

## 高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体简介

严忠波

### Higher-order topological insulators and superconductors

Yan Zhong-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 68, 226101 (2019) DOI: 10.7498/aps.68.20191101

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191101>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

在人工拓扑超导体磁通涡旋中寻找Majorana零能模

Search for Majorana zero mode in the magnetic vortex of artificial topological superconductor

物理学报. 2019, 68(13): 137401-1 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181698>

二维有机拓扑绝缘体的研究进展

Research progress of two-dimensional organic topological insulators

物理学报. 2018, 67(23): 238101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181711>

强三维拓扑绝缘体与磁性拓扑绝缘体的角分辨光电子能谱学研究进展

Angle resolved photoemission spectroscopy studies on three dimensional strong topological insulators and magnetic topological insulators

物理学报. 2019, 68(22): 227901-1 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191450>

专题：拓扑物理前沿与应用

## 高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体简介

严忠波<sup>†</sup>

(中山大学物理学院, 广州 510275)

(2019年7月18日收到; 2019年8月22日收到修改稿)

近期, 高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的概念激发了广泛关注和研究兴趣. 由于新的体-边对应关系, 在同一维度高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的边界态的维度要低于一阶 (或称传统) 拓扑绝缘体和拓扑超导体的边界态. 本文阐述了高阶拓扑物态和一阶拓扑物态的联系. 具体展示了在同一维度上如何利用对称性的破缺从一阶拓扑物态转变为高阶拓扑物态, 以及如何利用低维的一阶拓扑物态构造高维的高阶拓扑物态; 回顾了高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的研究进展. 通过对近期的研究进展的回顾, 可以看出这一新兴领域虽然研究进展迅速, 但对电子型的高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的性质的理论研究和实验研究均处在非常初级的阶段, 要对这一新兴领域有更深更全面的理解认识还有待更多的研究投入.

**关键词:** 高阶拓扑绝缘体, 高阶拓扑超导体, 体-边对应**PACS:** 61.82.Ms, 74.25.-q, 03.65.Vf**DOI:** 10.7498/aps.68.20191101

## 1 引言

寻找和理解新奇的物态并对它们进行分类是凝聚态物理发展的核心方向之一. 在二十世纪, 对物态的认识和理解的一大重要成就是朗道的相与相变理论. 根据此理论, 不同的物相由不同的局域序参数刻画, 而不同的序参数对应着不同的对称性破缺. 此理论的广泛适用性在很长一段时间内让物理学家以为所有的物态均可以由局域的序参数刻画, 而不同物态间的相变对应着不同的对称性破缺. 然而, 随着二维 Kosterlitz-Thouless 相变理论<sup>[1]</sup>的提出和强磁场下二维电子气中的整数和分数量子霍尔效应的发现<sup>[2,3]</sup>, 大家逐渐认识到存在新的物态, 且对这些物态的描述超越了朗道的相与相变理论<sup>[4]</sup>. 此类新的物态即所谓的拓扑物态. 与对称破缺有序相不同 (如铁磁相), 拓扑物态无法由局域的序参数完美刻画, 而需要利用数学中的拓扑不变量的概念. 拓扑不变量刻画的是封闭流形的全局性

质, 它最重要的特征是它只能取离散的数值而不能连续变化. 这意味着只要流形的几何没有发生突变, 如空洞的数目, 那么即使流形的几何性质在局域上发生了变化, 拓扑不变量也不会发生改变. 反映在物理上, 这对应拓扑物态存在非常稳定的物理性质. 在这方面最具代表性的例子是二维整数量子霍尔效应<sup>[2,5]</sup>. 根据半经典理论, 二维电子气的霍尔电阻应随着磁场线性增加, 然而在实验上却观察到一系列的平台<sup>[2]</sup>. 在低温下这些平台是如此地不依赖于样品的细节, 以至于现在它们被作为电阻的标准单位<sup>[6]</sup>.

拓扑物态的发现激发了广泛的关注和研究. 这一方面是由于发现拓扑物态具有非常丰富的物理, 如分数化现象, 分数统计等<sup>[7]</sup>; 另一方面则是由于拓扑物态呈现出诱人的应用前景. 在对拓扑物态的研究中, 人们发现拓扑物态存在一个普遍的特征, 即所谓的“体-边对应”. 它指如果刻画“体”的拓扑不变量非平凡, 那么在边界上将存在无能隙模式. 由于受拓扑保护, 这些无能隙模式具有无耗散或者

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [yanzhb5@mail.sysu.edu.cn](mailto:yanzhb5@mail.sysu.edu.cn)

低耗散的特征, 因而一个直接的应用就是电子器件. 整数量子霍尔效应呈现的霍尔平台即是由于边界上存在无能隙的手征模式. 这些手征模式由于无法被向后散射, 因而它们的传输没有耗散, 是理想的导电通道.

继整数和分数量子霍尔效应发现之后, 拓扑物态研究的一个重要突破来自于二维量子自旋霍尔效应 (又称为二维拓扑绝缘体) 的理论预言<sup>[8-11]</sup> 和实验证实<sup>[12]</sup>. 二维量子自旋霍尔效应是全新的拓扑物态. 由于具有时间反演对称性, 它对应的无能隙边界态总是成对出现, 且每一对的两支模式总是沿着相反方向传输<sup>[8-11]</sup>, 非常不同于整数量子霍尔效应的手征边界态. 二维量子自旋霍尔效应开启了拓扑能带理论的研究. 根据能带理论, 二维的量子自旋霍尔效应很快被推广到三维, 产生了三维拓扑绝缘体的概念<sup>[13-15]</sup>. 理论研究发现在只要求时间反演对称性的条件下, 二维和三维拓扑绝缘体能带的拓扑性质均可以用  $Z_2$  不变量刻画<sup>[9,13-15]</sup>, 这也和整数量子霍尔效应的整数分类完全不同. 另外, 在对二维拓扑绝缘体的研究中, 已认识到能带反转和自旋轨道耦合对实现拓扑绝缘体的重要性<sup>[11]</sup>. 能带反转提供了一个判断真实材料是否为拓扑绝缘体的简单判据. 在拓扑材料的预言和实验探测上, 这一简单的判据起到了非常重要的指导作用.

由于在哈密顿量的描述形式上, 绝缘体和超导体并无差异, 因此在拓扑绝缘体的概念出现之后, 拓扑超导体的概念也随之被提出. 相似地, 当超导体具有非平凡的拓扑性质时, 它的边界上也将存在无能隙模式. 不过, 一个重要的区别是拓扑绝缘体的边界态是带电的, 而拓扑超导体的边界态是电中性的. 这一区别具有重要的物理后果. 在对一维的 p-波超导体的研究中, Kitaev<sup>[16]</sup> 发现当超导体处于拓扑相时, 其每一端均存在一个稳定的 Majorana 零模, 即反粒子是自身的模式. 由于两个 Majorana 零模等价于一个狄拉克费米子, 而一个狄拉克费米子的占据和非占据两种状态可以构建一个量子比特, 这意味着一个量子比特的信息可以存储在两个分隔很远的 Majorana 零模上. 这种非局域的信息存储方式可以保证信息能够对抗环境的噪声. 另外, 研究发现 Majorana 零模具有非阿贝尔的统计<sup>[17]</sup>. 当存在多个 Majorana 零模时, 对它们进行编织操作等效于对量子比特做逻辑门操作, 因而可用于拓扑量子计算<sup>[18-20]</sup>. 正是由于在拓扑量子计算方面

的潜在应用, 近年来实现拓扑超导体和探测其中的 Majorana 零模一直是凝聚态领域最活跃的研究方向之一<sup>[21-24]</sup>.

由于哈密顿量形式上的相似, 拓扑绝缘体和拓扑超导体可以放在同一框架下进行分类. 早期的拓扑分类是根据哈密顿量是否具有时间反演对称性、粒子-空穴对称性和手征对称性 (或子格对称性)<sup>[25, 26]</sup>. 根据这三个对称性, 一共存在十个对称类<sup>[25, 26]</sup>. 在任意维度, 十个对称类中有五个对称类允许存在非平凡的拓扑相. 后来晶体对称性的重要性被认识到, 相应地产生了拓扑晶体绝缘体和拓扑晶体超导体的概念<sup>[27]</sup>. 由于晶体对称性的丰富, 拓扑物态的种类相应地也变得非常丰富. 在最新的研究中, 人们发现已知的几千万种材料中有超过百分之二十是拓扑非平凡的材料<sup>[28-30]</sup>, 展现出拓扑物态的普遍.

近年来对拓扑物态的研究进一步产生了高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的概念<sup>[31-35]</sup>. 高阶拓扑物态的“高阶”体现在其体-边对应关系上. 对  $d$  维的传统拓扑绝缘体和拓扑超导体, 我们知道其具有  $(d-1)$  维的无能隙边界态<sup>[21,36]</sup>. 如三维的拓扑绝缘体具有二维的狄拉克表面态, 二维的拓扑绝缘体具有一维的螺旋边界态. 而对一个  $d$  维的  $n$  阶拓扑物态, 其具有  $(d-n)$  维的无能隙边界态, 其中  $1 \leq n \leq d$ , 如图 1 所示. 例如, 二维二阶拓扑绝缘体具有零维的边界态, 而三维二阶拓扑绝缘体具有一维的无能隙边界态. 根据这个定义, 传统的拓扑绝缘体和拓扑超导体也被称为一阶拓扑绝缘体和一阶拓扑超导体.

由于高阶拓扑物态新的体-边对应关系允许无能隙边界态以新的方式出现, 高阶拓扑物态的概念出现之后即吸引了广泛的注意, 并在理论和实验两方面都迅速取得进展. 不过, 对高阶拓扑物态的研究目前还处在比较初级的阶段. 本文的目的即是回顾高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体截至目前的研究进展, 希望能对此前沿方向尚无深入了解的读者有所帮助. 本文第 2 节分析一阶拓扑物态和高阶拓扑物态的联系; 第 3 节回顾高阶拓扑绝缘体的研究进展; 第 4 节回顾高阶拓扑超导体的研究进展; 第 5 节给出总结和展望. 受限于作者的个人能力和偏好, 此综述不可避免地会遗漏掉对一些重要的研究工作的介绍和引用. 读者如果想获得更全面的认识, 可参阅参考文献和其中相关的文献.

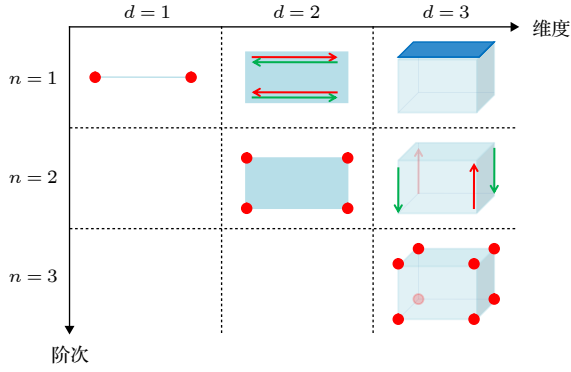


图 1 拓扑物态的边界态示意图  $n=1$  的行对应传统的拓扑物态, 其具有比系统维度低一维的无能隙边界态;  $n \geq 2$  的行对应高阶拓扑物态, 其具有比维度低  $n$  维的无能隙边界态

Fig. 1. A schematic diagram of the boundary modes of topological matter. The line with  $n=1$  corresponds to conventional topological matters which host gapless modes whose dimensions are one-dimensional lower than the system dimension. The lines with  $n \geq 2$  correspond to higher-order topological matters which host gapless modes whose dimensions are  $n$ -dimensional lower than the system dimension.

## 2 一阶拓扑物态到高阶拓扑物态

### 2.1 一阶拓扑绝缘体的体-边对应

为了方便理解高阶拓扑物态与一阶拓扑物态的联系, 先简单回顾一下一阶拓扑物态的体-边对应. 以 Bernevig-Hughes-Zhang (BHZ) 模型为例<sup>[11]</sup>, 先考虑格点哈密顿量:

$$H(k) = [M - 2B(2 - \cos k_x - \cos k_y)]\sigma_z + A \sin k_x \sigma_x s_z + A \sin k_y \sigma_y, \quad (1)$$

其中,  $\sigma_{x,y,z}$  和  $s_{x,y,z}$  为泡利矩阵, 分别作用在子能带 (subbands) 自由度和自旋自由度上; 为了简化表达式, 晶格长度在本文中自始至终设置为 1;  $A$ ,  $B$  和  $M$  为常数. 不失一般性, 我们考虑  $A$  和  $B$  均为正数. 刻画此哈密顿量的  $Z_2$  不变量<sup>[37]</sup> 具有下面的形式:

$$(-1)^{\nu} = \prod_{\Gamma_i} \xi_{\Gamma_i} = \text{sgn}(M(M-8B)(M-4B)^2), \quad (2)$$

其中  $\Gamma_i$  表示布里渊区中的时间反演不变动量点, 即  $(0,0)$ ,  $(0,\pi)$ ,  $(\pi,0)$  和  $(\pi,\pi)$ ;  $\xi_{\Gamma_i}$  表示在  $\Gamma_i$  处占据态的宇称. 从  $Z_2$  不变量的表达式可以看出, 当  $0 < M < 8B$  且  $M \neq 4B$  时,  $\nu = 1$ , 对应拓扑相; 而当  $M < 0$  或  $M > 8B$  时, 均对应平凡相. 我们在引言中提及, 当系统处于拓扑相时, 由于体-边对应,

将存在稳定的无能隙边界态. 而当系统处于平凡相时, 不存在稳定的无能隙边缘态. 为了直观地看出这一点, 我们现在考虑  $M \rightarrow 0$  的情况, 此时导带与价带的能隙极小值出现在高对称动量点  $(0,0)$  处. 围绕此动量点做低能展开到动量的二阶, 我们得到连续哈密顿量

$$H(k) = [M - B(k_x^2 + k_y^2)]\sigma_z + Ak_x \sigma_x s_z + Ak_y \sigma_y. \quad (3)$$

接下来我们考虑半无限系统. 具体地, 我们考虑系统占据整个  $x \geq 0$  区域. 由于沿着  $x$  方向的平移对称性被破坏,  $k_x$  需要替换为  $-i\partial_x$ , 相应地, (3) 式变为

$$H(-i\partial_x, k_y) = [M(k_y) + B\partial_x^2]\sigma_z - iA\partial_x \sigma_x s_z + Ak_y \sigma_y, \quad (4)$$

其中  $M(k_y) = M - Bk_y^2$ . 由于哈密顿量具有时间反演对称性, 边界态的色散必须相交于时间反演不变动量处. 对此连续模型, 即必须相交于  $k_y = 0$  处. 考虑  $k_y = 0$  附近, 可以把 (4) 式分解为两部分:  $H(-i\partial_x, k_y) = H_0(-i\partial_x) + H_p(k_y)$ , 其中

$$H_0(-i\partial_x) = [M + B\partial_x^2]\sigma_z - iA\partial_x \sigma_x s_z, \quad (5a)$$

$$H_p(k_y) = Ak_y \sigma_y, \quad (5b)$$

$H_p$  当作为微扰. 在这里为了进一步地简化分析, 忽略掉了不重要的  $k_y^2$  项. 对局域在  $x = 0$  附近的边界态, 其波函数应满足边界条件  $\psi(x=0) = \psi(x=+\infty) = 0$ . 在此边界条件下, 解本征方程  $H_0(-i\partial_x)\psi(x) = E\psi(x)$  可发现存在两个零能量解:

$$\psi_1(x) = C \sin(\gamma_1 x) e^{-\gamma_2 x} e^{ik_y y} \chi_1, \quad (6a)$$

$$\psi_2(x) = C \sin(\gamma_1 x) e^{-\gamma_2 x} e^{ik_y y} \chi_2, \quad (6b)$$

其中归一化常数  $C = 2\sqrt{\gamma_2(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)}/\gamma_1^2$ ,  $\gamma_1 = \sqrt{\frac{M}{B} - \frac{A^2}{4B^2}}$ , 和  $\gamma_2 = \frac{A}{2B}$ . 波函数的归一化要求  $\gamma_1^2 + \gamma_2^2 > 0$ . 很容易发现边界态是否存在直接对应系统是否处于拓扑相, 和体-边对应的图象吻合. 另外, 旋量  $\chi_{1,2}$  的形式为  $\chi_1 = |\sigma_y = 1, s_z = 1\rangle$ ,  $\chi_2 = |\sigma_y = -1, s_z = -1\rangle$ . 这两个正交的波函数构建了边界态的基底. 在这个基底, 描述局域在  $x = 0$  附近的边界态的低能有效哈密顿量的形式为

$$H_{\text{eff},\alpha\beta}(k_y) = \int_0^{+\infty} dx \psi_\alpha^*(x) H_p(k_y) \psi_\beta(x). \quad (7)$$

简单计算可发现

$$H_{\text{eff}}(k_y) = Ak_y s_z. \quad (8)$$

此哈密顿量反映在边界上存在一对相向传输、自旋相反的无能隙模式, 即所谓的螺旋模式 (helical modes).

## 2.2 同维度一阶拓扑绝缘体到高阶拓扑绝缘体

根据 (8) 式, 可以发现要保持边界态的无能隙特征, 需要保证时间反演对称性不被破坏和没有超导关联. 我们先考虑单纯地破坏时间反演对称性. 具体地, 考虑如下的模型:

$$H(k) = [M - 2B(2 - \cos k_x - \cos k_y)]\sigma_z + A \sin k_x \sigma_x s_z + A \sin k_y \sigma_y + \Lambda(\cos k_x - \cos k_y)\sigma_x s_x. \quad (9)$$

此模型和 BHZ 模型相比只是多了第三行的项. 根据自旋 1/2 系统的时间反演算符  $T = i s_y K$  ( $K$  表示复共轭操作), 容易看出  $\Lambda(\cos k_x - \cos k_y)\sigma_x s_x$  这一项破坏了时间反演对称性. 由于新引入的这一项和 BHZ 模型原有的所有项均反对易, 这保证了只要 BHZ 模型描述一个绝缘体, 此模型的能谱就一定具有非零能隙.

为了解析地看出这一项对边界态的影响, 我们仍然考虑  $M \rightarrow 0$  的情况, 然后围绕高对称动量点  $(0, 0)$  做低能展开到动量的二阶, 得到连续模型

$$H(k) = [M - B(k_x^2 + k_y^2)]\sigma_z + Ak_x \sigma_x s_z + Ak_y \sigma_y - (\Lambda/2)(k_x^2 - k_y^2)\sigma_x s_x. \quad (10)$$

采用和先前求解 BHZ 模型的边界态相似的步骤: 考虑系统占据  $x \geq 0$  的半无限区域, 并把哈密顿量分解成两部分,  $H(-i\partial_x, k_y) = H_0(-i\partial_x) + H_p(-i\partial_x, k_y)$ , 其中

$$H_0(-i\partial_x) = [M + B\partial_x^2]\sigma_z - iA\partial_x \sigma_x s_z, \quad (11a)$$

$$H_p(-i\partial_x, k_y) = Ak_y \sigma_y + (\Lambda/2)\partial_x^2 \sigma_x s_x. \quad (11b)$$

在这里我们仍然忽略掉了不重要的  $k_y^2$  项, 并且假定  $\Lambda$  为一个很小的系数, 以保证把新引入的这一项当成微扰是合理的. 由于  $H_0(-i\partial_x)$  的形式和 BHZ 模型一样, 所以这里仍然存在两个零能量的解. 两个解的形式仍然取 (6a) 和 (6b) 式中的形式. 由此, 描述局域在  $x = 0$  附近的边界态的低能有效哈密顿量为

$$H_{\text{eff}, \alpha\beta}(k_y) = \int_0^{+\infty} dx \psi_\alpha^*(x) H_p(-i\partial_x, k_y) \psi_\beta(x), \quad (12)$$

计算可得

$$H_{\text{eff}}(k_y) = Ak_y s_z - (\Lambda M/2B) s_y, \quad (13)$$

边界态的能谱变为  $E(k_y) = \pm \sqrt{(Ak_y)^2 + (\Lambda M/2B)^2}$ .

很容易看出, 只要  $\Lambda$  不为零, 边界态的能谱就不再是无能隙的. 这意味着只要  $\Lambda$  不为零, 系统的一阶拓扑性质就变成了平凡的.

要看出 (9) 式中的哈密顿量实质上实现了一个二阶拓扑绝缘体, 我们在  $x$  和  $y$  方向上同时取开边界条件. 此时存在四条边, 边与边两两相交形成一个角 (如图 1 中的  $d = 2$  列所示). 为了讨论的方便, 我们把最左端的边界记为 I, 然后沿着逆时针方向依次标记另外三条边界为 II, III, IV. 边界 I 上的有效哈密顿量的形式我们已经知道, 即 (13) 式. 相似的分析我们可以得到另外三条边界上的有效哈密顿量<sup>[38]</sup>, 分别为

$$H_{\text{II}}(k_x) = -Ak_x s_z + (\Lambda M/2B) s_y, \quad (14a)$$

$$H_{\text{III}}(k_y) = -Ak_y s_z - (\Lambda M/2B) s_y, \quad (14b)$$

$$H_{\text{IV}}(k_x) = Ak_x s_z + (\Lambda M/2B) s_y. \quad (14c)$$

$x$  和  $y$  方向上同时取开边界条件时  $k_x$  和  $k_y$  均不再是好量子数. 我们引入一个边界坐标  $\ell$ , 它刻画此处的一维边界, 其正方向约定为沿逆时针方向. 由于一维边界是封闭的, 因此  $\ell$  的定义隐含了  $\ell + 2L_x + 2L_y = \ell$ , 其中  $L_x$  和  $L_y$  分别表示系统沿着  $x$  和  $y$  方向的尺寸. 利用边界坐标, 四个边界上的有效哈密顿量可以统一地写为

$$H(-i\partial_\ell) = -iA(\ell)\partial_\ell s_z + m(\ell) s_y, \quad (15)$$

其中  $A(\ell) = A$ , 而  $m(\ell)$  在 I, II, III, IV 四个边界上的取值分别为  $-AM/2B$ ,  $AM/2B$ ,  $-AM/2B$ ,  $AM/2B$ . 由此可以看出, 在角的地方  $A(\ell)$  保持不变, 而  $m(\ell)$  的符号将发生改变. 这意味着在角的地方正好形成了一个狄拉克质量的畴壁. 根据 Jackiw-Rebbi 理论<sup>[39]</sup>, 这样的畴壁将束缚一个零维的零能量束缚态. 由于四个角都形成了畴壁, 因此一共存在四个零能量束缚态. 由于这些零能量束缚态存在于系统的角上, 因此它们也被称为角模 (corner modes).

利用边界态理论, 可以清晰地看出如何从一阶拓扑物态转变为高阶拓扑物态. 简言之, 如果从一个  $d$  维的一阶拓扑物态出发, 要实现一个  $d$  维的高阶拓扑物态, 首先需要破坏保护一阶拓扑物态无能隙边界态的对称性, 如保护一阶拓扑绝缘体的时间反演对称性; 其次, 破坏对称性的方式需要具有各向异性的特点.

虽然利用边界态理论时为了分析上的简单, 我

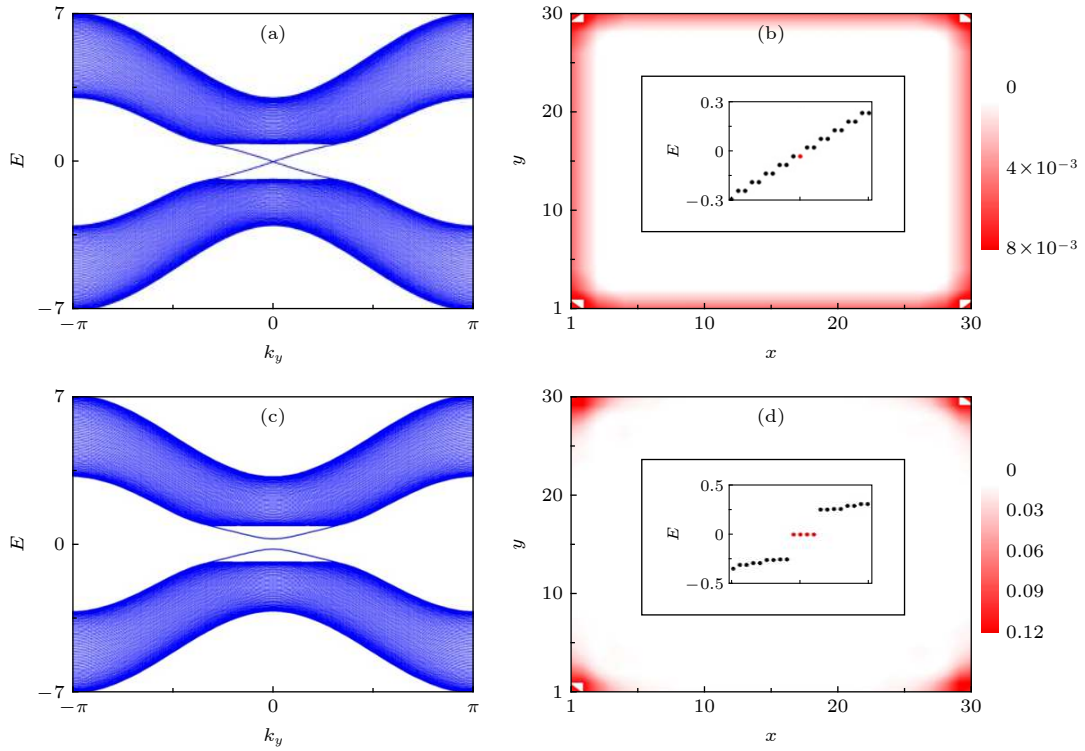


图 2 从一阶拓扑绝缘体到二阶拓扑绝缘体 (a) 沿  $x$  方向取开放边界条件 ( $L_x = 100$ ), 沿  $y$  方向取周期边界条件, 参数为  $M = B = A = 1$ ,  $\Lambda = 0$ , 对应 BHZ 模型, 能谱反映出无能隙边界态的存在; (b) 插图中红点对应的能量本征态的波函数分布, 参数同 (a), 但沿  $x$  和  $y$  两个方向均取开放边界条件; 红色的深浅对应波函数分布概率的大小, 可以看出对一阶拓扑绝缘体, 波函数分布在整个边界上; (c) 边界条件和参数同 (a), 除了此处  $\Lambda = 0.5$ , 可看出  $\Lambda$  项的出现让边界态打开了能隙; (d) 零模的波函数分布, 参数同 (c), 但沿  $x$  和  $y$  两个方向均取开放边界条件; 从插图中可发现存在四个零模, 这四个零模的波函数局域在四个角上

Fig. 2. From first-order topological insulator to second-order topological insulator. (a) Energy spectra for a sample with open boundary condition in the  $x$  direction (the system size  $L_x = 100$ ) and periodic boundary condition in the  $y$  direction. Parameters are  $M = B = A = 1$ ,  $\Lambda = 0$ , which corresponds to the original BHZ model. The energy spectra reflect the existence of gapless boundary modes. (b) the density profile of a boundary mode. The parameters are the same as in (a), but now open boundary conditions are taken both in the  $x$  and  $y$  directions. One can see that the density profile of the boundary mode distributes over the whole boundary. (c) the boundary conditions and parameters are the same as in (a), except now  $\Lambda = 0.5$ . One can see that the presence of the  $\Lambda$  term opens a gap for the boundary modes. (d) the density profiles of zero modes. The parameters are the same as in (c), but now open boundary conditions are taken both in the  $x$  and  $y$  directions. One can see that there are four zero-energy modes in the inset. Their wave functions are found to be localized around the corners.

们假设了新引入的项可以当作微扰, 但这并不意味着上面的图像和结论只有当  $\Lambda$  很小时成立. 为了显示这一事实, 直接根据 (9) 式中的格点哈密顿量数值计算  $\Lambda$  项对边界态的影响. 计算结果确定了即使  $\Lambda$  项不能当作微扰, 上述的图像依然成立, 如图 2 所示.

由于超导体和绝缘体在哈密顿量描述上的相似, 上面对绝缘体的分析可以自然地推广到超导体, 在此不再赘述.

### 2.3 低维一阶拓扑物态到高维高阶拓扑物态

上一节中利用边界态理论和数值计算展示了当以恰当的方式打开边界态的能隙时, 可以从一阶

拓扑物态转变到高阶拓扑物态. 对这种情况, 一阶拓扑物态和高阶拓扑物态处于同一维度. 本节介绍另一种实现高阶拓扑物态的方式: 利用低维一阶拓扑物态实现高维高阶拓扑物态. 简单起见, 以一维的 Su-Schrieffer-Heeger (SSH) 模型为例<sup>[40]</sup>. SSH 模型的哈密顿量为

$$H(k_x) = (t_x + t'_x \cos k_x) \sigma_x + t'_x \sin k_x \sigma_y, \quad (16)$$

其中  $t_x$  和  $t'_x$  为最近邻格点间的跃迁系数, 如图 3(a) 所示.  $\sigma_i$  为泡利矩阵, 作用在 (A, B) 子格上. 此模型由于具有子格 (或手征) 对称性 (算符为  $\sigma_z$ ), 其拓扑性质由绕数 (winding number) 刻画,

$$w_1 = \frac{1}{4\pi i} \int_{-\pi}^{\pi} dk_x \text{Tr}[\sigma_z H^{-1}(k_x) \partial_{k_x} H(k_x)], \quad (17)$$

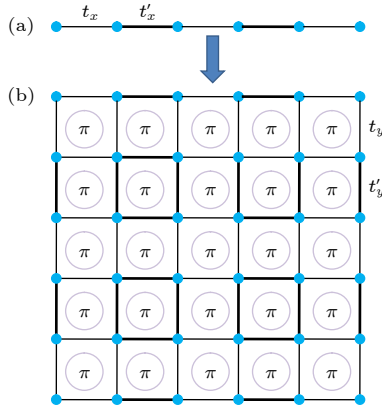


图 3 从一维一阶拓扑绝缘体到二维二阶拓扑绝缘体 (a) 一维 SSH 链的示意图; (b) 利用一维 SSH 链构造二维二阶拓扑绝缘体, 每个单位元胞中有一个  $\pi$  磁通

Fig. 3. Constructing two-dimensional second-order topological insulator by using one-dimensional topological insulator: (a) A schematic diagram of the SSH chain; (b) using the one-dimensional SSH chains to construct a two-dimensional second-order topological insulator, within each small square, there is a  $\pi$ -flux.

计算可知当  $|t_x| < |t'_x|$ ,  $|w_1| = 1$ , 系统处在拓扑相. 而当  $|t_x| > |t'_x|$ ,  $w_1 = 0$ , 系统处在平凡相. 当系统处在拓扑相时, SSH 链两端将各束缚一个零模. 接下来, 我们把一系列的 SSH 链平行地堆叠起来, 然后相邻的 SSH 链间的耦合也按照强弱交错的方式, 如图 3(b) 所示. 这样一个元胞包含四个子格. 如果再往每一个小四方里插入一个  $\pi$ -磁通, 相应的哈密顿量为

$$\begin{aligned}
 H(k_x, k_y) = & (t_x + t'_x \cos k_x) \sigma_x + t'_x \sin k_x \sigma_y, \\
 & + (t_y + t'_y \cos k_y) \sigma_z \tau_x \\
 & + t'_y \sin k_y \sigma_z \tau_y + \delta \sigma_0 \tau_0, \quad (18)
 \end{aligned}$$

其中  $\tau_{x,y,z}$  也为泡利矩阵, 其作用在链自由度上;  $\tau_0$  和  $\sigma_0$  为相应的  $2 \times 2$  单位矩阵, 因此最后一项的物理意义为一势能. 如果  $\delta = 0$ , 此哈密顿量具有手征对称性, 相应的手征算符为  $\sigma_z \tau_z$ . 由于此哈密顿量的前四项均反对易, 简单分析可知只要  $|t_x| = |t'_x|$  和  $|t_y| = |t'_y|$  不同时满足, 此哈密顿量的能谱都存在能隙, 即描述一个绝缘体. 为了简单地显示此哈密顿量可实现二阶拓扑相, 考虑一个极限情况, 即  $t_x = t_y = 0$ . 根据图 3(b), 可发现此时四个角上的格子和其他的格子没有耦合, 因而它们将束缚一个局域模式. 当  $\delta = 0$  时, 由于具有手征对称性, 此局域模式的能量将钉扎在零上, 即存在零能量的角模. 当  $\delta \neq 0$  时, 由于  $\delta \sigma_0 \tau_0$  项的效应是能量平移,

所以角模仍然存在, 只是能量不再钉扎在零上, 但对此模型仍然处在能隙之中. 如果  $\delta$  在边界上呈现一定强度的无序性, 角模的能量也可以出现在能隙之外.

对更一般的参数情况, 此哈密顿量的拓扑性质可以利用嵌套威尔逊圈 (nested Wilson loop)<sup>[31,35]</sup> 或者直接在实空间里对角化哈密顿量分析, 结果是只要  $|t_x| < |t'_x|$  和  $|t_y| < |t'_y|$  同时满足, 即存在角模, 对应二阶拓扑绝缘体; 而当  $|t_x| > |t'_x|$  或者  $|t_y| > |t'_y|$ , 不再存在角模, 对应平凡绝缘体.

这种利用低维拓扑物态构造高维拓扑物态的方案通常称为线构造 (wire construction) 或者面构造 (layer construction). 这种方法在构造高阶拓扑物态的模型上非常有用<sup>[33,41]</sup>.

### 3 高阶拓扑绝缘体

接下来我们回顾一下高阶拓扑绝缘体的研究进展. 在 2.2 节中, 我们展示了如果引入合适的破坏时间反演对称性的项, 那么一阶拓扑绝缘体可以转变为高阶拓扑绝缘体. 在 2012 年, Sitte 等<sup>[42]</sup> 发现对三维拓扑绝缘体施加外磁场, 如果磁场不沿着晶体的主轴方向, 那么磁场在破坏二维无能隙的狄拉克表面态的同时, 会在晶体的棱上保留一支一维的手征无能隙模式. 这意味着加外磁场可以让三维的一阶拓扑绝缘体转变为三维的二阶拓扑绝缘体. 类似地, Zhang 等<sup>[43]</sup> 发现如果一阶拓扑绝缘体的表面发生磁化, 也可以让二维的狄拉克表面态打开能隙, 而只在晶体的棱上保留一维的手征无能隙模式. 回头来看, 这两个研究工作中实现的物态都属于二阶拓扑绝缘体, 不过高阶拓扑绝缘体的概念在此未被提及.

2016 年, Benalcazar, Bernevig 和 Hughes 提出了量子多极矩绝缘体的概念<sup>[31]</sup>. (18) 式即是他们提出的实现量子四极矩绝缘体 (属于二维二阶拓扑绝缘体) 的模型. 量子四极矩绝缘体的偶极矩为零, 但具有量子化的四极矩, 这要求四个角上交错分布正负  $e/2$  的电荷. 另外, 他们还提出量子八极矩绝缘体 (属于三维三阶拓扑绝缘体) 的概念. 量子八极矩绝缘体的偶极矩和四极矩均为零, 但具有量子化的八极矩. 由于量子化的物理量在凝聚态领域总是备受关注, 这篇文章迅速吸引了广泛的关注.

2017 年, Schindler 等<sup>[32]</sup> 提出了一个新的实现

三维二阶拓扑绝缘体的模型,即在实现三维拓扑绝缘体的模型基础上引入同时破坏四度旋转对称性和时间反演对称性、但保持它们的组合对称性的项(如(9)式中的 $\Delta$ 项).这篇文章的标题里正式出现了高阶拓扑绝缘体的概念.这篇文章也预言了几种电子材料为具有时间反演对称性的二阶拓扑绝缘体,如 SnTe 和 BiSe.几乎同时,其他两个研究组研究了其他对称性的情况<sup>[33,34]</sup>,而 Benalcazar 等<sup>[35]</sup>对量子多极矩绝缘体的性质给出了更系统的研究.随后,对高阶拓扑物态的理论研究工作迅速增长<sup>[44–53]</sup>.

高阶拓扑绝缘体的实验研究进展也非常迅速.(9)式中的二维模型很快在超材料和电路中实现,角模也相应地被观察到<sup>[54–56]</sup>.以微波共鸣器的实验为例<sup>[54]</sup>,实验上利用四个相同的共鸣器组成一个元胞,这样就如图 3(b) 所示一个元胞中等效地存在四个子格.然后共鸣器间的耦合也可以调节成图 3(b) 所示的结构.再利用人造磁场产生 $\pi$ 磁通,即实现了(9)式中的二阶拓扑绝缘体模型.相应地,角模的存在与否可以简单地通过吸收谱来反映.

(9)式中的二维模型对应的晶格是四方晶格.高阶拓扑绝缘体自然也可以在其他晶格上实现,比如 kagome 晶格<sup>[47,56,57]</sup>.在此类晶格上实现高阶拓扑物态的一个优势是不需要 $\pi$ 磁通,但机理仍然可以理解为是对一维 SSH 模型的推广.由于 SSH 模型本身的边界态实质上非常依赖于两端的子格类型,因而此类方案实现的高阶拓扑绝缘相的边界态本质上非常依赖于边界的构型,这种边界依赖性已在实验上观察到<sup>[56]</sup>.

到目前为止,高阶拓扑绝缘相已经在多种声学和光学超材料中实现<sup>[54–63]</sup>.相较而言,电子型高阶拓扑绝缘体材料目前的实验研究还非常之少.这一方面是目前预言的材料还相对较少<sup>[64–69]</sup>,另一方面是电子型材料的生长以及拓扑性质的确定在实验上也要困难很多.目前,实验上报道的高阶拓扑绝缘体材料还只有铋<sup>[64]</sup>和人工设计的电子材料<sup>[70]</sup>.其中,在三维的铋的棱上利用扫描隧道显微镜和约瑟夫森干涉发现存在一维的螺旋型无能隙模式,表明此材料为具有时间反演对称性的二阶拓扑绝缘体<sup>[64]</sup>.我们知道电子型的材料的一个独特特征是具有多种多样的相互作用.由于维度的变化对相互作用的影响非常之大,可以预见电子型的高阶拓扑绝缘体的边界态将呈现诸多独特的性质.因此,寻

找更多的电子型高阶拓扑绝缘体材料以进行更深入的实验和理论研究具有重要的意义.

## 4 高阶拓扑超导体

高阶拓扑绝缘体的概念被提出后,高阶拓扑超导体的概念也顺其自然地被提出.根据拓扑绝缘体的经验,我们知道对具有时间反演对称性的拓扑超导体施加外磁场以破坏对称性也可实现二阶拓扑超导体<sup>[34,71]</sup>.从模型的角度考虑,最简单的具有时间反演对称性的拓扑超导体是考虑自旋的 p-波超导体<sup>[72]</sup>.然而由于目前实验上还没有确定的 p-波超导体,这个方案很难在实验上实现和研究.

为了避开先实现具有时间反演对称性的拓扑超导体这一苛刻要求,本文作者和合作者提出一个新的实现方案:在高温超导体上生长二维一阶拓扑绝缘体<sup>[38]</sup>.我们在前面曾提及要保持二维一阶拓扑绝缘体的无能隙边界态,需要保持时间反演对称性不被破坏和没有超导关联.当二维一阶拓扑绝缘体生长在高温超导体上时,由于超导近邻效应,无能隙边界态会由于超导配对而打开能隙.具体地,如果考虑高温超导体的超导配对形式为 d 波(如利用铜基超导体),那么这个异质结构可以由如下的哈密顿量描述<sup>[38]</sup>,

$$H(k) = [m_0 - t_x \cos k_x - t_y \cos k_y] \sigma_z \tau_z + A_x \sin k_x \sigma_x s_z + A_y \sin k_y \sigma_y \tau_z + \Delta (\cos k_x - \cos k_y) s_y \tau_y, \quad (19)$$

其中最后一项表示 d-波超导配对.可以发现(19)式和(9)式在形式上很像,利用边界态理论可发现当沿着 $x$ 和 $y$ 方向均取开边界条件时,每个角上都将存在一对 Majorana 零模.之所以每个角上存在两个 Majorana 零模是由于超导配对项并未破坏时间反演对称性.进一步地,我们发现此方案也适用于 $s_{\pm}$ 波的高温超导体(如铁基超导体).基于 $s_{\pm}$ 波的高温超导体和二维拓扑绝缘体的方案也被 Wang 等<sup>[73]</sup>提出.此方案推广到三维也可实现具有时间反演对称性的二阶拓扑超导体<sup>[74]</sup>.和二维不同,此时的边界态为一维无能隙的 Majorana 螺旋模式.如果要实现不具有时间反演对称性的二阶拓扑超导体,可以引入磁场或者磁性,此时二维二阶拓扑超导体的角上将只出现一个 Majorana 零模<sup>[75–79]</sup>,三维二阶拓扑超导体的棱上将出现手征

Majorana 模式<sup>[76,80]</sup>. 近期, 本文作者发现在超导体上生长不具有时间反演对称性的二阶拓扑绝缘体可以自然地实现二阶拓扑超导体<sup>[81]</sup>. 这一方案相比于先前的方案有两点优势: 一是适用于任意的超导配对形式, 二是不需要外磁场. 如果二阶拓扑绝缘体具有时间反演对称性, 研究发现在合适的相互作用条件下或者加入磁场也可实现 Majorana 零模<sup>[82]</sup> 或手征 Majorana 模式<sup>[83]</sup>.

高阶拓扑超导体也可以利用混合超导配对的实现. 已提出的方案包括: p+id 超导配对<sup>[84]</sup>, p+is 超导配对<sup>[85]</sup>, 以及 Rashba 自旋轨道耦合+(s+id) 超导配对<sup>[86]</sup>. 另外一个实现高阶拓扑超导体重要机制是拓扑半金属内发生奇宇称的超导配对<sup>[84,87–89]</sup>. 例如, 研究发现如果狄拉克半金属发生超导转变且超导配对为 p-波配对, 那么在二维可实现二阶拓扑超导体<sup>[84,89]</sup>. 而在三维, 如果节线半金属中发生超导转变且奇宇称超导配对合适的话, 那么既可实现二阶拓扑超导体<sup>[86,87]</sup>, 也可实现三阶拓扑超导体<sup>[88,89]</sup>. 当然, 即使正常态是普通的金属且只有奇宇称的超导配对, 也可以实现高阶拓扑超导<sup>[88]</sup>. 值得强调的是, 利用奇宇称的超导配对可实现单能带的高阶拓扑超导<sup>[88]</sup>.

目前, 虽然已经有了一系列实现高阶拓扑超导体的理论方案, 但是相关的实验研究工作还处在非常初步的阶段. 截止目前, 实验方面的研究工作包括: Burch 组在铁基超导  $\text{FeTe}_{0.55}\text{Se}_{0.45}$  的棱上观察到了一维无能隙的 Majorana 模式<sup>[90]</sup>. 由于  $\text{FeTe}_{0.55}\text{Se}_{0.45}$  在超导转变温度上能带存在反转<sup>[91]</sup>, 而超导转变后配对形式认为是  $s_{\pm}$  波, 因此此实验观察到的结果非常符合三维拓扑绝缘体和  $s_{\pm}$  波超导配对结合实现时间反演对称的二阶拓扑超导体的理论<sup>[74]</sup>. 另外, Yazdani 组在二阶拓扑绝缘体铋+超导体+铁原子团簇的结构上观察到了 Majorana 零模的信号<sup>[92]</sup>. 此方案由于铁原子团簇具有磁性, 所以不具有时间反演对称性. 相应地, Majorana 零模以单个的形式出现在铁原子团簇的端点.

## 5 结 论

本文简要地介绍了传统拓扑物态和高阶拓扑物态的联系, 并回顾了高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的研究进展, 从中可以看出高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体极大地丰富了拓扑物态的类型.

高阶拓扑物态的体-边对应也极大地丰富了和边界态相关的物理. 从本文也可以看出高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的研究都还处在比较初级的阶段. 对高阶拓扑绝缘体, 对电子型的材料的实验研究还太少. 理论方面, 虽然现在对高阶拓扑绝缘体的拓扑性质和分类等已取得了很好的进展, 但高阶拓扑绝缘体存在什么样的独特响应性质尚不清楚. 另外, 电子型的高阶拓扑绝缘体材料的实现也可以推动高阶拓扑超导体的实现<sup>[81–83]</sup>, 而挖掘高阶拓扑超导体的独特性质也是一个重要的研究方向. 这一方面可以提供探测 Majorana 模式的新思路, 另一方面也可能催生利用 Majorana 模式的新方向.

最后, 需要强调的是在高阶拓扑绝缘体和高阶拓扑超导体的概念产生之后, 高阶拓扑物态的概念也被推广到了拓扑半金属系统<sup>[93,94]</sup>, 本文限于篇幅没有介绍和这一部分相关的研究工作.

## 参考文献

- [1] Kosterlitz J M, Thouless D J 1973 *J. Phys. C* **6** 1181
- [2] Klitzing K V, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [3] Tsui D C, Stormer H L, Gossard A C 1982 *Phys. Rev. Lett.* **48** 1559
- [4] Wen X G 2017 *Rev. Mod. Phys.* **89** 041004
- [5] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [6] Klitzing K V 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 200001
- [7] Wen X G 2004 *Quantum Field Theory of Many-body Systems: from the Origin of Sound to an Origin of Light and Electrons* (1st Ed.) (New York: Oxford University Press) pp5–9
- [8] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 226801
- [9] Kane C L, Mele E J 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146802
- [10] Bernevig B A, Zhang S C 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 106802
- [11] Bernevig B A, Hughes T L, Zhang S C 2006 *Science* **314** 1757
- [12] Koing M, Wiedmann S, Brune C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [13] Fu L, Kane C L, Mele E J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 106803
- [14] Moore J E, Balents L 2007 *Phys. Rev. B* **75** 121306
- [15] Roy R 2009 *Phys. Rev. B* **79** 195322
- [16] Kitaev A Y 2001 *Physics-Uspokhi* **44** 131
- [17] Ivanov D A 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 268
- [18] Kitaev A Y 2003 *Ann. Phys.* **303** 2
- [19] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M, Sarma S D 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
- [20] Sarma S D, Freedman M, Nayak C 2015 *npj Quantum Information* **1** 15001
- [21] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [22] Alicea J 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 076501
- [23] Beenakker C W J 2013 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **4** 113
- [24] Stanescu T D, Tewari S 2013 *J. Phys.: Condens. Matter* **25** 233201
- [25] Schnyder A P, Ryu S, Furusaki A, Ludwig A W W 2008

- Phys. Rev. B* **78** 195125
- [26] Kitaev A Y 2009 *AIP Conference Proceedings* **1134** 22
- [27] Fu L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 106802
- [28] Zhang T T, Jiang Y, Song Z D, Huang H, He Y Q, Fang Z, Weng H M, Fang C 2019 *Nature* **566** 475
- [29] Vergniory M G, Elcoro L, Felser C, Regnault N, Bernevig B A, Wang Z J 2019 *Nature* **566** 480
- [30] Feng T, Po H C, Vishwanath A, Wan X G 2019 *Nature* **566** 486
- [31] Benalcazar W A, Bernevig B A, Hughes T L 2017 *Science* **357** 61
- [32] Schindler F, Cook A M, Vergniory M G, Wang Z J, Parkin S S P, Bernevig B A, Neupert T 2018 *Science Advances* **4** eaat0346
- [33] Song Z D, Fang Z, Fang C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 246402
- [34] Langbehn J, Peng Y, Trifunovic L, Oppen F V, Brouwer P W 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 246401
- [35] Benalcazar W A, Bernevig B A, Hughes T L 2017 *Phys. Rev. B* **96** 245115
- [36] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 3045
- [37] Fu L, Kane C L 2007 *Phys. Rev. B* **76** 045302
- [38] Yan Z B, Song F, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 096803
- [39] Jackiw R, Rebbi C 1976 *Phys. Rev. D* **13** 3398
- [40] Su W P, Schrieffer J R, Heeger A J 1979 *Phys. Rev. Lett.* **42** 1698
- [41] Matsugatani A, Watanabe H 2018 *Phys. Rev. B* **98** 205129
- [42] Sitte M, Rosch A, Altman E, Fritz L 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 126807
- [43] Zhang F, Kane C L, Mele E J 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 046404
- [44] Khalaf E 2018 *Phys. Rev. B* **97** 205136
- [45] Geier M, Trifunovic L, Hoskam M, Brouwer P W 2018 *Phys. Rev. B* **97** 205135
- [46] Franca S, van den Brink J, Fulga I C 2018 *Phys. Rev. B* **98** 201114
- [47] Ezawa M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 026801
- [48] Miert G V, Ortix C 2018 *Phys. Rev. B* **98** 081110
- [49] Ezawa M 2018 *Phys. Rev. B* **98** 045125
- [50] Calugaru D, Juricic V, Roy B 2019 *Phys. Rev. B* **99** 041301
- [51] Trifunovic L, Brouwer P W 2019 *Phys. Rev. X* **9** 011012
- [52] Ahn J, Yang B J 2018 arXiv: 1810.05363 [cond-mat.mes-hall]
- [53] Kudo K, Yoshida T, Hatsugai Y 2019 arXiv: 1905.03484 [cond-mat.str-el]
- [54] Peterson C W, Benalcazar W A, Hughes T L, Bahl G 2018 *Nature* **555** 346
- [55] Serra-Garcia M, Peri V, Susstrunk R, Bilal O R, Larsen T, Villanueva L G, Huber S D 2018 *Nature* **555** 342
- [56] Imhof S, Berger C, Bayer F, Brehm J, Molenkamp L W, Kiessling T, Schindler F, Lee C H, Greiter M, Neupert T, Thomale R 2018 *Nat. Phys.* **14** 925
- [57] Xue H R, Yang Y H, Gao F, Chong Y D, Zhang B L 2019 *Nature Materials* **18** 108
- [58] Ni X, Weiner M, Alu A, Khanikaev A B 2019 *Nature Materials* **18** 113
- [59] Zhang X J, Wang H X, Lin Z K, Tian Y, Xie B Y, Lu M H, Chen Y F, Jiang J H 2019 *Nat. Phys.* **15** 582
- [60] Xie B Y, Wang H F, Wang H X, Zhu X Y, Jiang J H, Lu M H, Chen Y F 2018 *Phys. Rev. B* **98** 205147
- [61] Xie B Y, Su G X, Wang H F, Su H, Shen X P, Zhan P, Lu M H, Wang Z L, Chen Y F 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 233903
- [62] Chen X D, Deng W M, Shi F L, Zhao F L, Chen M, Dong J W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 233902
- [63] Fan H Y, Xia B Z, Tong L, Zheng S J, Yu D J 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 204301
- [64] Schindler F, Wang Z J, Vergniory M G, Cook A M, Murani A, Sengupta S, Kasumov A Y, Deblock R, Jeon S, Drozdov I, Bouchiat H, Gueron S, Yazdani A, Bernevig B A, Neupert T 2018 *Nat. Phys.* **14** 918
- [65] Yue C M, Xu Y F, Song Z D, Weng H M, Lu Y M, Fang C, Dai X 2019 *Nat. Phys.* **15** 577
- [66] Xu Y F, Song Z D, Wang Z J, Weng H M, Dai X 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 256402
- [67] Wang Z J, Wiedler B J, Li J, Yan B H, Bernevig B A 2018 arXiv: 1806.11116 [cond-mat.mltr-sci]
- [68] Sheng X L, Chen C, Liu H Y, Chen Z Y, Zhao Y X, Yu Z M, Yang S Y A 2019 arXiv: 1904.09985 [cond-mat.mes-hall]
- [69] Lee E, Kim R, Ahn J, Yang B J 2019 arXiv: 1904.11452 [cond-mat.mltr-sci]
- [70] Kempkes S N, Slot M R, van den Broeke J J, Capiod P, Benalcazar W A, Vanmaekelbergh D, Bercieux D, Swart I, Smith C M 2019 arXiv: 1905.06053 [cond-mat.mes-hall]
- [71] Zhu X Y 2018 *Phys. Rev. B* **97** 205134
- [72] Qi X L, Hughes T L, Raghu S, Zhang S C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 187001
- [73] Wang Q Y, Liu C C, Lu Y M, Zhang F 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 186801
- [74] Zhang R X, Cole W S, Sarma S D 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 187001
- [75] Liu T, He J J, Nori F 2018 *Phys. Rev. B* **98** 245413
- [76] Wu Y J, Hou J P, Li Y M, Luo X W, Zhang C W 2019 arXiv: 1905.08896 [cond-mat.mes-hall]
- [77] Pan X H, Yang K J, Chen L, Xu G, Liu C X, Liu X 2018 arXiv: 1812.10989 [cond-mat.mes-hall]
- [78] Zhang R X, Cole W S, Wu X X, Sarma D S 2019 arXiv: 1905.10647 [cond-mat.supr-con]
- [79] Wu X X, Liu X, Thomale R, Liu C X 2019 arXiv: 1905.10648 [cond-mat.supr-con]
- [80] Peng Y, Xu Y 2019 *Phys. Rev. B* **99** 195431
- [81] Yan Z B 2019 arXiv: 1907.02070 [cond-mat.mes-hall]
- [82] Hsu C H, Stano P, Klinovaja J, Loss D 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 196801
- [83] Queiroz R, Stern A 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 036802
- [84] Wang Y X, Lin M, Hughes T L 2018 *Phys. Rev. B* **98** 165144
- [85] Wu Z G, Yan Z B, Huang W 2019 *Phys. Rev. B* **99** 020508
- [86] Zhu X Y 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 236401
- [87] Shapourian H, Wang Y X, Ryu S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 094508
- [88] Yan Z B 2019 arXiv: 1905.11411 [cond-mat.supr-con]
- [89] Ahn J, Yang B J 2019 arXiv: 1906.02709 [cond-mat.mes-hall]
- [90] Gray M J, Freudenstein J, Zhao Y S F, Oconnor R, Jenkins S, Kumar N, Hoek M, Koper A, Taniguchi T, Watanabe K, Zhong R D, Gu G D, Burch K S 2019 *Nano Lett.* **19** 4890
- [91] Zhang P, Yaji K, Hashimoto T, Ota Y, Kondo T, Okazaki K, Wang Z J, Wen J S, Gu G D, Ding H, Shin S 2018 *Science* **360** 182
- [92] Jack B, Xie Y L, Li J, Jeon S, Bernevig B A, Yazdani A 2019 *Science* **364** 1255
- [93] Lin M, Hughes T L 2018 *Phys. Rev. B* **98** 241103
- [94] Ghorashi S A A, Hu X, Hughes T L, Rossi E 2019 *Phys. Rev. B* **100** 020509

## SPECIAL TOPIC—The frontiers and applications of topological physics

## Higher-order topological insulators and superconductors

Yan Zhong-Bo<sup>†</sup>*(School of Physics, Sun Yat-sen University, Guangzhou 510275, China)*

( Received 18 July 2019; revised manuscript received 22 August 2019 )

## Abstract

Very recently, higher-order topological insulators and superconductors have attracted wide attention and aroused the great interest of researchers. Owing to their unconventional bulk-boundary correspondence, higher-order topological insulators and superconductors possess novel boundary modes whose dimensions are always lower than the first-order (or say conventional) topological insulators and superconductors, provided that their bulk dimensions are the same. The essence of higher-order topological phase is the formation of Dirac-mass domain walls on the gapped one-dimensional lower boundary. Roughly speaking, the origins of the formation can be classified as “intrinsic” and “extrinsic” type. For the former case, the formation of domain walls is forced by symmetry, suggesting that the resulting higher-order topological phases can be taken as topological crystalline phases. For this case, the domain walls are quite robust if the corresponding symmetry is preserved. For the latter case, the domain walls are formed simply because the one-dimensional lower boundary modes are gapped in a nontrivial way, however, the nontrivial way is not forced by symmetry. For this case, the domain walls are also stable against perturbations as long as the separations between them are large enough. The domain walls can have various patterns, which indicates that the higher-order topological phases are very rich.

In this paper, we first reveal the connection between the higher-order topological phase and the first-order topological phase. Concretely, we show how to realize a higher-order topological phase by breaking some symmetries of a first-order topological phase, as well as stacking lower-dimensional first-order topological systems in an appropriate way. After these, we review the recent progress of theoretical and experimental study of higher-order topological insulators and superconductors. For the higher-order topological insulators, we find that the electronic materials are still lacking though a lot of experimental realizations have been achieved. For higher-order topological superconductors, we find that their experimental realization and investigation are still in the very primary stage though quite a lot of relevant theoretical studies have been carried out. In order to comprehensively understand this newly-emerging field there are still many things to be done.

**Keywords:** higher-order topological insulator, higher-order topological superconductor, bulk-boundary correspondence

**PACS:** 61.82.Ms, 74.25.-q, 03.65.Vf

**DOI:** [10.7498/aps.68.20191101](https://doi.org/10.7498/aps.68.20191101)

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [yanzhb5@mail.sysu.edu.cn](mailto:yanzhb5@mail.sysu.edu.cn)