

随机波动率费曼路径积分股指期货期权定价

冯玲 纪婉妮

Pricing of stochastic volatility stock index option based on Feynman path integral

Feng Ling Ji Wan-Ni

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 203101 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20190714

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190714>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

周期波动性对金融市场稳定性的影响

Influence of periodic volatility on the stability of financial market

物理学报. 2017, 66(4): 040501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.040501>

基于上证指数高频数据的中国资本市场微观特性研究

Microscopic characteristics of Chinese capital market based on the high frequency data of Shanghai composite index

物理学报. 2017, 66(12): 120203 <https://doi.org/10.7498/aps.66.120203>

基于反转路径差信号的兰姆波成像方法

Lamb wave imaging method based on difference signal in reverse path

物理学报. 2019, 68(12): 124301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190101>

基于纠缠见证的路径纠缠微波检测方法

Path-entanglement microwave signals detecting method based on entanglement witness

物理学报. 2018, 67(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172164>

逼近积分点数下限的五阶容积卡尔曼滤波定轨算法

A novel algorithm of fifth-degree cubature Kalman filter for orbit determination at the lower bound approaching to the number of cubature points

物理学报. 2017, 66(15): 158401 <https://doi.org/10.7498/aps.66.158401>

稍不均匀电场中低气压击穿的起始路径研究

Critical breakdown path under low-pressure and slightly uneven electric field gap

物理学报. 2019, 68(7): 070201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181999>

随机波动率费曼路径积分股指期权定价*

冯玲 纪婉妮†

(福州大学经济与管理学院, 福州 350002)

(2019年5月10日收到; 2019年8月20日收到修改稿)

采用量子力学中的费曼路径积分方法, 推导出了更符合市场一般化情形的随机波动率股指期权定价模型. 在此基础上, 以恒指期权为例进行实证研究预测 30 天的期权价格, 同时将 Heston 模型作为对照组, 并进行稳健性检验. 研究表明, 本文构建的股指期权定价模型通过求解费曼定价核的数值解, 进而在线性算法上直接实现股指期权价格的预测, 相比于 Heston 模型利用特征函数的方法, 不论是在相同到期日不同执行价格下还是在相同执行价格不同到期日下, 定价精度显著提高. 费曼路径积分作为量子金融的主要方法, 本文的研究将为其进一步应用于金融衍生品定价提供参考.

关键词: 费曼路径积分, 均值定价核, 随机波动率, 股指期权定价**PACS:** 31.15.xk, 02.50.Ey, 87.10.Mn, 89.65.Gh**DOI:** 10.7498/aps.68.20190714

1 引言

2018年8月31日, 证监会对《关于上市股指期货、助力资本市场风险防范的提案》做出答复, 表示其将继续指导中金所推进股指期货的研发工作, 并于合适时机推出股指期货. 传统的期权定价模型主要有 Black-Scholes (BS) 期权定价模型和 Heston 模型. BS 期权定价模型虽然形式上较为简洁, 但其仅适用于波动率为常数时的欧式期权的定价, 而对股指期货进行准确定价是发挥其风险管理功能的重要前提. Heston 期权定价模型虽然考虑了波动率为随机的情形下的期权定价问题, 但其在求解过程中多次利用偏微分方程, 这些偏微分方程是在假设了特征函数解的形式的基础上, 经过推演得到相应微分方程组, 而偏微分方程的求解技术要求较高, 且不少学者在研究过程中发现该模型存在许多无法克服的不足 [1-3], 本文在实验过程中就发现其在价格预测中出现缺失值. Heston 模型适

用于欧式期权的定价, 但其并不是为股指期货量身定制的模型. 当前, 关于随机波动率股指期权的定价研究主要有参数方法与非参数方法. 参数方法主要是围绕 BS 期权定价模型对股指期货定价展开研究, 侧重于股指运动变化的刻画方面, 比如在股指服从的分布中加入跳跃过程、利用广义自回归条件异方差模型 (generalized autoregressive conditional heteroskedasticity model, GARCH) 或时变波动率模型对 BS 期权定价公式进行修正 [4-7]. 此外, 也有学者试图用一般均衡模型分析股指期权的定价问题 [8]. 但是参数方法难以避开参数设定所带来的误差与人为影响, 随着计算机算法的飞快发展, 非参数方法可以避开求解参数受到的限制, 因此受到诸多学者的青睐. 其一般都是基于计算机模拟得到数值解, 诸如神经网络模型, 遗传算法 [9-11] 等. 然而非参数方法不能给出具体期权定价公式, 也无法给出合理的经济解释. 因此, 更符合市场一般化情形的股指期权定价模型亟待提出. 本文基于费曼路径积分方法研究股指期权定价问题, 旨在探寻用跨学

* 国家自然科学基金 (批准号: 71573043) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 724755538@qq.com

科的量子金融方法构建一个更符合市场实际情形的股指期货定价模型.

1942年,费曼基于量子物理的角度提出路径积分方法(path integral method),用于解决传统量子物理求解过程的繁琐及不易理解的问题.费曼路径积分就物理问题的求解给出全局函数,从而为导出解析近似和数值解提供了强大的分析工具.费曼路径积分已被证明在解决金融问题上的有效性.1988年,Dash^[12]首次提出并阐述了路径积分方法用于解决期权定价的思路.随后其还分别对单因子期限模型和多因子期限模型给出了路径积分的分析框架.然而,其缺少对具体应用和数值算法的进一步研究.1997年,Baaquie等^[13-19]进一步对费曼路径积分在金融衍生品定价上的应用展开更为深入的研究,并提供了一系列新的数值算法,从而大大简化了数值分析的工作量.2015年,Kakushadze^[20]用量子力学“半经典”近似方法给出了对债券定价的显式函数,并且指出根据费曼图可以将微扰量子力学技术应用于“半经典”近似之外.2017年,Issaka和Sengupta^[21]采用费曼路径积分方法对受列维过程驱动的金融市场的期权定价进行研究,得到转移概率密度函数的闭式解.2018年,Ma等^[22]提出了一般分数下的分数稳定过程路径积分期权定价模型.2018年,Paolinelli和Arioli^[23]基于二次路径积分采用一种不同的作用量,得到了参数较少的股票价格动态模型.虽然上述研究已经对费曼路径积分在金融市场上的应用展开了大量的讨论,但是该方法在股指期货价格的定价研究上并不深入.2003年,陈泽乾^[24]基于对冲的视角对量子金融的金融意义进行阐述,解释了金融资产价格行为用量子规律刻画较经典统计规律刻画的优越性.2007年,陈黎明和邱苑华^[25]基于陈泽乾提出的二项式期权定价的量子模型,构建了实物期权估值算法.然而,该算法还存在一些不足,如阶段划分的问题以及模型参数的确定问题.2014年,王鹏和魏宇^[26]指出“金融物理学”在金融市场上众多异象(anomalies)的解释上较经典理论具有优势,从而阐释了金融物理兴起的原因.上述研究虽然从量子金融的理论意义与应用意义进行了解释,但在具体的定价问题的解决上显得相对浅显.

在我国股指期货亟待推出的背景下,对股指期货定价模型展开研究具有重要的理论意义与应用意义,本文基于风险中性定价框架,旨在应用量子

金融的主要方法——费曼路径积分,构建一个更符合市场实际的随机波动率股指期货定价模型.本文的创新之处在于:首先,利用费曼定价核将一维情形(常数波动率)扩展到二维情形(随机波动率),从而同时考虑股指价格及其方差的变动以包含丰富的价格运动信息,最终得到基于量子金融视角的股指期货定价模型;其次,在计算机算法的处理上基于费曼路径生成原理与大数定律的关系,运用Matlab模拟得到均值定价核,从而优化股指期货价格的求解过程并大大提高定价精度,既可以保留参数方法在经济解释上的优越性,也可以充分实现数值算法在逼近市场价格上的优势.

本文的第2节对相关模型理论展开描述;第3节构建了随机波动率费曼路径积分股指期货定价模型;第4节对费曼路径积分股指期货定价模型进行算法设计,以恒指期权的历史数据进行实证研究,并将Heston模型作为对照组以说明随机波动率费曼路径积分股指期货定价模型的有效性、探讨本文构建的模型的适用性;第5节为结论.

2 模型描述

2.1 Heston 模型

诸多学者针对经典BS模型下所产生的波动率微笑与波动率皱眉展开了研究,其中较为经典的是1993年Heston^[27]提出的用特征函数的方法求解偏微分方程(26).假定 $\lambda = k\sqrt{V}$,其中 k 为常数, V 为方差.首先猜测(26)式具有和BS公式相似的解,

$$C(S, V, t) = SP_1 - Ke^{-r(T-t)}P_2, \quad (1)$$

其中,右边第一项是即期资产在最优执行时的现值,第二项是执行价格的现值; P_1, P_2 又可以看成是价内期权的条件概率分布.令 $x = \ln S(t)$,则 P_1, P_2 必须满足偏微分方程:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}V \frac{\partial^2 P_j}{\partial x^2} + \rho\sigma V \frac{\partial^2 P_j}{\partial x \partial V} + \frac{1}{2}\xi^2 V \frac{\partial^2 P_j}{\partial V^2} \\ & + (r + u_j V) \frac{\partial P_j}{\partial x} + (a_j - b_j V) \frac{\partial P_j}{\partial V} + \frac{\partial P_j}{\partial t} = 0, \end{aligned} \quad (2)$$

其中, $j = 1, 2, u_1 = \frac{1}{2}, u_2 = -\frac{1}{2}, a = \alpha\theta, b_1 = \alpha + \lambda - \rho\xi, b_2 = \alpha + \lambda$,终端条件 $P_j(x, V, T; \ln K) = 1 (x \geq \ln K)$.

$$dx(t) = (r + u_j V) dt + \sqrt{V(t)} dW_1(t), \quad (3)$$

$$dV(t) = (a_j - b_j V) dt + \xi \sqrt{V(t)} dW_2(t), \quad (4)$$

$$P_j(x, V, T; \ln K) = Pr[x(T) \geq \ln K | x(t) = x, v(t) = v], \quad (5)$$

P_1, P_2 的特征函数 $f_1(x, V, T; \phi)$ 和 $f_2(x, V, T; \phi)$ 均需满足偏微分方程 (2), 且终端条件为

$$f_j(x, V, T; \phi) = e^{i\phi x}, \quad (6)$$

特征函数的解为

$$f_j(x, V, t; \phi) = e^{C(T-t; \phi) + D(T-t; \phi)V + i\phi x}, \quad (7)$$

其中,

$$C(\tau; \phi) = r\phi i\tau + \frac{a}{\xi^2} \left\{ (b_j - \rho\xi\phi i + d)\tau - 2 \ln \left(\frac{1 - ge^{d\tau}}{1 - g} \right) \right\},$$

$$D(\tau; \phi) = \frac{b_j - \rho\xi\phi i + d}{\xi^2} \left(\frac{1 - e^{d\tau}}{1 - ge^{d\tau}} \right),$$

$$g = \frac{b_j - \rho\xi\phi i + d}{b_j - \rho\xi\phi i - d},$$

$$d = \sqrt{(\rho\xi\phi i - b_j)^2 - \xi^2(2u_j\phi i - \phi^2)}.$$

概率密度函数 $P_j(x, V, T; \ln K)$ 可通过对特征函数的逆变换进行积分得到,

$$P_j(x, V, T; \ln K) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \text{Re} \left[\frac{e^{-i\phi \ln K} f_j(x, V, T; \phi)}{i\phi} \right] d\phi. \quad (8)$$

由 (8) 式求出概率密度 P_1, P_2 , 代入 (1) 式即可得欧式看涨期权的价格.

Heston 模型显著改善了 BS 模型在价格预测上的不足, 能够同时考虑标的资产价格以及标的资产收益率方差的变动.

2.2 费曼路径积分

费曼路径积分 (Feynman path integral) 是量子力学在薛定谔波动力学和海森伯的矩阵力学之外的第三种表示形式. 在路径积分理论中, 微观粒子处于某一时刻 t_b 的运动状态 $\psi(x_b, t_b)$, 完全由过去的某一时刻 $t_a (< t_b)$ 的所有可能的运动状态 $\psi(x_a, t_a)$ 所决定, 即

$$\psi(x_b, t_b) = \int dx_a K(x_b, t_b; x_a, t_a) \psi(x_a, t_a), \quad (9)$$

传播函数为

$$K(x_b, t_b; x_a, t_a) = \sum_{\text{所有路径}} \text{const} \cdot e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}, \quad (10)$$

其中, const 表示常数, \hbar 为普朗克常量.

作用泛函为

$$S[x(t)] = \int dt L(x(t), \dot{x}(t), t). \quad (11)$$

费曼路径积分理论认为: 粒子由 (x_a, t_a) 到 (x_b, t_b) 的各种路径都是可能的, 并且每条路径 $[x(t)]$ 均具有概率幅 $\sim \text{const} \times e^{\frac{i}{\hbar} S[x(t)]}$. 传播函数 $K(x_b, t_b; x_a, t_a)$ 是从 $x(t_a) = x_a$ 运动到 $x(t_b) = x_b$ 的所有运动路径 $[x(t)]$ 的概率幅的叠加, 而对所有路径的求和可以表达为无穷维积分 (泛函积分) 的形式, 称为费曼路径积分.

2.3 费曼路径积分定价理论

将费曼路径积分方法应用于期权定价研究时, 最为关键的是关于期权定价公式的费曼核的求解, 借鉴诸多学者的研究 [12-18], 本文称其为费曼定价核. 费曼定价核包含了期权定价所需的全部信息. 令 $p(x, y, \tau, x', y')$ 为风险中性的条件概率, 其中 $\tau = T - t$, x 和 y 分别代表 $\tau = T - t$ 时有价证券的价格和波动率, x' 和 y' 分别代表 $\tau = 0$ 时有价证券的价格和波动率. 在 $\tau = 0$ 时, 定价核用狄拉克 δ 函数 (Dirac delta function) 表示为

$$p(x, y, 0, x', y') = \delta(x' - x) \delta(y' - y). \quad (12)$$

当 $t \leq T$ 时, 由 Feynman-Kac 公式得看涨期权的价格为

$$C(\tau; x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} dx' dy' p(x, y, t; x', y') g(x', y'), \quad (13)$$

其中, $g(x', y')$ 为贴现到时间 t 的支付函数, $C(\tau; x, y)$ 为看涨期权在时间 t 的价格, 则终值条件为 $C(0, x', y') = g(x', y')$.

运用费曼路径积分求解模型定价核时, 首先需要寻找哈密顿量 H 的本征函数. 为此, 在对角化的哈密顿量 H 中引入动量作为基矢, 这可以简单地使用狄拉克函数和傅里叶变换得到,

$$\langle x | x' \rangle = \delta(x - x') = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')}, \quad (14)$$

由标积 $\langle x | p \rangle = e^{ipx}$, $\langle p | x' \rangle = e^{-ipx'}$, 得

$$\langle x | H | p \rangle \equiv H \langle x | p \rangle = H e^{ipx}, \quad (15)$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} e^{ip(x-x')} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle x|p\rangle \langle p|x'\rangle. \quad (16)$$

由此得到动量空间基矢 $|p\rangle$ 的完备性方程为

$$J = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle x|p\rangle \langle p|x'\rangle. \quad (17)$$

费曼路径积分的思想在于将 τ 拆成许多更小的时间段 ε , 估计 $e^{-\varepsilon H}$, 并把这些更小时间段内的所有估计得到的矩阵 $e^{-\varepsilon H}$ 进行连乘运算, 这在概率论上相当于把所有可能的运动路径的概率考虑进去, 因此费曼路径积分可以考虑所有可能的运动路径, 这就为将费曼路径积分应用于期权定价以得到更为精确的期权价格提供了理论支撑. 为了分析的简便, 假设将 τ 拆分成 N 个相同的 ε , 则 $\tau = N\varepsilon$, 令 $N \rightarrow \infty$, 则 $\varepsilon \rightarrow 0$, 则

$$p(x, \tau; x') = \langle x|e^{-\tau H}|x'\rangle = \lim_{N \rightarrow \infty} \langle x|[e^{-\varepsilon H}]^N|x'\rangle. \quad (18)$$

由完备性方程 $J = \int_{-\infty}^{+\infty} dx |x\rangle \langle x|$ 对每个 $e^{-\varepsilon H}$ 矩阵进行对角化, (18)式变为

$$p(x, \tau; x') = \left(\prod_{i=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} dx_i \right) \prod_{i=1}^N \langle x_i|e^{-\varepsilon H}|x_{i-1}\rangle, \quad (19)$$

边界条件为 $x_N = x, x_0 = x'$.

由 Feynman 公式得

$$\langle x_i|e^{-\varepsilon H}|x_{i-1}\rangle \equiv N_i(\varepsilon) e^{\varepsilon L(x_i; x_{i-1}; \varepsilon)}, \quad (20)$$

其中, $L(x_i; x_{i-1}; \varepsilon)$ 即为系统的拉格朗日量 (Lagrangian), 作用量 (Action) 为

$$S = \varepsilon \sum_{i=1}^N L(x_i; x_{i-1}; \varepsilon),$$

路径积分测度 (the path-integration measure) 为

$$\int DX = N_N(\varepsilon) \prod_{i=1}^{N-1} \int N_i(\varepsilon) dx_i.$$

由此, 得离散时间下的费曼路径积分

$$p(x; \tau, x') \equiv \int DX e^S. \quad (21)$$

在许多情形下, 归一化的 $N_i(\varepsilon)$ 与积分变量 x_i 是独立的, 这种情形下, 归一化的常数 $N_i(\varepsilon)$ 可以忽略不计, 此时 $N \rightarrow \infty$, 并由边界条件可以得到连续时间下的费曼路径积分,

$$\begin{aligned} p(x; \tau, x') &= \prod_{t=0}^{\tau} \int_{-\infty}^{+\infty} dx(t) e^S \Rightarrow \langle x|e^{-\tau H}|x'\rangle \equiv \int DX e^S, \end{aligned} \quad (22)$$

(22) 式即为定价核的费曼路径积分形式.

3 随机波动率费曼路径积分股指期货期权定价模型构建

3.1 随机波动率分布形式设定

1987年, Scott^[28]提出波动率可能服从均值回复过程, 并用蒙特卡罗模拟算出了期权价格的数值解. 1989年, Merville 和 Pieptea^[29]使用 S&P 500 指数期货看涨期权进行研究, 并给出了市场波动率服从带噪声均值回复过程的证明. 1993年, Heston^[27]假定即期资产在时间 t 服从几何布朗运动,

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sqrt{V(t)} S(t) dW_1(t), \quad (23)$$

其中, $V(t)$ 是方差, $dW_1(t)$ 是维纳过程, 假定波动率服从形如 Stein 和 Stein^[30]提出的均值回复过程, 并借鉴 Cox 等^[31]1985年提出的平方根过程, 得到方差服从平方根过程,

$$dV(t) = \alpha(\theta - V(t)) dt + \xi \sqrt{V(t)} dW_2, \quad (24)$$

其中, $V(t) = \sigma^2(t)$, θ 是方差的长期均值, α 是均值回复速度, ξ 是反映方差过程的波动率, dW_1 和 dW_2 为相关系数为 ρ 的高斯白噪声.

可见, Heston 模型的平方根过程, 本质上是均值回复过程的改进. 且鉴于诸多学者的研究, 指出波动率服从均值回复过程更符合市场的实际情形^[27-31]. 因此, 本文采用 Heston 的平方根过程刻画方差的运动过程.

3.2 随机波动率费曼路径积分股指期货期权定价模型

由于红利支付会使得股指的实际价值减少, 借鉴 Shreve 在《金融随机分析》^[32]关于连续支付股息的股价模型, 取股指模型为

$$dI(t) = (\mu - q) I(t) dt + I(t) \sqrt{V(t)} dW_1,$$

$$dV(t) = \alpha(\theta - V(t)) dt + \xi \sqrt{V(t)} dW_2, \quad (25)$$

其中, q 为股息率, 为分析的简便, 假定股息率为常数; $V(t) = \sigma^2(t)$; μ 为股指的期望收益率, θ 是方差的长期均值, α 是均值回复速度, ξ 是反映方差

过程的波动率, μ, α, θ, ξ 均为常数; dW_1 和 dW_2 为相关系数为 ρ 的高斯白噪声. 由二次变分原理得, $(dI)^2 = I^2 V dt$, $(dV)^2 = \xi^2 V dt$, $dI dt = dV dt = 0$, $dI dV = \rho \xi I V dt$.

假定波动率风险的市场价格为 λ , 根据风险中性定价原理, 股指的期望收益率 μ 等于无风险利率 r , 由 Black 和 Scholes 及 Merton 指出的任意资产价格满足的偏微分方程 [27], 可得

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_I}{\partial t} + (r - q) I \frac{\partial C_I}{\partial I} + [\alpha(\theta - V) + \lambda] \frac{\partial C_I}{\partial V} \\ + \frac{VI^2}{2} \frac{\partial^2 C_I}{\partial I^2} + \rho \xi IV \frac{\partial^2 C_I}{\partial I \partial V} + \frac{\xi^2 V}{2} \frac{\partial^2 C_I}{\partial V^2} = r C_I. \end{aligned} \quad (26)$$

令 $I = e^x$, $V = e^y$, 则 $x = \ln I$, $y = \ln V$, $-\infty < x < +\infty$, $-\infty < y < +\infty$, 则

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_I}{\partial t} = -\frac{1}{2} e^y \frac{\partial^2 C_I}{\partial x^2} - \left(r - q - \frac{1}{2} e^y\right) \frac{\partial C_I}{\partial x} \\ - \rho \xi \frac{\partial^2 C_I}{\partial x \partial y} - \frac{1}{2} \xi^2 e^{-y} \frac{\partial^2 C_I}{\partial y^2} \\ - \left\{ [\alpha(\theta - e^y) + \lambda] e^{-y} - \frac{1}{2} \xi^2 e^{-y} \right\} \\ \times \frac{\partial C_I}{\partial y} + r C_I, \end{aligned} \quad (27)$$

得带随机波动率的哈密顿量 H_{SV} 如下:

$$\begin{aligned} H_{SV} = -\frac{e^y}{2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \left(\frac{e^y}{2} - r + q\right) \frac{\partial}{\partial x} \\ - \rho \xi \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} - \frac{\xi^2 e^{-y}}{2} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \\ + \left\{ \frac{\xi^2}{2} - [\alpha(\theta - e^y) + \lambda] \right\} e^{-y} \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (28)$$

由 $\langle x|p \rangle = e^{ipx}$, $\langle y|p \rangle = e^{ipy}$, 可将 (28) 式转化为量子场论下的哈密顿量,

$$\begin{aligned} H_{SV} = \frac{e^y}{2} p_x^2 + \left(\frac{e^y}{2} - r + q\right) ip_x + \rho \xi p_x p_y \\ + \frac{1}{2} \xi^2 e^{-y} p_y^2 \\ + \left\{ \frac{1}{2} \xi^2 - [\alpha(\theta - e^y) + \lambda] \right\} e^{-y} ip_y, \end{aligned} \quad (29)$$

则, 费曼定价核

$$\begin{aligned} \langle x, y | e^{-\varepsilon H_{SV}} | x', y' \rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} \langle x, y | e^{-\varepsilon H_{SV}} | p_x, p_y \rangle \langle p_x, p_y | x', y' \rangle \\ = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dp_x}{2\pi} \frac{dp_y}{2\pi} e^{ip_x(x-x')} e^{ip_y(y-y')} e^{-\varepsilon H_{SV}}, \end{aligned} \quad (30)$$

其中,

$$\begin{aligned} ip_x(x - x') + ip_y(y - y') - \varepsilon H_{SV} \\ = ip_x \left[x - x' + \varepsilon(r - q) - \frac{\varepsilon}{2} e^y \right] \\ + ip_y \left\{ y - y' + \varepsilon e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^y) + \lambda - \frac{1}{2} \xi^2 \right] \right\} \\ - \varepsilon \left(\frac{e^y}{2} p_x^2 + \rho \xi p_x p_y + \frac{1}{2} \xi^2 e^{-y} p_y^2 \right). \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned} E = x - x' + \varepsilon(r - q) - \frac{\varepsilon}{2} e^y, \\ F = y - y' + \varepsilon e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^y) + \lambda - \frac{1}{2} \xi^2 \right], \\ O = \begin{bmatrix} e^y & \rho \xi \\ \rho \xi & \xi^2 e^{-y} \end{bmatrix}, \end{aligned}$$

进行变量替换, 并由量子场论下的二维高斯积分, 则可得

$$\begin{aligned} L_{SV} = -\frac{1}{2\varepsilon} [E \quad F] \frac{1}{\varepsilon \xi^2 (1 - \rho^2)} \begin{bmatrix} \xi^2 e^{-y} & -\rho \xi \\ -\rho \xi & e^y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \\ F \end{bmatrix} \\ = -\frac{1}{2\varepsilon^2 (1 - \rho^2)} \left(e^{-y} E^2 - \frac{2\rho}{\xi} EF + \frac{e^y}{\xi^2} F^2 \right) + o(\varepsilon) \\ \equiv L_0 + L_x, \end{aligned} \quad (31)$$

其中,

$$\begin{aligned} L_0 = -\frac{e^y}{2\xi^2} \left\{ \frac{\delta y}{\varepsilon} + e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^y) + \lambda - \frac{1}{2} \xi^2 \right] \right\}^2, \\ L_x = -\frac{1}{2(1 - \rho^2)} \left\{ e^{-\frac{y}{2}} \left(\frac{\delta x}{\varepsilon} + r - q - \frac{e^y}{2} \right) \right. \\ \left. - \frac{e^{\frac{y}{2}} \rho}{\xi} \left\{ \frac{\delta y}{\varepsilon} + e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^y) + \lambda - \frac{1}{2} \xi^2 \right] \right\} \right\}^2. \end{aligned}$$

当 $\varepsilon \rightarrow 0$ 时, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \langle x_i, y_i | e^{-\varepsilon H_{SV}} | x_{i-1}, y_{i-1} \rangle = \delta(x_i - x_{i-1}) \delta(y_i - y_{i-1}) + o(\varepsilon)$. 作用量为

$$A_{SV} = \varepsilon \sum_{i=1}^N L_{SV}(i) + o(\varepsilon) \equiv A_0 + A_x. \quad (32)$$

由 L_{SV} 的公式可知, A_{SV} 是 x_i 的二次型和 y_i 的非线性函数, 因此原理上可以精确地对股指价格 x_i

进行路径积分,

$$\begin{aligned}
 p_{\text{SV}}(x, y, \tau; x') &= \int_{-\infty}^{+\infty} dy' p_{\text{SV}}(x, y, \tau; x', y') \\
 &= \lim_{N \rightarrow \infty} \int DXDY e^{A_{\text{SV}}} \\
 &= \int DY e^{A_0} \left[\int DX e^{A_x} \right] \\
 &\equiv \int DY e^{A_0} Q, \tag{33}
 \end{aligned}$$

其中, $Q = \int DX e^{A_x}$,

$$\begin{aligned}
 L_x(i) &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)} \left(e^{-\frac{y_i}{2}} \left(\frac{\delta x_i}{\varepsilon} + r - q - \frac{e^{y_i}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{\frac{y_i}{2}} \rho}{\xi} \left\{ \frac{\delta y_i}{\varepsilon} + e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) + \lambda - \frac{\xi^2}{2} \right] \right\} \right)^2 + o(\varepsilon) \\
 &= -\frac{e^{-y_i}}{2(1-\rho^2)} \left(\left(\frac{\delta x_i}{\varepsilon} + r - q - \frac{e^{y_i}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{e^{y_i} \rho}{\xi} \left\{ \frac{\delta y_i}{\varepsilon} + e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) + \lambda - \frac{\xi^2}{2} \right] \right\} \right)^2 + o(\varepsilon).
 \end{aligned}$$

令

$$\begin{aligned}
 c_i &= r - q - \frac{e^{y_i}}{2} \\
 &\quad - \frac{e^{y_i} \rho}{\xi} \left\{ \frac{\delta y_i}{\varepsilon} + e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) + \lambda - \frac{\xi^2}{2} \right] \right\},
 \end{aligned}$$

则

$$A_x = -\frac{1}{2\varepsilon(1-\rho^2)} \sum_{i=1}^N e^{-y_i} (x_i - x_{i-1} + \varepsilon c_i)^2. \tag{34}$$

变量替换, 令 $x_i = z_i - \varepsilon \sum_{j=1}^i c_j$, $dx_i = dz_i$, $i = 1, 2, \dots, N-1$, 由原边界条件: $x_0 = x'$, $x_N = x$, 得新边界条件为 $z_0 = x'$, $z_N = x + \varepsilon \sum_{j=1}^N c_j$,

$$A_x \equiv A_z = -\frac{1}{2\varepsilon(1-\rho^2)} \sum_{i=1}^N e^{-y_i} (z_i - z_{i-1})^2, \tag{35}$$

$$\begin{aligned}
 Q &= \int DX e^{A_x} = \frac{e^{-y_N/2}}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\rho^2)}} \\
 &\quad \times \prod_{i=1}^{N-1} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz_i e^{-y_i/2}}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\rho^2)}} e^{A_z}. \tag{36}
 \end{aligned}$$

通过高斯积分求解并借鉴 Heston 的处理方式, 假定波动率风险的市场价格仅与 $V(t)$ 相关, 基

于风险中性的分析框架下, 投资者不要求风险补偿, 令 $\lambda = 0$. 则, 随机波动率下费曼定价核的解为

$$p_{\text{SV}}(x, y, \tau; x') = \int DY \frac{e^{A_0 + A_1}}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\rho^2) \sum_{i=1}^N e^{y_i}}}, \tag{37}$$

其中,

$$\begin{aligned}
 A_0 &= \varepsilon L_0 = -\frac{\varepsilon}{2\xi^2} \sum_{i=1}^N \left\{ e^{y_i} \frac{\delta y}{\varepsilon} + \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) - \frac{1}{2}\xi^2 \right]^2 \right\}, \\
 A_1 &= -\frac{1}{2(1-\rho^2)\varepsilon} \sum_{i=1}^N e^{y_i} \left(x - x' + \varepsilon \sum_{i=1}^N \left(r - q - \frac{e^{y_i}}{2} \right) \right. \\
 &\quad \left. - \frac{\rho}{\xi} \sum_{i=1}^N e^{y_i} \left\{ \delta y_i + \varepsilon e^{-y_i} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) - \frac{\xi^2}{2} \right] \right\} \right)^2,
 \end{aligned}$$

A_1 是 DX 路径积分的结果.

将费曼定价核与支付函数的乘积在 x' 的所有可能取值范围内进行积分, 可得欧式股指看涨期权价格为

$$C_I = \int_{-\infty}^{+\infty} p_{\text{SV}} g(x') dx'. \tag{38}$$

至此, 本文推导得到随机波动率费曼路径积分股指期权定价模型 (38) 式. 费曼定价核包含了从时间 T 到 t 的股指的所有价格可能运动路径的信息, 是风险中性条件下股指期权定价的条件概率. 从费曼路径积分原理以及随机波动率费曼路径积分股指期权定价模型的推导过程可以看到, 随机波动率下的费曼定价核是股指价格以及方差从时间 T 到 t 的所有可能运动路径的总的几率幅. 从 (38) 式可以看到, 费曼路径积分股指期权定价模型的核心在于求解随机波动率定价核 p_{SV} .

4 基于恒指期权的实证研究

由于沪深 300 股指期权的仿真交易不够活跃, 数据存在诸多异常值, 不适合做实证研究. 鉴于沪港通和港股通的相继实施, 香港金融市场与上海金融市场之间的相关性越来越明显, 因此, 本文采用恒生指数期权的历史数据进行实证研究.

4.1 样本数据选取及数据来源

为检验模型预测效果, 以 2016 年 1 月 1 日至 2018 年 11 月 9 日为样本内数据, 以 2018 年 11 月

10日至2018年12月23日为样本外数据. 本文预测30d的价格, 主要是考虑到有些期权即将到期, 其时间价值的衰减速度随着到期日的临近逐渐加快, 这会对定价产生非常大的影响. 为分析模型效果, 将Heston模型作为对照组, 所有参数和市场数据都一致.

鉴于期权价格与其标的资产价格之间是一一对应的关系, 而本文采用恒指期权的历史收盘价数据检验模型的适用性, 对应地采用恒生指数日收盘价的对数作为 x 的代理变量, 并以方差的对数作为 y 的代理变量. 考虑到历史波动率的不足, 本文采用指数移动加权平均模型 (exponential weighted moving average, EWMA) 重新计算方差. 以香港银行同业拆借利率 (Hongkong inter bank offered rate, HIBOR) 作为无风险利率的代理变量. 恒指日收盘价、恒指股息率、香港银行同业拆借利率 HIBOR、恒指期权日收盘价数据均来自 Wind 金融终端.

4.2 模型的参数估计

由于传统参数估计方法需要的前提条件较多, 且随机波动率模型中存在不可观测变量, 模型的似然函数涉及高维积分^[33], 马尔可夫链蒙特卡罗模拟方法 (Markov chain Monte Carlo, MCMC) 较传统的参数估计方法而言, 在尽量纳入市场数据的同时可以免去似然函数的推导过程. 对于某个分布 $\pi(\theta)$, 一般情况下, 无论初始状态 θ_0 取何种分布, 在经过足够的迭代次数后, 马尔可夫链将逐渐忽略其初始状态, 基于细致平衡条件 (detailed balance condition)^[34] θ_n 将收敛到平稳分布. 因此, 本文将采用易于实现的 MCMC 参数估计方法, 运用 Winbugs 软件进行参数估计.

由于历史波动率的计算公式赋予计算周期内的所有时间距离等权重, 使得波动率与实际值存在偏差. 恒指期权属于现货期权, 其交易不如期货期权活跃, 难以满足 GARCH 模型对参数估计的需要, 而指数移动加权平均 (EWMA) 模型 (EWMA 模型为 $\sigma_n^2 = (1-w) \sum_{i=1}^l w^{i-1} u_{n-i}^2 + w^l \sigma_{n-l}^2$, 其中, σ 为波动率, u 为变化率, w 为介于 0 与 1 之间的某一常数. 当 l 很大时, $w^l \sigma_{n-l}^2$ 项趋于零, 而对应于 u 的权重以 w 速度递减) 对价格的连续性要求较弱. 鉴于摩根在 1994 年发表的 RiskMetrics 数

据中采用 $w = 0.94$, 并且研究表明这一权重所预测得到的方差与实际方差非常接近. 因此, 本文取权重为 $w = 0.94$, 时间窗口为 $l = 150$, 计算恒指收盘价自 1964 年 7 月 31 日至 2018 年 12 月 21 日的方差, 作为恒指方差的代理变量. 以所有计算得到的方差的均值作为方差的长期均值的代理变量, 可得 $\theta = 0.0857$. 虽然从方差的历史走势 (见图 1) 来看, 有不少方差数值较大, 但均迅速调整到较小的值.

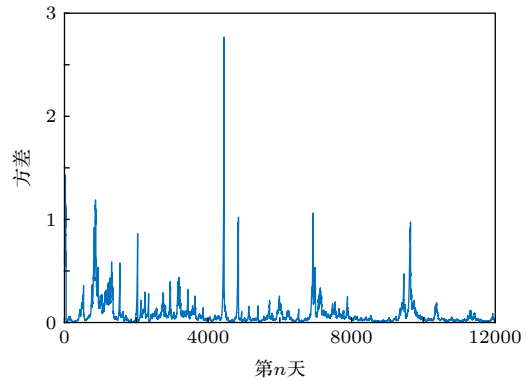


图 1 EWMA 模型得到的日方差图

Fig. 1. Daily variance diagram from EWMA model.

至此, 待估计参数只剩下 α, ξ, ρ . 令 $x(t) = \ln I(t)$, (25) 式经伊藤引理变换, 并进行欧拉离散化后, 得

$$\begin{cases} x_{t+\Delta t} - x_t = \left(\mu_t - q_t - \frac{1}{2} V_t \right) \Delta t + \sqrt{V_t} Z_1 \sqrt{\Delta t}, \\ V_{t+\Delta t} - V_t = \alpha (\theta - V_t) \Delta t + \xi \sqrt{V_t} Z_2 \sqrt{\Delta t}, \\ Z_1 Z_2 \Delta t = \rho \Delta t, \end{cases} \quad (39)$$

其中 Z_1, Z_2 均服从标准正态分布. 假设 $\alpha \sim N(5.5, 0.01)$, $\rho \sim \Gamma(2.5, 0.1)$, $\xi \sim N(1, 0.0625)$. 为了获取稳定的参数估计结果, 本文通过设置两组初始值形成两个迭代链, 迭代 100000 次, 并舍弃前 4000 次迭代值, 通过观察各参数的核密度图 (见图 2) 均呈单峰情形, 可见参数估计结果是稳定的.

迭代 100000 次, 舍弃前面 4000 次, 样本量为 192000, 参数估计结果列于表 1, α, ρ, ξ 参数估计结果依次为 3.393, 0.4201, 1.574.

至此, 得到随机波动率费曼路径积分股指期货定价模型所需的所有参数, 分别为 $\theta = 0.0857$, $\alpha = 3.393$, $\rho = 0.4201$, $\xi = 1.574$. 接下来, 本文将基于该组参数进行价格预测.

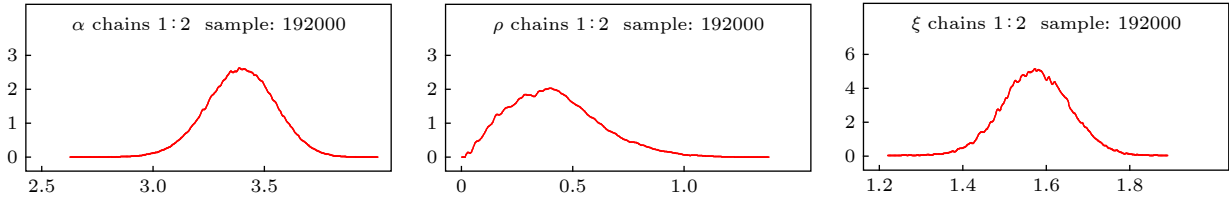


图 2 核密度图

Fig. 2. Kernel density.

表 1 参数估计结果

Table 1. Parameter estimates.

Node	Mean	sd	MC error	Quantile			Start	Sample
				2.50%	50%	97.50%		
α	3.393	0.1539	0.001499	3.082	3.395	3.685	4001	192000
ρ	0.4201	0.2032	0.007068	0.09408	0.4011	0.8774	4001	192000
ξ	1.574	0.07977	8.65×10^{-4}	1.416	1.574	1.73	4001	192000

4.3 费曼路径积分股指期货期权定价模型的算法设计

令 $y = \ln V$, 则 (25) 式的方差的平方根过程由伊藤引理可得

$$dy = \left[\alpha(\theta - e^y)e^{-y} - \frac{\xi^2}{2}e^{-y} \right] dt + \xi e^{-\frac{y}{2}} dW_2$$

$$= e^{-y} \left[\alpha(\theta - e^y) - \frac{\xi^2}{2} \right] dt + \xi e^{-\frac{y}{2}} dW_2. \quad (40)$$

将 (40) 式进行欧拉离散化, 可得

$$\delta y_i = e^{-y_i} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) - \frac{\xi^2}{2} \right] \varepsilon + \xi e^{-\frac{y_i}{2}} Z \sqrt{\varepsilon}, \quad (41)$$

其中, $Z \sim N(0, 1)$, $\delta y_i = y_i - y_{i-1}$, 由于 $\tau = T - t$, 而预测的是 t 时刻的期权价格, 所以, 时间步长为 $-\varepsilon$. 由此可见, δy_i 为正态随机变量, 并且其均值为 $\varepsilon e^{-y_i} \left[-\alpha(\theta - e^{y_i}) + \frac{\xi^2}{2} \right]$, 方差为 $\xi^2 \varepsilon e^{-y_i}$, 且其概率密度函数的表达式如下:

$$f_i = \frac{e^{y_i/2}}{\xi \sqrt{2\pi\varepsilon}} \exp \left(-\frac{\varepsilon e^{y_i}}{2\xi^2} \left\{ \frac{\delta y}{\varepsilon} + e^{-y_i} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) - \frac{\xi^2}{2} \right] \right\}^2 \right). \quad (42)$$

离散化过程的联合概率密度为

$$f = \prod_{i=1}^{N-1} f_i = \left(\prod_{i=1}^{N-1} \frac{e^{y_i/2}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}\xi} \right) e^{A_0}. \quad (43)$$

设 Y 为由变量 y_i 构成的数组, 因此 \mathbf{Y} 为 N 维矩阵, 则其概率密度函数为

$$p(\mathbf{Y}) = \left(\prod_{i=1}^{N-1} \frac{e^{y_i/2}}{\sqrt{2\pi\varepsilon}\xi} \right) e^{A_0}. \quad (44)$$

从 (44) 式可以看到, 概率密度函数 $p(\mathbf{Y})$ 虽然看起来较为复杂, 但其实质为 y_i 随机游走的概率分布.

设 $p_{\text{sv}}(x, y, \tau; x') = p(\mathbf{Y}) \cdot g(\mathbf{Y})$, 则

$$g(\mathbf{Y}) = \frac{e^{A_1}}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\rho^2) \sum_{i=1}^N e^{y_i}}}. \quad (45)$$

费曼定价核重述为

$$p_{\text{sv}}(x, y, \tau; x') = \int d\mathbf{Y} \left(\prod_{i=1}^N e^{y_i/2} \right) \frac{e^{A_0+A_1}}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\rho^2) \sum_{i=1}^N e^{y_i}}}, \quad (46)$$

其中, $d\mathbf{Y} = dy_0 \prod_{i=1}^{N-1} \frac{dy_i}{\xi \sqrt{2\pi\varepsilon}}$.

如图 3 所示, 将剩余到期日平均地分成 N 个 ε , 对应地插入 $N-1$ 个隔板, 在每个隔板上随机地取尽可能多的点 (图中只呈现了 8 个点). 在每个隔板上随机地各取一个点相连接起来, 即可生成一条路径, 如图 3 中有 3 条相互独立的路径. 可见, 我们无法知道具体的路径走势, 唯一可以确定的是, 根据大数定律得到的在每个隔板上所有随机点的平均值. 在费曼路径积分中, 假定每条路径都是等可能的, 那么对于模拟得到的所有的 y_i 可以由大数定律得到确定的均值. 基于此, 本文在算法设计上做了简化处理: 路径的随机生成是无法预知的, 但

可以确定的是在每个预测点的逼近的均值, 而这个均值是所有可能的路径共同决定的结果, 因此可以得到取均值后的费曼定价核.

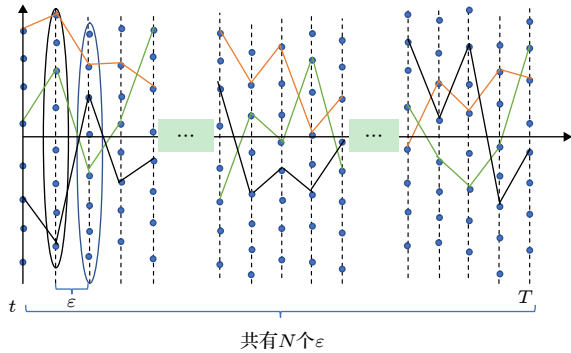


图 3 路径图
Fig. 3. Path diagram.

2000年 Baaquie 等^[35]指出, 在路径积分期权定价中, 时间步长不宜过小. 为此, 借鉴其做法, 步数设为 $N = 128$ 步, 时间步长 $\varepsilon = \tau/128$, 其中 τ 为剩余交易日.

δy_i 的分布已知为正态分布, 因此可以用蒙特卡罗模拟在每个时间步长各模拟 10000 个 δy 的值, 并分别取均值得到 $\overline{\delta y_1}, \overline{\delta y_2}, \overline{\delta y_3}, \dots, \overline{\delta y_N}$, 则 $y' = y_t + \sum_N \overline{\delta y_i}$, 其中, y_t 为 EWMA 模型所得的方差的对数.

计算

$$t_1 = \sum_{i=1}^N e^{y_i},$$

$$t_2 = \frac{\rho}{\xi} \sum_{i=1}^N e^{y_i} \left\{ \delta y_i + \varepsilon e^{-y_i} \left[\alpha(\theta - e^{y_i}) - \frac{1}{2} \xi^2 \right] \right\},$$

$$A_1 = -\frac{1}{2(1-\rho^2)\varepsilon t_1} \left\{ x - x' + \varepsilon \sum_{i=1}^N (r - q) - \frac{\varepsilon t_1}{2} - t_2 \right\},$$

得到 $g(\mathbf{Y}) = \frac{e^{A_1}}{\sqrt{2\pi\varepsilon(1-\rho^2) \sum_{i=1}^N e^{y_i}}}, p_{sv}(x, y, \tau; x')$

$= p(\mathbf{Y}) g(\mathbf{Y})$ (注: $p(\mathbf{Y})$ 在前面的讨论中已经说明其实质为 y_i 随机游走的概率分布, 本文基于此做蒙特卡罗模拟, 得到 y_i 并代入 $g(\mathbf{Y})$ 以得到 $g(\mathbf{Y})$ 的值, 因此无需计算 $p(\mathbf{Y})$ 的值).

期权价格为 $\int_{\ln K}^{+\infty} p_{sv}(x, y, \tau; x') (e^{x'} - K) dx'$,

由于该期权价格是无穷积分形式, 不能由计算机直接求出数值解, 通过将积分方程离散化, 在 x' 的可能取值范围内 (本文取 $[1, 15]$, e 与 e^{15} 之间相差超过 120 万倍, 就市场数据来说该区间范围可以包含市场上所有可能极端情形), 求曲线 $p_{sv}(x, y, \tau; x') \times \max[(e^{x'} - K), 0]$ 的面积, 即可得到期权价格.

4.4 基于算法设计的模型效果比较

4.4.1 相同到期日不同执行价格下的价格预测

在到期日均为 2019 年 3 月时, 从图 4 至图 6 可以看到, 不论是实值期权 ($K < 25800$)、平值期权 ($K = 25800$) 还是虚值期权 ($K > 25800$), 费曼路径积分股指期货期权定价模型与 Heston 模型都能较好地刻画市场价格的走势. 但是, 从定价精度来看, 费曼路径积分股指期货期权定价模型对于市场价格的拟合曲线都较 Heston 模型更为准确.

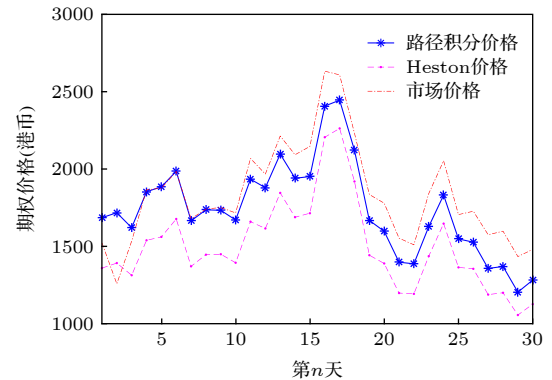


图 4 实值期权 (以 $K = 25200$ 为例)

Fig. 4. In-the-money option ($K = 25200$ as an example).

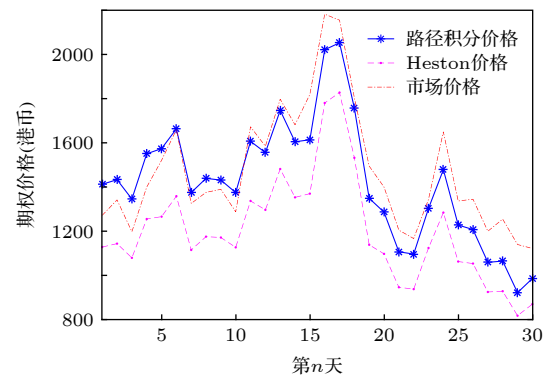


图 5 平值期权 ($K = 25800$)

Fig. 5. At-the-money option ($K = 25800$ as an example).

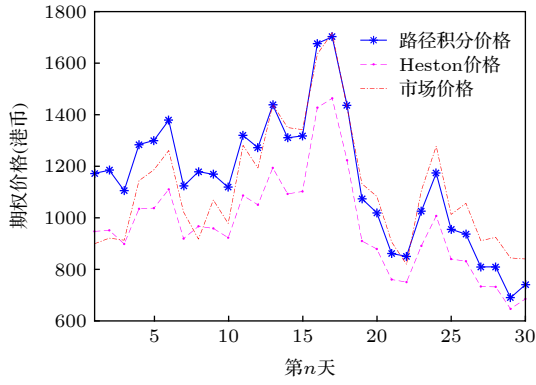


图 6 虚值期权 (以 $K = 26400$ 为例)

Fig. 6. Out-of-the-money option ($K = 26400$ as an example).

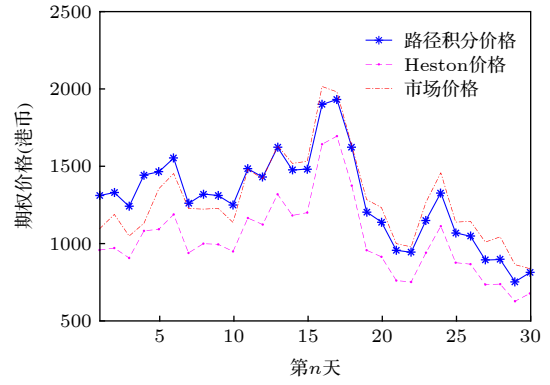


图 7 到期日为 2019 年 2 月时两模型的平值期权价格对比图

Fig. 7. A comparison of the two models with maturity date of February 2019.

4.4.2 相同执行价格不同到期日下的价格预测

由于平值期权的交易更为活跃, 对其进行价格预测更具有应用价值. 因此, 本文采用执行价格为 25800 的平值期权, 对到期日分别为 2019 年 2 月、2019 年 3 月、2019 年 6 月、2019 年 9 月的恒指期权, 进行价格预测. 为了保持前后对比的一致性, 仍然以 2018 年 11 月 10 日至 2018 年 12 月 23 日为样本外数据, 预测恒指期权 30 天的价格. 由于到期日不同, 剩余到期日也发生了改变, 本文在实证的基础上发现步数取 128 步的时候模型是较为稳定的, 这与 Baaquie 等^[35]2000 年的研究结果一致. 通过调整对应的时间单位长度, 发现在时间步长为 0.001—0.002 时, 模型的预测效果较好.

可以看到在到期日为 2019 年 2 月 (图 7)、2019 年 3 月 (图 5)、2019 年 9 月 (图 8) 时, 费曼路径积分股指期货期权定价模型的定价精度明显较 Heston 模型更为精确. 在到期日为 2019 年 6 月 (图 9) 的时候, 两种模型的定价效果基本持平.

4.5 稳健性检验

为进一步增强实证结果的说服力, 接下来对随机波动率下费曼路径积分股指期货期权定价模型以及 Heston 模型的股指期货期权定价效果进行稳健性检验. 本文使用均方根误差 (root mean squared error, RMSE) 和 Theil 不等系数 (Theil inequality coefficient) 两个评价指标对这两个模型的定价效果进行评价. 两个评价指标的计算公式分别为 (47) 和 (48) 式.

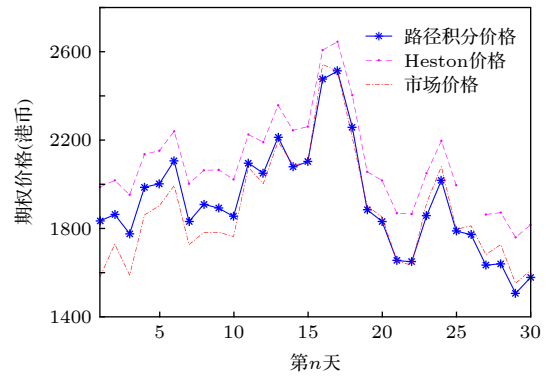


图 8 到期日为 2019 年 9 月时两模型的平值期权价格对比图

Fig. 8. A comparison of the two models with maturity date of September 2019.

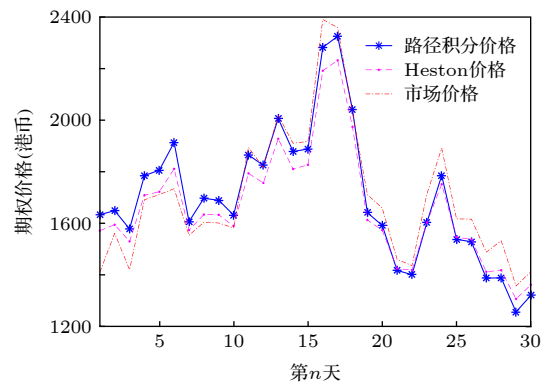


图 9 到期日为 2019 年 6 月时两模型的平值期权价格对比图

Fig. 9. A comparison of the two models with maturity date of June 2019.

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - Y_t)^2}, \quad (47)$$

$$U = \frac{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n (\hat{Y}_t - Y_t)^2}}{\sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n \hat{Y}_t^2 + \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n Y_t^2}}}. \quad (48)$$

均方根误差又称为标准误差,用于衡量预测的绝对误差,一般而言,误差值越小说明预测准确度越高. 其对误差的极端情况的反映极为敏感,因此能够较好地反映模型预测的精确度. 均方根误差是有量纲的评价指标,对于费曼路径积分股指期货定价与 Heston 模型期权定价的效果比较来说,在单位为港币的情况下,可以直观地看到其在经济意义上与市场价格的标准误差. Theil 不等系数介于 0 和 1 之间,数值越小说明模型的预测效果越好. Theil 不等系数剔除了单位的影响,是一种无量纲的评价指标. 因此,结合这两个评价指标可以从有量纲与无量纲这两种情形,对费曼路径积分定价模型及 Heston 模型的定价效果进行评价.

从图 10 以及图 11 可以直观地看到在期权到期日为 2019 年 3 月时,不论是实值期权 ($K < 25800$)、平值期权 ($K = 25800$) 还是虚值期权 ($K > 25800$),费曼路径积分股指期货定价模型的 RMSE 及 Theil 不等系数都较 Heston 期权定价模型来得低. 可见,在相同到期日不同执行价格下,费曼路径积分股指期货定价模型在价格预测上较 Heston 模型有了明显的改进.

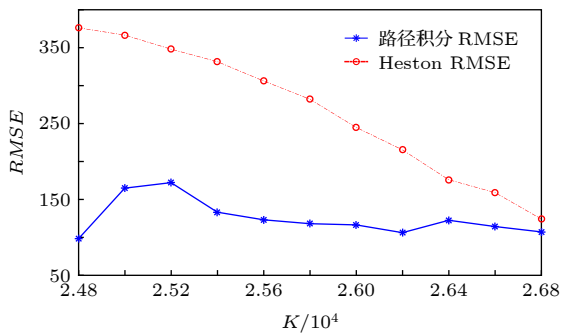


图 10 相同到期日不同执行价格下两种模型的 RMSE 对比图

Fig. 10. RMSE for the two models on the same due date.

从表 2 评价指标值可以看到,在到期日为 2019 年 6 月时,费曼路径积分股指期货定价模型与 Heston 模型的 RMSE 与 Theil 不等系数差别不大,但在其他到期日下,费曼路径积分股指期货定

价模型的评价指标值都远小于 Heston 模型. 可见,费曼路径积分股指期货定价模型显著较 Heston 模型准确.

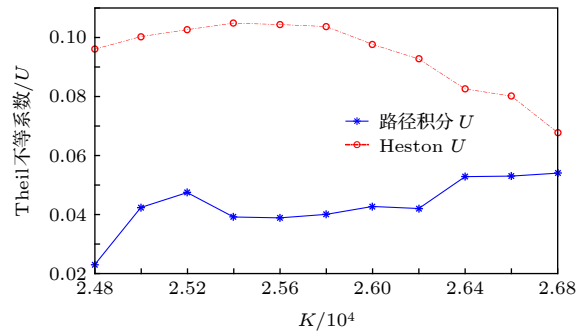


图 11 相同到期日不同执行价格下两种模型的 Theil 不等系数对比图

Fig. 11. Theil inequality coefficients for the two models on the same maturity date.

表 2 $K = 25800$ 下两种模型不同到期日下的评价指标值

Table 2. $K = 25800$, the evaluation index values of the two models under different maturity dates.

到期日	RMSE		Theil不等系数	
	费曼路径积分	Heston	费曼路径积分	Heston
2019年2月	113.1631	269.8452	0.0429	0.1138
2019年3月	118.0685	282.0939	0.0401	0.1037
2019年6月	94.7388	87.9670	0.0275	0.0259
2019年9月	88.4829	230.9288	0.0230	0.0584

5 结 论

从以上研究可以看到, Heston 模型仍然是基于传统的 BS 模型的思路, 结合特征函数法求解原本 BS 模型中的 $N(d_1)$ 与 $N(d_2)$, 其所求期权价格的闭式解基于复杂的偏微分方程求解过程. 而本文所构建的随机波动率股指期货定价模型仅由费曼定价核和支付函数的无穷维积分形式构成, 费曼定价核包含了股指期货定价所需的全部信息, 通过本文的实证研究, 发现该定价核的数值解容易通过计算机运行模拟得到. 相比于 Heston 模型而言, 不需要其他的边界条件. 本文提出的模型, 核心在于求解费曼定价核, 本文基于费曼路径生成原理与大数定律的关系, 运用 Matlab 模拟得到均值定价核, 可以大大优化股指期货价格的求解过程. 基于恒指期权的实证结果表明, 在相同到期日下, 不论是实值、平值还是虚值期权, 费曼路径积分股指期货定

价模型在定价精度上显著优于 Heston 模型. 在平值期权下, 对不同到期日的期权进行价格预测, 费曼路径积分股指期货期权定价模型仍然较 Heston 模型来得精确. 可见, 随机波动率费曼路径积分股指期货期权定价模型在价格预测上是稳健的, 并且可以带来较好的预测效果.

基于以上研究, 可以看到费曼路径积分股指期货期权定价模型在定价处理上具有很大的灵活性. 根据大数定律以及费曼路径的生成原理, 通过蒙特卡罗模拟方差运动路径. 在得到均值定价核的基础上, 将均值定价核与支付函数的乘积对 x' 进行离散化处理, 求均值定价核与支付函数的乘积的曲线面积以得到期权价格的数值解, 从而优化了期权价格计算过程, 并大大提高了股指期货的定价精度.

采用费曼路径积分方法构建股指期货期权定价模型, 相比于传统的期权定价模型 (如 BS, Heston 模型), 其显著的优点体现在: 首先, 路径积分在解决多变量问题上具有优越性, 费曼定价核代表所有的定价信息, 对其展开变形可以将一维情形拓展到多维情形, 因此可以用路径积分的方法将股指收盘价和标的股指波动率的变动同时考虑进去, 进而可以改进经典 B-S-M 模型; 其次, 基于费曼路径生成原理与大数定律之间的关系, 通过 Matlab 软件得到均值定价核, 不仅优化了计算过程也显著提高了定价精度.

本文构建的费曼路径积分股指期货期权定价模型, 对于提高股指期货的定价精度具有重要的理论意义, 丰富了股指期货的定价手段, 开拓了更为广阔的研究视角. 然而, 本文在对波动率风险的市场价格上的讨论较为简单, 今后可以对此展开更为深入的研究.

参考文献

- [1] Pan J 2002 *J. Financ. Econ.* **63** 3
- [2] Eraker B, Johannes M, Polson N 2003 *J. Financ.* **58** 1269
- [3] Broadie M, Chernov M, Johannes M 2007 *J. Financ.* **62** 1453

- [4] Yang Z Y, Chen L N 2001 *J. Econ. Res.* **47** 61 (in Chinese) [杨智元, 陈浪南 2001 *经济研究* **47** 61]
- [5] Duan J C, Zhang H 2001 *J. Bank Financ.* **25** 1989
- [6] Wei J, Han L Y 2016 *J. Appl. Stat. Manag.* **33** 550 (in Chinese) [魏洁, 韩立岩 2016 *数理统计与管理* **33** 550]
- [7] Yang X L, Wang P 2018 *J. Appl. Stat. Manag.* **37** 162 (in Chinese) [杨兴林, 王鹏 2018 *数理统计与管理* **37** 162]
- [8] Bailey W, Stulz R M 1989 *J. Financ. Quant. Anal.* **24** 1
- [9] Tan D D 2008 *Stat. Inform. Forum* **23** 40 (in Chinese) [谭朵朵 2008 *统计与信息论坛* **23** 40]
- [10] Han L Y, Ye H, Li W 2012 *Chinese J. Manag. Sci.* **20** 23 (in Chinese) [韩立岩, 叶浩, 李伟 2012 *中国管理科学* **20** 23]
- [11] Fan P Y, Chen M 2014 *Price Theor. Pract.* **34** 96 (in Chinese) [樊鹏英, 陈敏 2014 *价格理论与实践* **34** 96]
- [12] Dash J 2004 *Quantitative Finance and Risk Management A Physicist's Approach* (Singapore: World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.) pp499–638
- [13] Baaquie B E 1997 *J. Phys.* **17** 1733
- [14] Linetsky V 1998 *Computational Economics* **11** 129
- [15] Baaquie B E, Coriano C, Srikant M 2002 *Quant. Financ.* **15** 333
- [16] Baaquie B E 2004 *Quantum Finance* (Singapore: Cambridge University Press) pp78–116
- [17] Baaquie B E, Coriano C, Srikant M 2004 *Phys. A* **334** 531
- [18] Baaquie B E 2013 *Comput. Math. Appl.* **65** 1665
- [19] Rosa-Clot M, Taddei S 1999 *Quant. Financ.* **5** 123
- [20] Kakushadze Z 2015 *Quant. Financ.* **15** 1759
- [21] Issaka A, Sengupta I 2017 *J. Appl. Math. Comput.* **54** 159
- [22] Ma C, Ma Q, Yao H, Hou T 2018 *Phys. A* **494** 87
- [23] Paolinelli G, Arioli G 2018 *Phys. A* **517** 499
- [24] Chen Z Q 2003 *Acta Math. Sci.* **23** 115 (in Chinese) [陈泽乾 2003 *数学物理学报* **23** 115]
- [25] Chen L M, Qiu W H 2007 *Chinese J. Manag. Sci.* **15** 12 (in Chinese) [陈黎明, 邱莞华 2007 *中国管理科学* **15** 12]
- [26] Wang P, Wei Y 2014 *J. Manag. Sci. China* **17** 40 (in Chinese) [王鹏, 魏宇 2014 *管理科学学报* **17** 40]
- [27] Heston S L 1993 *Rev. Financ. Stud.* **6** 327
- [28] Scott L O 1987 *J. Financ. Quant. Anal.* **22** 419
- [29] Merville L J, Piepeta D R 1989 *J. Financ. Econ.* **24** 193
- [30] Stein E M, Stein J C 1991 *Rev. Financ. Stud.* **4** 727
- [31] Cox J, Ingersoll J, Ross S 1985 *Econometrica* **53** 385
- [32] Shreve S (translated by Chen Q H, Chen D H) 2008 *Stochastic Calculus for Finance* (Vol. 2) (Shanghai: Shanghai University of Finance and Economics Press) pp192–193 (in Chinese) [施里夫 S 著(陈启宏, 陈迪华 译) 2008 *金融随机分析* (上海: 上海财经大学出版社)第192–193页]
- [33] Yang A J, Jiang X J, Lin J G, Liu X X 2016 *J. Appl. Stat. Manag.* **35** 817 (in Chinese) [杨爱军, 蒋学军, 林金官, 刘晓星 2016 *数理统计与管理* **35** 817]
- [34] Durrett R 2016 *Essentials of Stochastic Processes* (New York: Springer) pp223–250
- [35] Baaquie B E, Kwek L C, Srikant M 2000 arXiv: 0008327v1 [cond-mat] <https://arxiv.org/abs/cond-mat/0008327> [2019-5-1]

Pricing of stochastic volatility stock index option based on Feynman path integral*

Feng Ling Ji Wan-Ni[†]*(School of Economics and Management, Fuzhou University, Fuzhou 350002, China)*

(Received 10 May 2019; revised manuscript received 20 August 2019)

Abstract

Under the background that stock index options urgently need launching in China, the research on stock option pricing model has important theoretical and practical significance. In the traditional B-S-M model it is assumed that the volatility remains unchanged, which differs tremendously from the market's reality. When the market fluctuates drastically, it is difficult to realize the risk management function of stock index options. Although in the Heston model, as one of the traditional stochastic volatility option pricing models, the correlation risk between the volatility and underlying price is taken into consideration, its pricing accuracy is still to be improved. From the quantum finance perspective, in this paper we use the Feynman path integral method to explore a more practical stock index option pricing model.

In this paper, we construct a Feynman path integral pricing model of stock index options with stochastic volatility by taking Hang Seng index option as the research object and Heston model as the control group. It is found that the Feynman path integral pricing model is significantly superior to the Heston model either at different strike prices on the same expiration date or at different expiration dates for the same strike price. The stock index option pricing model constructed in this paper can give the numerical solution of Feynman's pricing kernel, and directly realizes the forecast of stock index option price. The pricing accuracy is significantly improved compared with the pricing accuracy given by the Heston model through using the characteristic function method.

The remarkable advantages of Feynman path integral stock index option pricing model are as follows. Firstly, the path integral has advantages in solving multivariate problems: the Feynman pricing kernel represents all the information about pricing and can be easily expanded from one-dimensional to multidimensional case, so the change of closing price of stock index and volatility of underlying index can be taken into account simultaneously. Secondly, based on the relationship between the Feynman path generation principle and the law of large number, the mean values of pricing kernel obtained by MATLAB not only optimizes the calculation process, but also significantly improves the pricing accuracy. Feynman path integral is the main method in quantum finance, and the research in this paper will provide reference for its further application in the pricing of financial derivatives.

Keywords: Feynman path integral, mean pricing kernel, stochastic volatility, stock index options pricing

PACS: 31.15.xk, 02.50.Ey, 87.10.Mn, 89.65.Gh

DOI: 10.7498/aps.68.20190714

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 71573043).

[†] Corresponding author. E-mail: 724755538@qq.com