

## 双气泡振子系统的非线性声响应特性分析

莫润阳 王成会 胡静 陈时

### Nonlinear acoustic response of two bubble oscillators

Mo Run-Yang Wang Cheng-Hui Hu Jing Chen Shi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 144302 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190408

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190408>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

低频超声空化场中柱状泡群内气泡的声响应

Acoustic response of bubbles inside a cylindrical cavitation bubble cluster generated by low-frequency ultrasound

物理学报. 2016, 65(14): 144301 <https://doi.org/10.7498/aps.65.144301>

球状泡群内气泡的耦合振动

Coupled oscillation of bubbles in a spherical bubble cluster

物理学报. 2015, 64(23): 234301 <https://doi.org/10.7498/aps.64.234301>

一类弹性和阻尼双分段非线性约束系统周期响应特性研究

Cycle response characteristics research on a class of piecewise nonlinear elastic and damping double constraint system

物理学报. 2015, 64(12): 124601 <https://doi.org/10.7498/aps.64.124601>

耦合振子系统的多稳态同步分析

Multiple synchronous states in a ring of coupled phase oscillators

物理学报. 2015, 64(17): 170504 <https://doi.org/10.7498/aps.64.170504>

垂直载荷下颗粒物质的声波探测和非线性响应

Acoustic detection and nonlinear response of granular materials under vertical vibrations

物理学报. 2016, 65(2): 024501 <https://doi.org/10.7498/aps.65.024501>

两种气泡混合的声空化

Cavitation of two kinds of bubble mixtures

物理学报. 2015, 64(20): 204301 <https://doi.org/10.7498/aps.64.204301>

# 双气泡振子系统的非线性声响应特性分析\*

莫润阳 王成会<sup>†</sup> 胡静 陈时

(陕西师范大学, 超声学重点实验室, 西安 710062)

(2019年3月22日收到; 2019年5月21日收到修改稿)

对初始半径不同的双气泡振子系统在声波作用下的共振行为和声响应特征进行了分析. 利用微扰法分析了双泡系统的非线性共振频率, 由于气泡间耦合振动的非线性影响, 双泡系统存在双非线性共振频率. 倍频共振和分频共振现象的存在使得双泡系统振幅-频率响应曲线有多共振峰, 且随着非线性增强, 共振区向低频区移动. 通过对气泡平衡半径、双泡平衡半径比以及气泡间距的分析发现, 耦合作用较强的情形发生在系统共振频率附近、气泡半径比接近1以及气泡间距小于 $10R_{10}$ 的范围内, 同时观察到了此消彼长的现象, 充分体现了气泡在声场中能量转换器的特征.

**关键词:** 双气泡振子, 非线性共振, 耦合振动, 声响应

**PACS:** 43.25.+y, 43.35.+d, 47.55.dd

**DOI:** 10.7498/aps.68.20190408

## 1 引言

液体中的微气泡在声波的驱动下做受迫振动, 它既是声散射源<sup>[1,2]</sup>, 也是声场中的换能器. 液体中气泡的振动引起周围液体流场分布变化, 进而影响液体内的压力差分布, 进一步增强了对液体介质的扰动作用. 液体中空化气泡在较高强度声波作用下还会引起空化效应, 伴随气泡振动还会出现声致发光、局部高温高压、微射流以及冲击波等现象, 空化泡有效充当了能量转换器的角色<sup>[3,4]</sup>. 人们对声场中的气泡运动相关的效应进行了大量的理论和实验研究<sup>[5-13]</sup>, 对空化现象及其在超声治疗、超声诊断、超声提取、超声清洗和超声声化学等领域的作用机理有了一定的认识. 但由于气泡振动以及其扰动下液体流场变化本身的复杂性使得空化气泡以及空化场的物理图景并不十分清晰, 因此, 声场中的气泡动力学仍然需要从理论和实验等角度展开进一步研究.

实际的空化环境通常为多泡系统, 气泡动力学

研究逐步从单气泡动力学过渡到多泡动力学, 然而, 由于多气泡系统是极为复杂的高维系统, 人们在研究过程中常从双气泡耦合动力学入手. 通过双泡模型人们发现, 气泡之间的相互作用可引起复杂的微射流、负脉冲以及空化噪声谱等<sup>[14-18]</sup>, 还可通过注入大气泡来抑制空化气泡振动强度进而达到抑制空化强度的效果<sup>[19]</sup>. 为了更好地分析气泡间的耦合效应, 球状或者链式泡群模型也被广泛采用<sup>[20]</sup>. 在理论分析时常将气泡的径向振动线性化为振子模型, 分析气泡在声场中线性响应模式. 但是, 气泡本身是三维系统, 在绝热条件下其内部气泡的物态变化本身具有非线性特征, 故为分析气泡振子的非线性声响应特征, 在弱非线性条件下忽略振动方程中三阶以上小量后可得到双气泡或多气泡系统的非线性耦合振动方程, 基于此方程可进一步探索多气泡体系的声响应特征<sup>[21-24]</sup>.

Sugita 和 Toshihiko<sup>[22]</sup> 通过多尺度法、微扰法等分析手段探索耦合振动气泡在共振频率附近的幅值和相位变化特征, 发现在气泡共振频率附近存在四种模式的耦合振动状态, 即等幅同相振动、等

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11474191, 11474192) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: wangld001@snnu.edu.cn

幅反相振动、局域同相振动模式 ( $x_{1a} \leq x_{2a}$  或  $x_{1a} \geq x_{2a}$ )。Ooi 等<sup>[1]</sup>采用线性化后耦合振子方程组分析气泡链的耦合振动时发现该系统存在多共振频率, 气泡链的存在可影响声波在介质中的传播特性。他们在研究中均计入了气泡次级声辐射延迟效应对耦合振动的影响。尽管有许多学者对双气泡耦合振动从不同角度展开了研究, 但主要基于线性振子或者同尺寸气泡系统研究, 而实际的多气泡系统气泡平衡半径通常处在分布状态<sup>[24]</sup>, 如造影剂微泡尺寸范围大致在 1—10  $\mu\text{m}$ , 因此, 仅分析尺度相同的气泡间相互作用的非线性特征是不够的。本文分析了两个不同平衡半径气泡组成的双气泡系统的共振行为及声响应特性, 考虑声波、液体介质及气泡本身相关的参量对双泡系统振动行为的影响。

## 2 基本方程

### 2.1 双气泡动力学方程

超声空化环境下液体中通常有大量的振动气泡, 其振动在液体中形成次级声辐射, 次级辐射声场与源声场一起共同影响空化场中气泡的振动, 因此, 声场中的空化泡构成多气泡耦合振动系统。气泡间耦合振动状态非常复杂, 与液体环境、驱动声波属性、气泡分布特征等多种因素有关, 而次级辐射声场将随距离的变化而衰减且有相位变化, 因此, 在引入次级声辐射影响考虑气泡的振动动力学时, 需考虑声传输相关的推迟效应的影响。为简化分析, 本文考虑耦合振动的双气泡系统, 其振动可用修正的 Keller-Miksis 方程表示<sup>[22]</sup>, 即

$$\begin{aligned} & \left(1 - \frac{\dot{R}_j}{c_1}\right) R_j \ddot{R}_j + \left(\frac{3}{2} - \frac{\dot{R}_j}{2c_1}\right) \dot{R}_j^2 \\ & + \frac{1}{d} \left(R_{3-j}^2 \ddot{R}_{3-j} + 2R_{3-j} \dot{R}_{3-j}^2\right) \Big|_{t-\tau} \\ & = \left(1 + \frac{\dot{R}_j}{c_1}\right) \frac{1}{\rho_l} [p_B(R_j, t) - p_a \cos(\omega t + \varphi) - p_0] \\ & + \frac{R_j}{\rho_l c_1} \frac{dp_B(R_j, t)}{dt}, \quad (j = 1, 2), \end{aligned} \quad (1)$$

式中  $R_j$  为初始半径  $R_{j0}$  ( $j = 1, 2$ ) 的气泡的瞬时半径,  $\tau = d/c_1$  为推迟时间,  $d$  为两气泡中心距离,  $\rho_l$  和  $c_1$  分别为液体密度和声速,  $p_0$  为液体环境压力,  $p_a$  和  $\varphi$  分别为驱动声波压力幅值和初相位。

$p_B(R_j, t)$  为泡壁处液体压力, 可表示为

$$p_B(R_j, t) = \left(p_0 + \frac{2\sigma}{R_{j0}}\right) \left(\frac{R_{j0}}{R_j}\right)^{3\kappa} - \frac{2\sigma}{R_j} - \frac{4\eta\dot{R}_j}{R_j}, \quad (2)$$

其中  $\sigma$  和  $\eta$  分别为液体表面张力系数和黏度系数,  $R_j = R_{j0}(1 + x_j)$ ,  $\kappa$  为泡内气体多方指数。

为更好地分析次级声辐射推迟效应对气泡耦合振动的影响, 假定气泡振动保持球形且处于弱非线性状态。令

$$R_j = R_{j0}(1 + x_j), \quad (3)$$

式中  $x_j$  为  $j$  气泡壁无量纲振动位移, 且  $x_j$  视作一阶小量。将 (3) 式代入 (1) 式, 约去三阶以上小量, 则考虑次级声辐射的时间推迟效应影响后的耦合振动动力学方程为

$$\begin{aligned} & \ddot{x}_j + b_j \dot{x}_j + \omega_{j0}^2 x_j + \delta_j \ddot{x}_{3-j} \\ & + m_j \dot{x}_{3-j} + \frac{3}{2} (1 - x_j) \dot{x}_j^2 + \alpha_j x_j^2 \\ & + \beta_j x_j^3 = -p_{ja} \cos(\omega t + \varphi), \end{aligned} \quad (4)$$

式中

$$\begin{aligned} \omega_{j0} &= \sqrt{\frac{3\kappa p_0 + (3\kappa - 1) 2\sigma/R_{j0}}{\rho_l R_{j0}^2}}, \\ \xi_j &= \frac{R_{j0}}{d}, \quad p_{ja} = \frac{p_a}{\rho_l R_{j0}^2}, \\ \delta_j &= \xi_{3-j} (1 + b_{3-j}\tau), \\ m_j &= \xi_{3-j} \omega_{j0}^2 \tau. \end{aligned}$$

其他系数参看附录。在近似过程中, 为分析气泡振动导致的次级声辐射引起附加压力相关的因子  $\ddot{x}_{3-j}|_{t-\tau}$  中推迟时间相关的作用效果, 取其线性近似<sup>[1]</sup>, 即

$$\ddot{x}_j(t - \tau) \approx (1 + b_j\tau) \ddot{x}_j(t) + \omega_{j0}^2 \tau \dot{x}_j(t). \quad (5)$$

### 2.2 系统非线性共振频率

由于气泡间相互作用的影响, 气泡在外场作用下的非线性振动将变得更加复杂。下面分析双气泡系统在声波作用下的非线性声响应。忽略系统振动阻尼和驱动声波的影响, 耦合振动双气泡系统线性共振频率  $\omega_r$  满足特征方程

$$\begin{vmatrix} \omega_r^2 - \omega_{10}^2 & \omega_r^2 \xi_2 (1 + b_2\tau) \\ \xi_1 \omega_r^2 (1 + b_1\tau) & \omega_r^2 - \omega_{20}^2 \end{vmatrix} = 0, \quad (6)$$

可得系统线性共振频率近似为

$$\omega_r = \sqrt{\frac{\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2 \pm \sqrt{(\omega_{10}^2 + \omega_{20}^2)^2 - 4\omega_{10}^2\omega_{20}^2[1 - \xi_1\xi_2(1 + b_2\tau)(1 + b_1\tau)]}}{2[1 - \xi_1\xi_2(1 + b_2\tau)(1 + b_1\tau)]}}. \quad (7)$$

由此可以看出, 耦合振动系统线性共振频率与各气泡本征频率相关, 气泡间的耦合相互作用将影响系统共振频率. 但从 (7) 式可以看出, 次级声辐射时间推迟效应对线性共振频率的影响较小. 为更好地认识声波作用下气泡较大振幅振动对气泡共振声响应的影响, 下面分析耦合振动双气泡系统非线性振动频率. 对忽略系统振动阻尼和驱动声波影响后的动力学方程 (4) 采用逐级近似法, 设  $x_j = x_{j0} + x_{j1} + x_{j2} + \dots$  且零级近似解为

$$x_{j0} = A_j \cos(\omega'_r t), \quad (8)$$

式中  $\omega'_r = \omega_{j0} + \omega_{j1} + \omega_{j2} + \dots$ . 因此, 一级近似解满足的方程为

$$\ddot{x}_{j1} + \omega'^2_r x_{j1} = h_{j1} + h_{j2} \cos 2(\omega'_r t) + q_j \cos(\omega'_r t), \quad (9)$$

$$h_{j1} = -\left(\frac{3}{4}\omega'^2_r + \frac{\alpha_j}{2}\right) A_j^2,$$

$$h_{j2} = \left(\frac{3}{4}\omega'^2_r - \frac{\alpha_j}{2}\right) A_j^2,$$

$$q_j = (\omega'^2_{j0} + 2\omega_{j0}\omega_{j1}) \xi_{3-j} (1 + b_{3-j}\tau) A_{3-j} + 2\omega_{j0}\omega_{j1} A_j.$$

若要等式右端无共振项, 必有  $q_j = 0$ , 自然振动频率偏移量近似为

$$\omega_{j1} \approx -\frac{\omega_{j0}\xi_{3-j}(1 + b_{3-j}\tau) A_{3-j}}{2[\xi_{3-j}(1 + b_{3-j}\tau) A_{3-j} + A_j]}, \quad (10)$$

且

$$x_{j1} = u_{j1} + u_{j2} \cos[2(\omega'_r t)], \quad (11)$$

式中

$$u_{j1} = -\frac{1}{2} \left( \frac{3}{2} + \frac{\alpha_j}{\omega_{j0}(\omega_{j0} + 2\omega_{j1})} \right) A_j^2,$$

$$u_{j2} = -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2} - \frac{\alpha_j}{3\omega_{j0}(\omega_{j0} + 2\omega_{j1})} \right) A_j^2.$$

同理, 将近似解 (8) 式和 (11) 式代入方程 (4), 约去三阶以上的高阶小量, 得到二级近似解满足的方程近似为

$$\ddot{x}_{j2} + \omega'^2_r x_{j2} = g_{1j} \cos(\omega'_r t) + g_{2j} \cos(3\omega'_r t), \quad (12)$$

式中

$$g_{1j} = \left[ \frac{3}{8} A_j^3 - \xi_{3-j} (1 + b_{3-j}\tau) A_{3-j} - 3u_{j2} A_j \right] \omega'^2_r + A_j (\omega'^2_r - \omega'^2_{j0}) - \alpha_j (2u_{j1} + u_{j2}) A_j - \frac{3}{4} \beta_j A_j^3,$$

$$g_{2j} = (3\omega'^2_r - \alpha_j) u_{j2} A_j - \frac{1}{8} (3\omega'^2_r + 2\beta_j) A_j^3.$$

要 (12) 式右侧无共振项, 必有  $g_{1j} = 0$ , 即

$$\omega'_r = \sqrt{\frac{8\omega'^2_{j0} A_j + 8\alpha_j (2u_{j1} + u_{j2}) A_j + 6\beta_j A_j^3}{3A_j^3 - 8\xi_{3-j} (1 + b_{3-j}\tau) A_{3-j} + 8(1 - 3u_{j2}) A_j}}. \quad (13)$$

(13) 式即为考虑气泡相互作用以及时间延迟效应影响后的双气泡系统非线性振动频率的表达式. 对于液体中两个不同初始半径气泡组成的双气泡系统, 其非线性振动频率分别分布在两气泡线性自由振动频率附近. 比较 (13) 式和 (7) 式可以看出, 非线性情形下气泡的振动频率将受到振动幅值、系统本质属性以及次级声辐射作用相关的时间推迟效应的影响.

### 2.3 双气泡系统的非线性声响应

双气泡系统受到声波激励, 气泡将做受迫振动. 下面采用逐级近似法, 基于振动方程 (4) 分析不同初始半径气泡组成的双气泡系统的非线性声响应特征. 为简化计算, 设近似解  $x_1 = x_{1a} \cos(\omega t + \varphi_1)$ ,  $x_2 = x_{2a} \cos(\omega t)$ , 代入方程 (4), 有

$$\begin{aligned} & [u_1^2 + (b_1 p_{2a} - m_2 p_{1a})^2 \omega^2] x_{1a}^2 \\ & - [u_2^2 + (b_2 p_{1a} - m_1 p_{2a})^2 \omega^2] x_{2a}^2 = 0, \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} & [(h_1^2 + \omega^2 b_1^2) (h_2^2 + \omega^2 b_2^2) + 2u_3 \omega^2 + u_4 \omega^4] x_{1a}^2 \\ & - u_2^2 - (b_2 p_{1a} - m_1 p_{2a})^2 \omega^2 = 0, \end{aligned} \quad (15)$$

$$\tan \varphi_1 = \frac{\omega (b_2 p_{1a} - m_1 p_{2a}) u_1 - (b_1 p_{2a} - m_2 p_{1a}) \omega u_2}{u_1 u_2 + (b_2 p_{1a} - m_1 p_{2a}) (b_1 p_{2a} - m_2 p_{1a}) \omega^2}, \quad (16)$$

$$\tan \varphi = \frac{\omega [u_1 (h_1 b_2 + \omega^2 m_1 \delta_2) + u_2 (m_2 h_1 + \omega^2 b_1 \delta_2) + \omega^2 u_5]}{u_1 (h_1 h_2 - \omega^4 \delta_1 \delta_2) + \omega^2 u_6}, \quad (17)$$

式中

$$\begin{aligned} u_1 &= h_1 p_{2a} + \omega^2 \delta_2 p_{1a}, \quad u_2 = h_2 p_{1a} + \omega^2 \delta_1 p_{2a}, \\ u_3 &= (m_1 m_2 - \omega^2 \delta_1 \delta_2) (h_1 h_2 - \omega^2 b_1 b_2), \\ u_4 &= 2 (b_1 h_2 + b_2 h_1) (m_2 \delta_1 + m_1 \delta_2) \\ &\quad + (m_1^2 + \omega^2 \delta_1^2) (m_2^2 + \omega^2 \delta_2^2), \\ u_5 &= (b_1 b_2 - m_1 m_2) (b_1 p_{2a} - m_2 p_{1a}), \\ u_6 &= (m_1 p_{2a} - b_2 p_{1a}) (m_2 h_1 + \omega^2 b_1 \delta_2) \\ &\quad + (h_2 b_1 + \omega^2 m_2 \delta_1) (b_1 p_{2a} - m_2 p_{1a}), \\ h_1 &= \omega_{10}^2 - \omega^2 - \frac{3}{8} (\omega^2 - 2\beta_1) x_{1a}^2, \\ h_2 &= \omega_{20}^2 - \omega^2 - \frac{3}{8} (\omega^2 - 2\beta_2) x_{2a}^2. \end{aligned}$$

(14) 式—(17) 式给出了一级近似下不同平衡半径组成的双泡系统气泡径向振动幅值和相位随驱动声波频率和振幅的变化关系. 可以看出, 在考虑气泡径向耦合振动的情形下, 由于次级声辐射以及介质黏性等因素的共同影响, 气泡的小振幅非线性受迫振动并不是同相位振动, 双气泡系统非线性振动相位差和气泡平衡半径、驱动声波压力幅值和频率等有关. 因此, 平衡半径不同的气泡构成的多气泡-液体混合介质中气泡在声波驱动下的振动行为将变得更加复杂. 液体空化场内存在大量平衡半径不同的气泡, 气泡间的相互作用必将增加空化场分布的复杂性, 双气泡系统相互作用引起的声响应状态分析必将为理解空化场的复杂性奠定基础.

### 3 数值分析

在一定强度声波的作用下, 气泡对在声场中做非线性径向振动, 其振动相图可展示出丰富的信息. 从不同情形下气泡的振动相图可知, 考虑次级声辐射对邻近气泡作用的延迟效应后, 气泡的振动相位和幅值均可能发生变化. 由于气泡受迫振动相关的次级声辐射延迟效应与气泡受迫振动频率成正比, 当驱动声波频率较低时, 次级声辐射延迟效应的影响几乎可忽略, 因此, 主要分析频率 500 kHz 以上超声波作用下气泡振动行为的变化规律. 本文数值计算所取各参量值如下: 驱动声压幅值 0.5 atm

(1 atm = 1.013 × 10<sup>5</sup> Pa), 驱动声波频率 515 kHz, 液体密度 998 kg/m<sup>3</sup>, 液体黏滞系数 0.001 Pa·s, 液体表面张力为 0.0725 N/m, 泡内气体多方指数为 1.4. 主要考察驱动声波频率、驱动压力幅值、气泡间距, 两气泡平衡半径比等因素对气泡声响应的影响.

#### 3.1 声辐射延迟效应对气泡振动行为的影响

为考察次级声辐射的延迟效应对气泡振动行为的影响, 利用 Mathematica 软件对 (1) 式进行数值分析, 取平衡半径  $R_{10} = 2 \mu\text{m}$  和  $R_{20} = 2R_{10}$  的气泡对, 气泡间距为  $20R_{10}$ , 当驱动声压幅值分别为 0.5, 1.0 atm 和 1.5 atm 时, 气泡 1 振动相图如图 1(a)—图 1(c) 所示, 气泡 2 振动相图如图 1(d)—图 1(f) 所示. 结果表明, 驱动声波压力幅值越高, 次级声辐射对气泡振动行为的影响越显著; 气泡的初始半径越小, 延迟效应对气泡振动的影响越大. 影响气泡非线性振动行为的因素很多, 驱动声压幅值越高, 气泡的振动越剧烈, 越容易在几个声周期后崩溃, 形成冲击波和微射流等次级效应, 还可形成更多的微气泡核调节空化进程.

#### 3.2 气泡振动幅值-频率特性分析

求解 (14) 式和 (15) 式可得一级近似条件下气泡振动幅值随驱动声波频率的变化, 如图 2(a) 所示. 对双气泡组成的系统而言, 弱非线性情形下系统存在两个共振区, 分别在两气泡本征频率附近. 气泡在其本征频率附近将出现强烈的非线性响应, 表现为共振频率的偏移以及振幅的跃变, 即驱动声波频率的微小变化可导致气泡振动振幅的大幅变化和不稳定响应. 因此, 在共振区内, 气泡吸收声波能力明显增强, 不稳定性也明显增强, 进而增加系统的复杂性. 为验证一级近似条件下气泡振幅-频率关系, 根据动力学方程 (1) 式对幅值-频率关系做数值分析, 结果见图 2(b). 对比图 2(a) 与图 2(b) 发现, 一级近似条件下气泡振幅-频率变化特征与动力学方程给出的特征基本一致. 由于气泡间相互作用以及气泡振动非线性的影响, 共振频率发生偏移, 在两共振区内均出现非主共振气泡的小

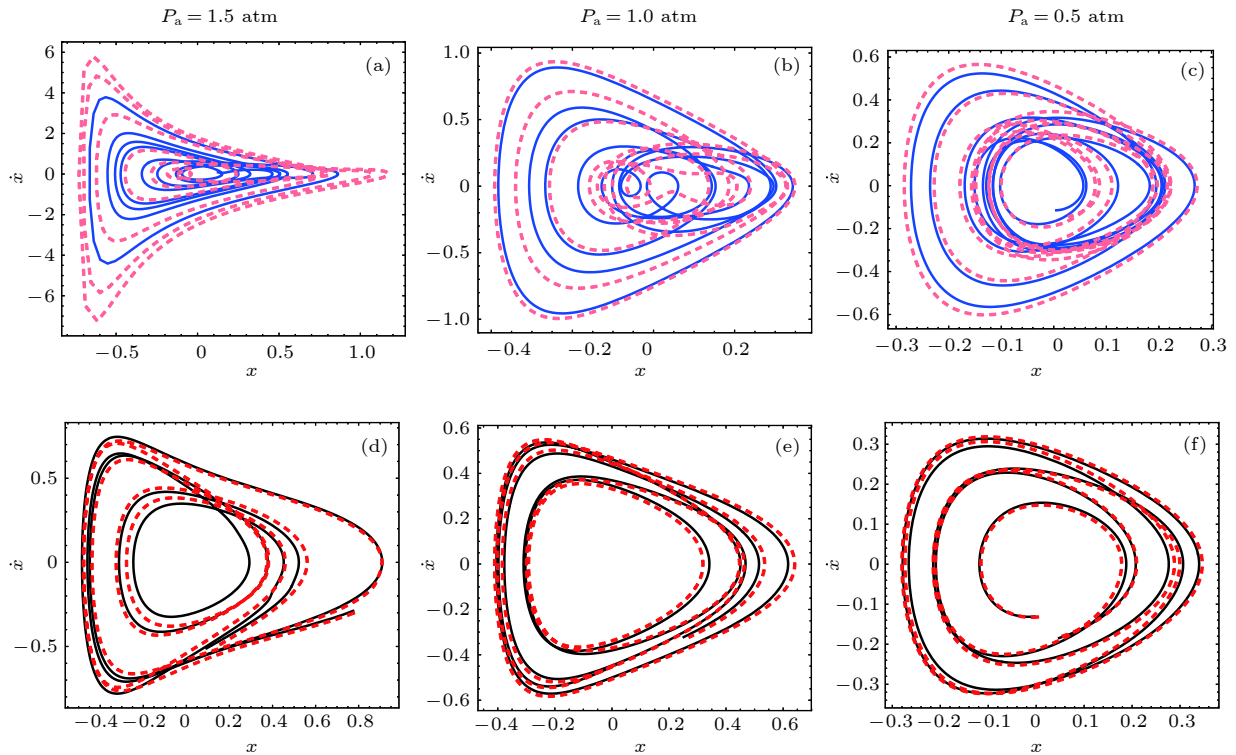


图 1 驱动压力幅值分别为 1.5, 1.0 和 0.5 atm 时气泡径向振动相图 其中图 (a)—(c) 为气泡 1 的振动相图, 图 (d)—(f) 为气泡 2 的振动相图

Fig. 1. Radial vibration phase diagram at 1.5, 1.0, 0.5 atm driving pressure amplitude for bubble 1 (a)–(c) and bubble 2 (d)–(f).

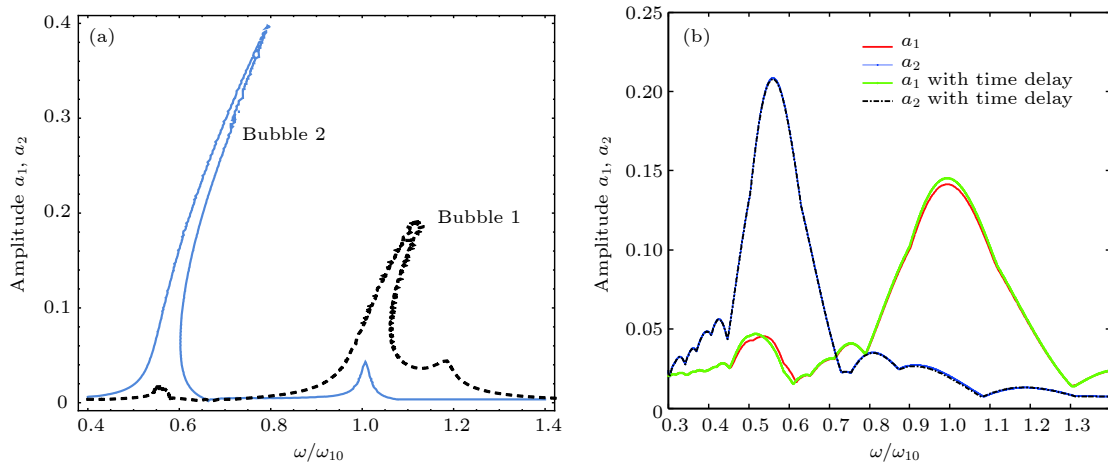


图 2 气泡振动幅值-驱动频率响应关系对比 (a) 理论分析; (b) 数值分析 (bubble 1, 3  $\mu\text{m}$ , bubble 2, 5  $\mu\text{m}$ , 驱动声波压力幅值  $p_a = 0.1 \text{ atm}$ )

Fig. 2. Comparison the responding relationship between vibration amplitude and driving frequency: (a) Theoretical analysis; (b) numerical analysis, where the diameter of the bubble 1 is 3  $\mu\text{m}$  and the bubble 2 is 5  $\mu\text{m}$ , the amplitude of driving pressure is  $p_a = 0.1 \text{ atm}$ .

幅共振峰, 且小幅共振峰值均在主共振气泡峰值的左侧, 但两种分析得到的峰值频率稍有差别, 主要原因在于理论分析过程中取一级近似抑制了气泡振动的某些非线性特征, 图 2(b) 显示双泡振动系统存在次谐波共振现象. 随着驱动声波压力幅值的增加, 气泡将做强非线性振动, 气泡振幅幅值-频率

在低频区的响应将更加复杂, 在低频区更容易激励气泡的大振幅振动, 如图 3 所示. 对比考虑气泡间相互作用相关的次级声辐射延迟效应影响的各曲线发现, 除共振区外, 一般情况下次级声辐射的延迟效应对气泡非线性振动幅值影响不大.

图 4 给出的数值分析结果表明, 平衡半径在

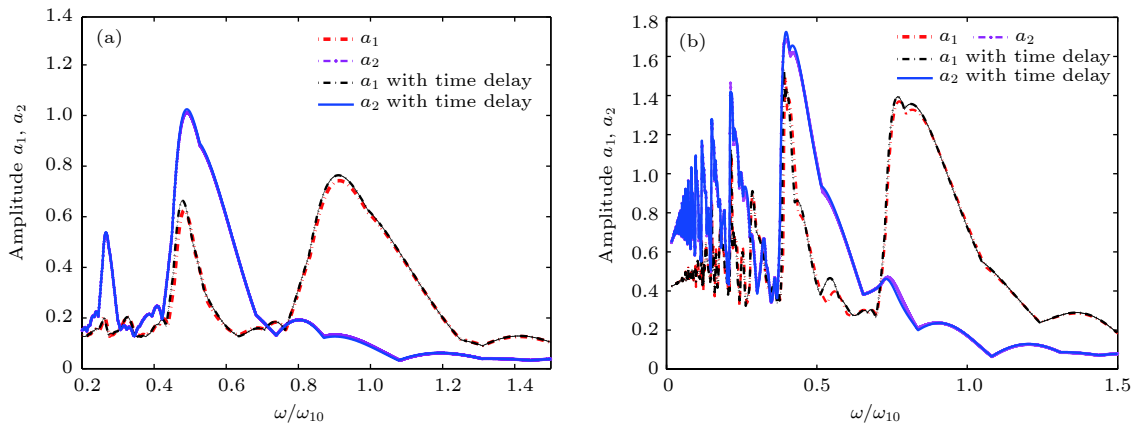


图3 气泡振动幅值与驱动频率的关系 (a)  $p_a = 0.5 \text{ atm}$ ; (b)  $p_a = 1 \text{ atm}$  (bubble 1,  $3 \mu\text{m}$ ; bubble 2,  $5 \mu\text{m}$ )

Fig. 3. Vibration amplitude vs. driving frequency: (a)  $p_a = 0.5 \text{ atm}$ ; (b)  $p_a = 1 \text{ atm}$ , where the diameter of the bubble 1 is  $3 \mu\text{m}$ , the bubble 2 is  $5 \mu\text{m}$ .

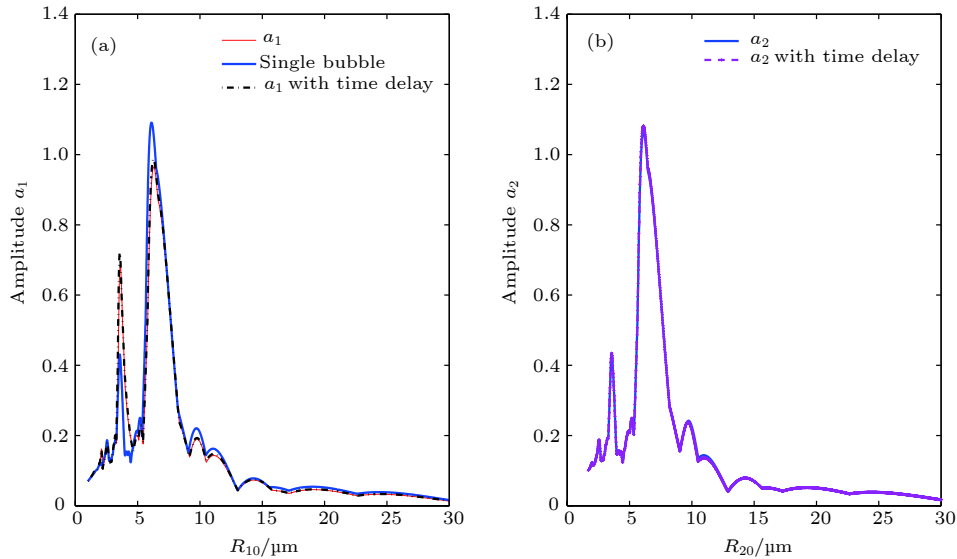


图4 气泡振动幅值随初始半径变化曲线 (a) 气泡1; (b) 气泡2

Fig. 4. Curves of vibration amplitude with initial radius: (a) Bubble 1, (b) bubble 2.

2—10  $\mu\text{m}$  间的气泡具有较强的声响应能力, 即在同样的驱动声波条件和液体环境中, 气泡能够获得较大径向振动振幅, 且平衡半径接近  $3 \mu\text{m}$  的气泡能够在较宽的频率范围内有较好的声响应. 为探究气泡平衡半径变化对气泡间相互作用的影响, 保持两气泡平衡半径比为  $5/3$ , 分析平衡半径  $R_{10}$  在  $1\text{--}30 \mu\text{m}$  间变化时气泡在驱动声波强度为  $0.5 \text{ atm}$  和  $500 \text{ kHz}$  的振动幅值变化规律. 驱动声波频率  $500 \text{ kHz}$  对应的线性气泡共振半径约为  $6.25 \mu\text{m}$ , 两气泡的响应曲线均在线性共振半径处出现共振峰; 此外, 在平衡半径为  $3.58 \mu\text{m}$  处出现次共振峰, 此为非线性振动气泡的倍频共振现象. 对比两气泡响应曲线可以看出, 在考虑次级声辐射影响后, 发

生相互作用的两不同平衡半径气泡构成的系统中, 小气泡振幅-平衡半径曲线的主共振峰受到一定程度的抑制, 次共振峰得到加强, 对相对尺度较大的气泡而言, 其两次共振峰值影响不大, 几乎可以忽略不计.

通过对耦合振动双气泡系统的幅值-频率以及幅值-平衡半径响应分析看出, 平衡半径约为  $3 \mu\text{m}$  的小气泡更容易激发非线性振动, 但其非线性振动幅度在一定程度也受到大气泡的抑制, 此抑制与彼此间次级声辐射导致的相互作用有关. 在考虑延迟效应影响后, 彼此间的次级耦合受到气泡间距的影响, 因此, 对气泡振幅随距离变化关系进行了数值分析, 如图 5 所示. 当气泡间距离较小时, 气泡间

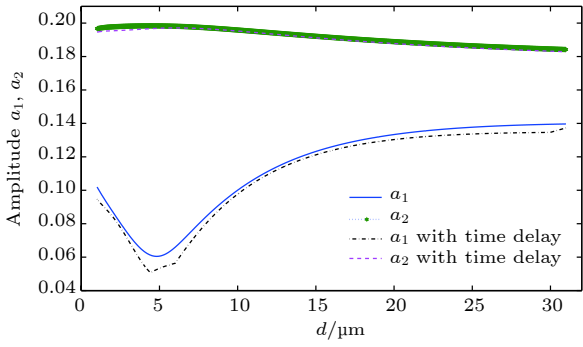


图 5 气泡间距对气泡声响应的影响

Fig. 5. Influence of bubble distance on sound response of bubbles.

的相互作用强,小气泡振动受到的抑制也强.随着距离的增加,小气泡振动振幅先减小后增大,最后趋于单气泡在声场中的受迫振动幅值,大气泡振动幅值有先增加后减小并趋于定值的趋势,说明气泡间距超过一定距离后彼此间的相互作用可忽略不计.经估计,平衡半径分别为  $3\ \mu\text{m}$  和  $5\ \mu\text{m}$  的气泡间的有效相互作用距离小于  $30\ \mu\text{m}$ .

气泡间的耦合振动还受到初始半径比的影响.

图 6 给出了平衡半径  $R_{10} = 3\ \mu\text{m}$  的气泡 1 与不同平衡半径  $R_{20}$  的气泡 2 相互作用的振动幅值变化趋势,驱动声波频率为气泡  $R_{10}$  的线性共振频率.随着比值  $R_{20}/R_{10}$  的增大,气泡 1 的振动幅值先减小后逐步小幅起伏变化,两气泡的平衡半径越接近,气泡振动耦合作用越强;在  $1 < R_{20}/R_{10} < 2$  的范围内,气泡 1 的振动受抑制程度逐渐增加;在比

值  $R_{20}/R_{10} > 2$  的范围内,气泡 2 平衡半径的变化对气泡 1 振动幅值的扰动相对较小.对气泡 2 而言,其振动幅值先增加后减小并逐步过渡到小幅起伏区,除耦合作用较强的峰值区外,其声响应变化趋势与单气泡基本一致.气泡在声场中平衡半径会随着液体中溶解气体浓度变化有发生变化,但从本文数值分析结果可以看出,当  $R_{20}/R_{10} > 2$  时,弱非线性条件下其平衡半径变化不会大幅增加对气泡 1 的抑制作用.

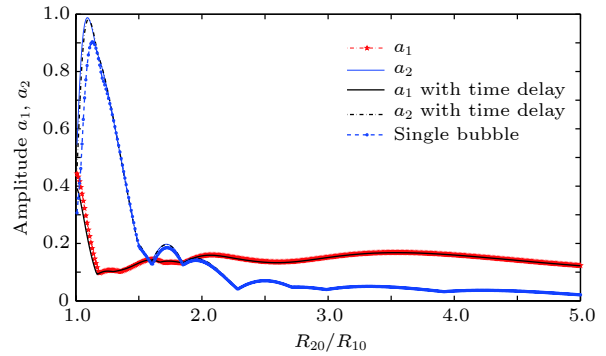


图 6 气泡平衡半径比的影响

Fig. 6. Influence of bubble equilibrium radius ratio.

事实上,气泡的非线性声响应影响因素很多,驱动声波压力幅值、频率以及气泡大小是决定性因素,首先频率和气泡大小决定了声场中能够有共振现象发生,驱动声波压力幅值则影响声响应的强弱,如图 7 所示.从图 7(a) 可以看出,初始半径相同的两气泡在频率为其线性共振频率的声波驱动

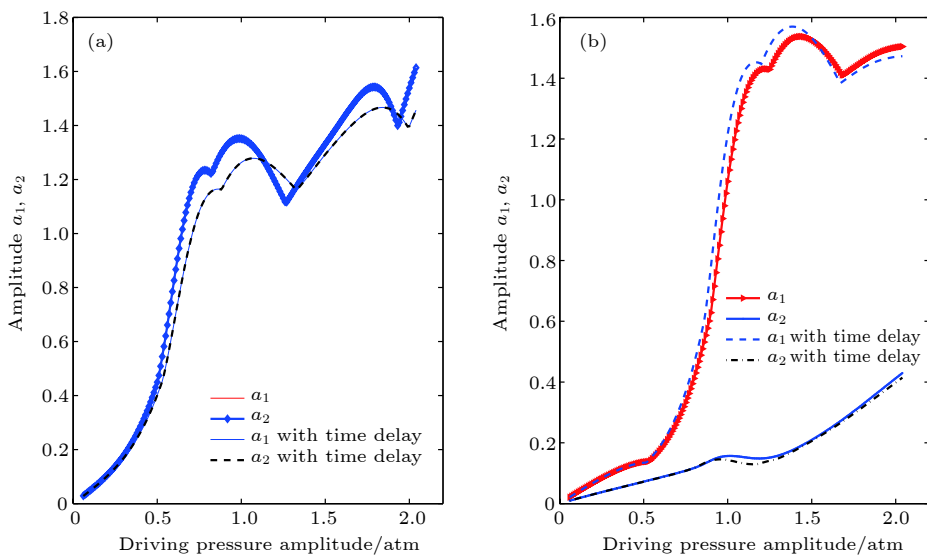


图 7 驱动压力影响 (a)  $R_{10} = R_{20} = 3\ \mu\text{m}$ ; (b)  $R_{10} = 3\ \mu\text{m}, R_{20} = 5\ \mu\text{m}$

Fig. 7. Effects of driving pressure: (a)  $R_{10} = R_{20} = 3\ \mu\text{m}$ ; (b)  $R_{10} = 3\ \mu\text{m}, R_{20} = 5\ \mu\text{m}$ .

下当驱动压力幅值超过 0.5 atm 后将显示出较强的非线性特征, 次级声辐射延迟效应的影响也表现得更为显著; 驱动声波压力幅值影响可分为三个区域, 当  $p_a < 0.5$  atm 时, 压力幅值增加, 气泡振幅也随之增加, 二者间的变化率也缓慢增加; 当  $0.5$  atm  $< p_a < 0.7$  atm 时, 压力幅值变化将引起气泡振幅较大变化; 当  $p_a > 0.7$  atm, 随着驱动压力幅值增加气泡振幅进入起伏变化区, 表明在此区域内气泡振动具有强非线性, 极小的扰动可能引起气泡状态的变化. 从图 7(b) 可以看出, 当两平衡半径不同的气泡在声波作用下耦合振动时, 小气泡 ( $R_{10} = 3 \mu\text{m}$ ) 的振动将受到抑制, 但由于驱动声波频率等于小气泡的自然振动频率, 故小气泡为共振气泡, 仍有较强的声响应, 但是其振幅随驱动声波压力幅值增加的速率变慢, 共振气泡振幅-驱动声波幅值变化的趋势和双共振气泡幅值的变化一致; 双气泡系统中大气泡 ( $R_{10} = 5 \mu\text{m}$ ) 在该条件下振幅增加的趋势相对平缓, 声响应状态相对较弱, 但是由于耦合作用的影响, 在共振气泡振幅变化率较大的区域内 ( $1.0$  atm  $< p_a < 1.5$  atm), 大气泡幅值有小幅减小的情况发生, 表明系统在声耦合时存在一定程度的此消彼长的情形.

### 3.3 气泡非线性振动相位特征

Sugita 和 Toshihiko<sup>[22]</sup> 在分析平衡半径等大的气泡组成双气泡振子系统在共振频率附近的弱非线性声响应时发现存在四种模式: 等幅同相振动、等幅反相振动、局域同相振动模式 ( $x_{1a} \leq x_{2a}$  或  $x_{1a} \geq x_{2a}$ ), 展示了平衡半径有微小差异时双泡振子系统在共振频率附近声响应的幅值和相位变化特征. 实际上, 声场中的气泡尺寸分布范围较大, 仅分析等大的双泡振子系统是不够的, 因此, 本文在一级近似条件下分析了黏性液体中双泡振动系统的相位特征, 发现两气泡振动相位差在系统共振频率两侧有跃变现象, 如图 8 所示, 与 Sugita 和 Toshihiko 的分析结论一致. 本文中, 气泡 1 振动初相位为  $\varphi_1$ , 气泡 2 振动初相位为 0, 驱动力振动初相位为  $\varphi$ , 两气泡的振动相位差可用  $\varphi_1$  表示. 双泡系统存在两共振频率, 对由  $3 \mu\text{m}$  和  $10 \mu\text{m}$  气泡组成的双泡系统, 共振频率约为  $0.27\omega_{10}$  和  $\omega_{10}$ . 从驱动力相位变化看, 对气泡  $R_{10} = 3 \mu\text{m}$  而言, 当  $\omega < \omega_{10}$  时, 气泡 1 与驱动力相位相同, 当  $\omega > \omega_{10}$  时, 可近似认为气泡 1 与驱动力相位相反. 对气泡

$R_{20} = 10 \mu\text{m}$  而言, 在区间  $(0.27\omega_{10}, \omega_{10})$  内, 气泡 2 相位落后  $\pi$ , 其他频率范围内, 其振动几乎和驱动力同步. 随着驱动频率的增加, 两气泡保持一定的相位差振动, 相位差大小与驱动声波频率、驱动声波强度以及液体黏性等因素有关. 在区间  $(0.27\omega_{10}, \omega_{10})$  内, 两气泡几乎反相振动; 但在其他区域内, 总体上看, 平衡半径  $3 \mu\text{m}$  的气泡 1 的振动超前于平衡半径  $10 \mu\text{m}$  的气泡 2.

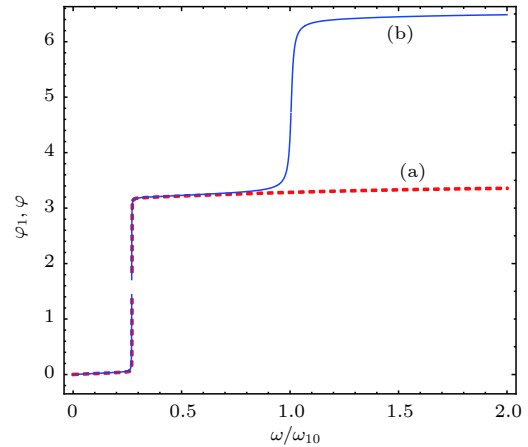


图 8 气泡振动相位随频率变化 (a)  $R_{10} = 3 \mu\text{m}$  气泡初相位  $\varphi_1$ ; (b) 驱动力振动初相位  $\varphi$

Fig. 8. Oscillation phase varies with frequency: (a) Initial phase  $\varphi_1$  of  $R_{10} = 3 \mu\text{m}$ ; (b) initial phase  $\varphi$  of driving force.

## 4 结 论

基于双气泡系统耦合振动方程, 考虑声波作用下振动气泡次级声辐射延迟效应的影响, 通过微扰法分析了平衡半径不同的双气泡系统的非线性声响应. 从数值分析结果可看出, 微扰法的一级近似解可近似表征系统声响应的振幅和相位的变化趋势和大致规律. 同时, 基于非线性振动方程分析了驱动声波频率、气泡平衡半径、气泡间距、气泡平衡半径比值以及驱动压力幅值等因素对气泡声响应振幅的影响. 结果表明, 气泡在声波驱动下其振动可表现出明显的非线性特征甚至过渡到混沌状态. 次级声辐射的延迟效应只在共振区内对气泡的耦合振动幅值有影响, 其他区域可忽略不计. 但当驱动声波频率处在两气泡非线性共振频率之间时, 耦合振动气泡在声波作用下可出现反相振动现象. 一般应用环境下, 超声波与气泡之间能量交换环境为多气泡体系, 体系内气泡间耦合将非常复杂, 因此, 通常情况下简化为特定模型, 如双泡、球状泡

群等研究气泡间耦合相互作用, 双气泡体系的声响应研究对认识多气泡体系的声响应应具有非常重要的研究意义, 可为超声波作用下气泡参与的超声治疗、超声诊断以及超声清洗等应用提供理论基础.

## 参考文献

- [1] Ooi A, Nikolovska A, Manasseh R 2008 *J. Acoust. Soc. Am.* **124** 815
- [2] Allen J S, Kruse D E, Dayton P A, Ferrara K W 2003 *J. Acoust. Soc. Am.* **114** 1678
- [3] Mohd Y N S, Babgi B, Alghamdi Y, Aksu M, Madhavan J, Ashokkumar M 2016 *Ultrason. Sonochem.* **29** 568
- [4] Ashokkumar M 2011 *Ultrason. Sonochem.* **18** 864
- [5] Prosperetti A, Crum L A, Commander K W 1988 *J. Acoust. Soc. Am.* **83** 502
- [6] Wang C H, Cheng J C 2013 *Chin. Phys. B* **22** 014304
- [7] Zhang Y N, Li S C 2016 *Ultrason. Sonochem.* **29** 129
- [8] Doinikov A A 2004 *J. Acoust. Soc. Am.* **116** 821
- [9] Yasui K, Lee J, Tuziuti T, Towata A, Kozuka T, Yasuo I 2009 *J. Acoust. Soc. Am.* **126** 973
- [10] Hegedus F, Klapcsik K 2015 *Ultrason. Sonochem.* **27** 153
- [11] Hu J, Lin S Y, Wang C H, Li J 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 114301 (in Chinese) [胡静, 林书玉, 王成会, 李锦 2013 物理学报 **62** 114301]
- [12] Takahira H, Yamane S, Akamatsu T 1995 *JSME Int. J. Ser. B* **38** 432
- [13] Naohiro S, Keita A, Toshihiko S 2017 *Ultrasonics* **77** 160
- [14] Chew L W, Klaseboer E, Ohl S W, Khoo B C 2011 *Phys. Rev. E* **84** 066307
- [15] Versluis M, Schmitz B, Heydt A V D, Lohse D 2000 *Science* **289** 2114
- [16] Masato I 2009 *Phys. Rev. E* **79** 016307
- [17] Jiang L, Liu F B, Chen H S, Wang J D, Chen D R 2012 *Phys. Rev. E* **85** 036312
- [18] Bonabi R S, Rezaee N, Ebrahimi H, Mirheydari M 2010 *Phys. Rev. E* **82** 016316
- [19] Masato I 2007 *Phys. Rev. E* **76** 046309
- [20] An Y 2011 *Phys. Rev. E* **83** 066313
- [21] Doinikov A A, Manasseh R, Ooi A 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **117** 47
- [22] Sugita N, Toshihiko S 2017 *Ultrasonics* **74** 174
- [23] Ikeda T, Harata Y, Hiraoka R 2015 *Nonlinear Dyn.* **81** 1759
- [24] Dzaharudin F, Suslov S A, Manasseh R, Ooi A 2013 *J. Acoust. Soc. Am.* **134** 3425

# Nonlinear acoustic response of two bubble oscillators\*

Mo Run-Yang    Wang Cheng-Hui<sup>†</sup>    Hu Jing    Chen Shi*(Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)*

( Received 22 March 2019; revised manuscript received 21 May 2019 )

## Abstract

It is of great importance to investigate the dynamics of the multiple bubble system for revealing the mechanism of cavitation. Because of the secondary radiation of the oscillating bubbles, the coupled vibration of neighboring bubbles arises. Previous studies have reported that time delays appear to be more important when the coupled bubbles are close to each other. In this paper, we investigate the acoustical response of two bubble oscillators theoretically and numerically. Firstly, we modify the dynamic model equation by use of Taylor series being accurate up to terms of second order in radial displacement of bubbles. Based on the perturbation theory, the eigenmodes of the coupled-bubble system are analyzed, and two different resonant frequencies are obtained. Secondly, the effects of time delays on the coupled oscillation are analyzed numerically by use of phase diagram. When bubbles are driven by low-intensity ultrasound, we can neglect the effect of the time delay for the coupled-bubble system. Thirdly, the theoretical and numerical curve of amplitude versus frequency are compared with each other. There are two peaks on each curve on which present are two resonant regions. The relative position of the resonant peaks of the two bubbles in each region is similar for the two analytical methods. Finally, the effect of equivalent radius of bubble, equivalent radius ratio, bubble center distance, and driving pressure amplitude on the radial motion are numerically explored. With the increase of the intensity of the acoustic wave, the resonant peaks shift toward the low-frequency region. The coupled oscillation of the two bubbles of different radii could be intensified when these conditions are satisfied, such as resonant driving, equal radius, and the range of center distance smaller than  $10R_{10}$ . We can observe a transition phenomenon and out-of-phase fluctuation of the bubble oscillation in the strong coupling region. Therefore, bubbles play an important role of energy translator in the ultrasound applications.

**Keywords:** two bubble oscillators, nonlinear resonance, coupled oscillation, acoustic response**PACS:** 43.25.+y, 43.35.+d, 47.55.dd**DOI:** 10.7498/aps.68.20190408

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11474191, 11474192).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: wangld001@snnu.edu.cn