepsilon(\theta-1)}\right) \operatorname{sn}^2(c\xi+h, m) + c^2 (1+m^2) \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{(-1)^{(n-1)} \theta (4m^4 - 19m^2 + 4)}{45m^2 \varepsilon (\theta-1)}\right], \\
 P_3 &= \frac{1}{6} m^2 c^4 \varepsilon^3 (\theta-1)^3 \left(\frac{a}{6b}\right)^{(8-3n)} \left[297972(-1)^n c^4 m^6 \operatorname{sn}^8(c\xi+h, m) \right. \\
 &\quad + m^4 c^2 \left(397296(-1)^{(n-1)} c^2 (1+m^2) - \left(\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{11160\theta}{\varepsilon(\theta-1)}\right) \operatorname{sn}^6(c\xi+h, m) \\
 &\quad + m^2 \left(72(-1)^n c^4 (1753m^4 + 6524m^2 + 1753) + \left(\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{11160c^2 \theta (1+m^2)}{\varepsilon(\theta-1)} + \left(\frac{a}{6b}\right)^{2(n-2)} \frac{180(-1)^n \theta^2}{\varepsilon^2(\theta-1)^2}\right) \\
 &\quad \times \operatorname{sn}^4(c\xi+h, m) + \left(\left(\frac{a}{6b}\right)^{2(n-2)} \frac{120(-1)^{(n-1)} \theta^2 (1+m^2)}{\varepsilon^2(\theta-1)^2} - \left(\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{360c^2 \theta (2m^4 + 29m^2 + 2)}{\varepsilon(\theta-1)}\right. \\
 &\quad \left. + 144(-1)^{(n-1)} c^4 (1+m^2) (103m^4 + 619m^2 + 103)\right) \operatorname{sn}^2(c\xi+h, m) + 36(-1)^n c^4 (206m^4 - 77m^2 + 206) \\
 &\quad \left. + \left(\frac{a}{6b}\right)^{(n-2)} \frac{360c^2 \theta (1+m^2)}{\varepsilon(\theta-1)} + \left(\frac{a}{6b}\right)^{2(n-2)} \frac{4(-1)^{(n-1)} \theta^2 (4m^4 - 19m^2 + 4)}{m^2 \varepsilon^2(\theta-1)^2}\right],
 \end{aligned} \tag{A1}$$

其中 c 为任意常数.

参考文献

- [1] Cole J D 1968 *Perturbation Methods in Applied Mathematics* (Waltham: Blaisdell)
- [2] Van Dyke M 1975 *Perturbation Methods in Fluid Mechanics* (Stanford: Parabolic Press)
- [3] [Bluman G W, Kumei S 1989 *Symmetries and Differential Equations* (Berlin: Springer)]
- [4] Olver P J 1993 *Applications of Lie Group to Differential Equations* (2nd ed.) (New York: Springer)
- [5] Bluman G W, Cole J D 1969 *J. Math. Mech.* **18** 1025
- [6] Clarkson P A, Kruskal M D 1989 *J. Math. Phys.* **30** 2201
- [7] Lou S Y, Ma H C 2005 *J. Phys. A, Math. Gen.* **38** L129
- [8] Lou S Y, Jia M, Tand X Y, Huang F 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056318
- [9] Lou S Y, Hu X R, Chen Y 2012 *J. Phys. A: Math. Theor.* **45** 155209
- [10] Cheng X P, Lou S Y, Chen C L, Tang X Y 2014 *Phys. Rev. E* **89** 043202
- [11] Chen J C, Xin X P, Chen Y 2014 *J. Math. Phys.* **55** 053508
- [12] Baikov V A, Gazizov R K, Ibragimov N H 1988 *Mat. Sb.* **136** 435(English Transl. in 1989 *Math. USSR Sb.* **64** 427)
- [13] Fushchich W I, Shtelen W M 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** L887
- [14] Pakdemirli M, Yurusoy M, Dolapci I T 2004 *Acta Appl. Math.* **80** 243
- [15] Wiltshire R 2006 *J. Comput. Appl. Math.* **197** 287
- [16] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y 2008 *J. Math. Phys.* **49** 093505
- [17] Jia M, Wang J Y, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 020201
- [18] Jiao X Y 2018 *Chin. Phys. B* **27** 100202

- [19] Liao S J 1999 *Int. J. Non-Linear Mech.* **34** 759
 [20] Liao S J 1999 *Int. J. Non-linear Dynam.* **19** 93
 [21] Liao S J 2002 *J. Fluid Mech.* **453** 411
 [22] Lyapunov A M 1992 *General Problem on Stability of Motion (English translation)* (London: Taylor and Francis) p29
 [23] Karmishin A V, Zhukov A I, Kolosov V G 1990 *Methods of Dynamics Calculation and Testing for Thin Walled Structures* (Moscow: Mashinostroyeniye) (in Russian) p52
 [24] Adomian G 1994 *Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method* (Boston and London: Kluwer Academic Publishers)
 [25] Jiao X Y, Gao Y, Lou S Y 2009 *Sci. China Ser. G. Phys. Mech. Astron.* **39** 964 (in Chinese) [焦小玉, 高原, 楼森岳 2009 中国科学 G辑: 物理学 力学 天文学 **39** 964]
 [26] Jiao X Y, Yao R X, Lou S Y 2009 *Chin. Phys. Lett.* **26** 040202
 [27] Kadomtsev B B, Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys.: Dokl.* **15** 539
 [28] Lou S Y 2015 *Stud. Appl. Math.* **134** 372

Convergence for Jacobi elliptic function series solutions to one kind of perturbed Kadomtsev-Petviashvili equations*

Jiao Xiao-Yu^{1)†} Jia Man²⁾ An Hong-Li³⁾

1) (School of Applied Mathematics, Nanjing University of Finance and Economics, Nanjing 210023, China)

2) (Faculty of Physics and Technology, Ningbo University, Ningbo 315211, China)

3) (College of Sciences, Nanjing Agricultural University, Nanjing 210095, China)

(Received 9 March 2019; revised manuscript received 12 May 2019)

Abstract

This paper is devoted to constructing series solutions to one kind of perturbed Kadomtsev-Petviashvili (KP) equations, of which the perturbation terms are of all six-order derivatives of space variable x and y . First, by making the series solutions expansion with respect to the homotopy parameter q , the homotopy model of the perturbed KP equations can be decomposed into infinite number of approximate equations of the general form. Second, Lie symmetry method is applied to these approximate equations to achieve similarity solutions and the related similarity equations with common formulae in three cases. Third, for the first few similarity equations in the third case, Jacobi elliptic function solutions are constructed through a step-by-step procedure and are also subject to common formulae for each equation of the whole kind of perturbed KP equations. Finally, one kind of compact series solutions for the original perturbed KP equations is obtained from these Jacobi elliptic function solutions. The convergence of these series solution is dependent on perturbation parameter ϵ , auxiliary parameter θ and arbitrary constants $\{a, b, c\}$, among which the most prominent is decreasing arbitrary constant c or perturbation parameter ϵ . For the perturbation term in perturbed KP equations, given the derivative order n of u with respect to y , smaller (greater) $|a/b|$ causes the improved convergence provided $n \leq 1$ ($n \geq 3$). Nonetheless, the decrease of arbitrary constant $|c|$ or $|a/b|$ leads to the enlargement of period in a certain direction and thus should be specified appropriately. This paper also considers the perturbed KP equations with more general perturbation terms. Only if the derivative order of the perturbation term is an even number, do Jacobi elliptic function series solutions exist for perturbed KP equations. The existence of series solutions can serve as a criterion of solvability for perturbed equations.

Keywords: approximate homotopy symmetry method, perturbed Kadomtsev-Petviashvili equation, series solutions, convergence

PACS: 02.30.Jr, 02.30.Ik, 05.45.Yv

DOI: 10.7498/aps.68.20190333

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11505094, 11775116) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20150984).

† Corresponding author. E-mail: jiaoxiaoyu@mufe.edu.cn