



原子核电荷半径的研究

曹颖逾 郭建友

Study of nuclear charge radius

Cao Ying-Yu Guo Jian-You

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 162101 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20191643

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191643>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

颗粒物质内自旋小球运动行为的数值模拟研究

Numerical simulation of a spinning sphere moving in granular matter

物理学报. 2018, 67(1): 014702 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171459>

四端双量子点系统中的自旋和电荷能斯特效应

Spin and charge Nernst effect in a four-terminal double quantum dot system

物理学报. 2017, 66(9): 097302 <https://doi.org/10.7498/aps.66.097302>

拓扑绝缘体中的超快电荷自旋动力学

Ultrafast charge and spin dynamics on topological insulators

物理学报. 2019, 68(22): 227202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191433>

自旋和电荷分别掺杂的新一类稀磁半导体研究进展

Recent progress of a new type diluted magnetic semiconductors with independent charge and spin doping

物理学报. 2019, 68(16): 167502 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191114>

自旋轨道矩调控的垂直磁各向异性四态存储器结构

Demonstration of four-state memory structure with perpendicular magnetic anisotropy by spin-orbit torque

物理学报. 2018, 67(11): 117501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180216>

激发态电荷转移有机体的多铁性研究

Excited charge-transfer organics with multiferroicity

物理学报. 2018, 67(15): 157509 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180759>

原子核电荷半径的研究*

曹颖逾 郭建友†

(安徽大学物理与材料科学学院, 合肥 230601)

(2019年10月8日收到; 2020年5月8日收到修改稿)

结合已有的原子核半径的实验数据, 对先前的核电荷半径公式进行验证和探讨. 比较单参数核电荷半径公式, 验证了 $Z^{1/3}$ 律公式要优于 $A^{1/3}$ 律公式. 对两参数公式和三参数公式进行验证, 得到两参数和三参数公式要优于单参数公式. 考虑到原子核电四极矩与形变的关系, 在原有的三参数公式中加入电四极矩因子项, 得出核电荷半径新公式. 拟合该公式发现核电荷半径理论值与实验值符合较好. 再考虑总自旋与电四极矩的关系, 求出内禀电四极矩, 代入公式中进行拟合, 均方根偏差进一步下降. 最后加入能反映奇偶摆动现象的 δ 项, 用公式得到的均方根偏差为 0.369 fm, 较好地反映出了形变与核电荷半径的关系.

关键词: 核电荷半径, 电四极矩, 自旋

PACS: 21.10.Ft, 21.10.Ky, 21.10.Hw

DOI: 10.7498/aps.69.20191643

1 引言

众所周知, 原子核电荷半径是描述原子核性质最基本的物理量之一. 核力的性质、核物质密度以及壳结构等方面的信息可以通过研究核电荷半径得到. 核电荷半径测量的精确程度是验证原子核微观模型和理论的重要依据.

随着科技的发展, 实验仪器越来越精密, 技术和测量方法也越来越完善, 对物理量的测量也更加精确. 核电荷半径可通过高能电子在原子核上的散射^[1]、原子光谱超精细结构的同位素移动^[2]、 μ -原子激发 X 射线谱^[3,4]、原子光谱^[5,6] 来获得. 在文献^[7] 中收集了 909 个基态均方根核电荷半径, 这些数据中包含了远离 β 稳定线的核素的核半径. 这表明核电荷半径的测量已经扩展到远离 β 稳定线的区域.

在核电荷半径的理论计算和实验测量等方面, 人们做出了大量工作. 早期, 人们通常使用简单的单参数公式 $R_c = r_0 A^{1/3}$. 在文献^[8,9] 中, Nerlo 和

Pomorski 提出包含同位旋的两参数公式与三参数公式, 指出同位旋与核电荷半径的关系. 文献^[10] 提出含 Casten 因子项和 δ 项的四参数公式和五参数公式, 这两个公式给出了核电荷半径与壳效应和奇偶摆动的关系. 由于以 $A^{1/3}$ 律的单参数公式缺乏物理量的解释, 曾谨言^[11,12] 提出了以 $Z^{1/3}$ 律的单参数公式. 张双全等^[13] 提出含有同位旋的 $Z^{1/3}$ 律公式, 该公式很好地描述了远离 β 稳定线的核电荷半径. 另外壳层效应对核电荷半径的影响^[14]、镜像核电荷半径的差异现象^[15] 和重核及其同位素半径的研究^[16] 等仍然是热点课题.

本文首先对上述公式进行拟合, 比较公式之间的优劣. 再考虑到原子核电四极矩与形变的关系, 在三参数公式基础上提出加入电四极矩项的核电荷半径新公式. 最后对新公式进行改进, 分析新公式的优点和不足.

2 原子核电荷半径常用公式

核电荷半径通常由下面的等效半径表示:

* 国家自然科学基金 (批准号: 11575002) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: jianyou@ahu.edu.cn

$$R_c = \sqrt{\frac{5}{3}} \langle r^2 \rangle^{1/2}, \quad (1)$$

其中 $\langle r^2 \rangle^{1/2}$ 为均方根电荷半径, 取文献 [7] 中的 909 个核电荷半径数据. 由于核电荷有限分布引起的 1s 能级移动很小, 测量其得到的误差较大 [10], 所以将中子数 $N \leq 8$ 和质子数 $Z \leq 8$ 的核素去除. 将剩余的 885 个核电荷半径实验值进行最小二乘法拟合. 先取最简单的核电荷半径公式, 即单参数公式, 它遵循 $A^{1/3}$ 律:

$$R_c = r_0 A^{1/3}, \quad (2)$$

其中 r_0 是核电荷半径常数, A 为质量数, 拟合后得核电荷半径常数 $r_0 = 1.2269$ fm, 拟合图像如图 1 所示, 在轻核和重核区偏离较大, 中间区域符合较好. 由 (2) 式得到的核电荷半径理论值和实验值的均方根偏差为

$$\sigma = \left[\sum_{i=1}^{885} (R_c^{\text{Cal}} - R_c^{\text{Expt}})^2 / 885 \right]^{1/2} = 0.1224. \quad (3)$$

通过实验数据和图 1 的分析表明 r_0 不是一个常数, 对于轻核, r_0 较大, 到了重核 r_0 逐渐减小. 这种系统性的偏离表示 $A^{1/3}$ 律有某些物理内容的缺失. 为了解决 $A^{1/3}$ 律在轻核与重核的偏离, 曾谨言 [11,12] 依据实验数据提出电荷半径的 $Z^{1/3}$ 律:

$$R_c = r_0 Z^{1/3}. \quad (4)$$

用最新数据拟合得到 $r_0 = 1.6394$ fm, 均方根偏差 $\sigma = 0.0939$ fm, 拟合图像如图 1 中右图所示. 对比 $A^{1/3}$ 律 (2) 式, σ 减小了 0.0285 fm, 这说明了 $Z^{1/3}$ 律比 $A^{1/3}$ 律描述得更好. 在文献 [8,9] 中提到两参

数公式:

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} \right) A^{1/3}, \quad (5)$$

式中有一个同位旋项 $(N-Z)/A$, 加入此项目的目的是将远离 β 稳定线的核素的核电荷半径变化趋势更好地描述, 拟合 (5) 式得到拟合参数 $r_0 = 1.2827$ fm, $a = 0.2700$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0855$ fm. 为了更好地描述 $Z \geq 8$ 的偶偶核元素, (5) 式加入 $1/A$ 项, 得到三参数公式 [9]:

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} \right) A^{1/3}. \quad (6)$$

拟合 (6) 式得到参数 $r_0 = 1.2331$ fm, $a = 0.1461$, $b = 2.3301$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0510$ fm. (6) 式是目前描述电荷半径变化较好的公式之一, 也是应用较为广泛的公式. 对比于 (5) 式和 (6) 式, 文献 [13] 提出如下公式:

$$R_c = r_0 \left(1 + a \frac{N-N^*}{Z} \right) Z^{1/3}, \quad (7)$$

其中 N^* 表示 β 稳定线上核素的中子数, N/Z 是与同位旋相关的物理量, 拟合 (7) 式得到 $r_0 = 1.6312$ fm, $a = 0.0627$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0618$ fm.

为了更好地描述原子核电荷半径的变化规律, 文献 [10] 提出以下两个公式:

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} \right) A^{1/3}, \quad (8)$$

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{P}{A} + d \frac{\delta}{A} \right) A^{1/3}. \quad (9)$$

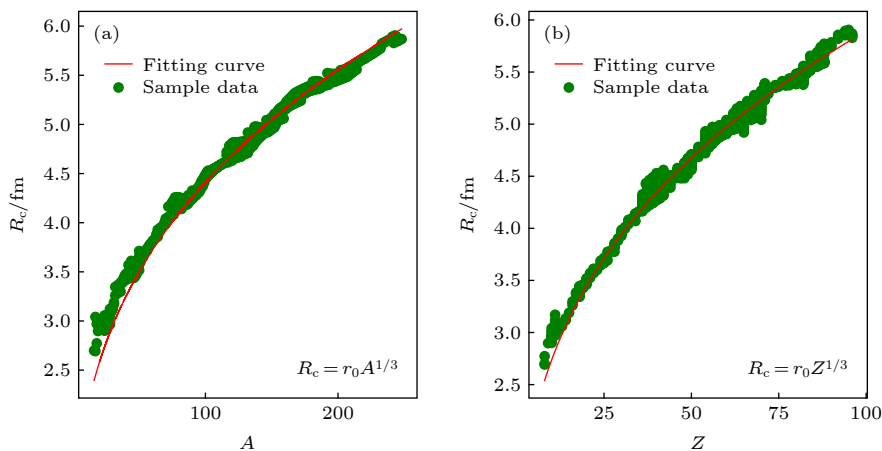


图 1 $R_c = r_0 A^{1/3}$ 与 $R_c = r_0 Z^{1/3}$ 的拟合曲线 (左图是 $R_c = r_0 A^{1/3}$ 的拟合曲线, 右图是 $R_c = r_0 Z^{1/3}$ 的拟合曲线)

Fig. 1. The fitting curve of the Eqs. (2) and (4). (The left picture is the fitting curve of the Eq. (2) and the right picture is the fitting curve of the Eq. (4)).

(8) 式和 (9) 式中考虑到壳效应对核电荷半径的影响, 引入 P 项, P 代表 Casten 因子^[17,18], 实质意义是质子与中子的相互作用, 质子与中子的相互作用是导致原子核集团运动和形变的重要因素之一^[19]. P 具体的表达式是 $N_p N_n / (N_p + N_n)$, Casten 因子广泛地应用于相位转移、形变、激发态性质、转动惯量等方面^[20–23]. δ 项是描述奇偶摆动现象, 在同位素链中偶偶核的电荷半径比相邻的两个奇偶核的电荷半径的平均值大, 奇奇核的电荷半径比相邻的两个奇偶核的电荷半径的平均值小^[10]. 可粗略表示为: 偶偶核的 $\delta = 1$, 奇奇核的 $\delta = -1$, 其他情况的 $\delta = 0$. 对 (8) 式拟合, 得到拟合参数 $r_0 = 1.2262$ fm, $a = 0.1473$, $b = 1.9876$, $c = 0.3993$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0273$ fm. 对 (9) 式拟合, 得到拟合参数 $r_0 = 1.2262$ fm, $a = 0.1472$, $b = 1.9952$, $c = 0.4030$, $d = 0.1093$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0266$ fm. (8) 式和 (9) 式的均方根偏差都很小, 可以较好地描述核半径的变化.

3 形变与核电荷半径的关系

核的形变与核半径密切相关, 其中原子核的电四极矩是反映原子核电荷分布偏离球对称程度的物理量^[24]. 电四极矩也是理解原子核内物质分布^[25,26]、检验核模型^[27]、核子与核子的相互作用的基本观测量之一^[28,29]. 原子核电四极矩的研究引起了许多核物理的热点课题. 包括其中的奇异核粒子的研究^[30]、原子核形状共存的研究^[31]、以及壳演化的研究. 经过多年的研究, 人们对电四极矩有了大致的了解, 也开发了一系列的计算方法. 但是由于核结构较为复杂, 所以电四极矩的理论计算和实验测量都存在困难, 目前的实验测量和理论计算仍不尽完善. 电四极矩值随着核子数有着周期性变化, 计算出的理论值与实验值相比有较大的偏差^[32].

电四极矩可由电势的多极展开得到, 原子核的内禀电四极矩有积分表示方法与张量表示方法, 具体计算过程见文献^[33], 得到的内禀电四极矩表示为

$$Q_0 = \frac{\rho}{e} \int_v (3z^2 - r^2) d\tau, \quad (10)$$

其中 e 是质子的电荷元, 代入积分上下限, 得 $Q_0 = \frac{2}{5} Z(c^2 - a^2)$, Z 为原子核的核电荷数.

假设与椭球体等体积球体的半径为 R , 定义形变参量 $\varepsilon = \frac{\Delta R}{R} = \frac{c - R}{R}$, 由等体积性 $\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{4}{3}\pi a^2 c$, 得到半轴长 $a = R(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{2}} = R(1 - \varepsilon/2)$, 则形变参量与内禀电四极矩的关系为

$$Q_0 = (6/5)ZR^2\varepsilon. \quad (11)$$

由 (11) 式可计算出形变参量 ε , 计算结果表明, 大多数原子核的形变参量都很小, 说明大多数核是偏离不大的非球形核. 在文献^[33]中提出电四极矩与内禀电四极矩的关系为

$$Q = \frac{I(2I - 1)}{(I + 1)(2I + 3)} Q_0, \quad (12)$$

当总自旋 $I = 0$ 或 $I = 1/2$ 时, 电四极矩 Q 一定为 0. 有了理论的支持, 再从文献^[34]中取出 378 个基态电四极矩, 去除中子数 $N \leq 8$ 和质子数 $Z \leq 8$ 的核素, 剩余 368 个基态电四极矩. 这些电四极矩有正值与负值, 其中电四极矩的大小代表原子核偏离球形的程度, 正负号代表偏离的方向. 把电四极矩取绝对值, 表示成 Q^* , 并在三参数公式 (6) 式的基础上, 加上一个 Q^*/A 的项, 得到

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N - Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q^*}{A} \right) A^{1/3}. \quad (13)$$

拟合 (13) 式得到参数 $r_0 = 1.2221$ fm, $a = 0.1350$, $b = 2.4698$, $c = 0.8976$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0397$ fm. 拟合图像如图 2 所示, 相比图 1, 图 2 在轻核区和重核区符合更好.

与应用广泛的 (6) 式拟合的结果相比, 均方根偏差下降了, 说明用 (13) 式能够较好地描述核电荷半径的变化趋势.

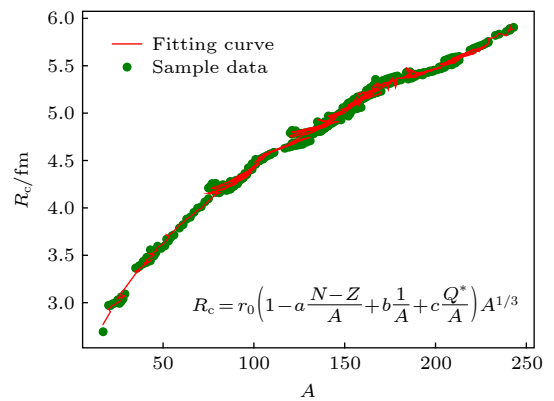


图 2 $R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N - Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q^*}{A} \right) A^{1/3}$ 的拟合曲线图

Fig. 2. The fitting curve of the Eq. (13).

由 (12) 式可知, Q 还与总自旋 I 有关, 继续从文献 [34] 中取出对应的 368 个核素的总自旋 I , 反求内禀电四极矩 Q_0 , 并取绝对值, 表示成 Q_0^* , 替换 (13) 式中的 Q^* , 得到

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A} \right) A^{1/3}. \quad (14)$$

拟合 (14) 式, 得到参数 $r_0 = 1.2220$ fm, $a = 0.1410$, $b = 2.4200$, $c = 0.3643$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0372$ fm. 拟合图像如图 3 所示, 图 3 在重核的一些区域表现得更平滑.

再取 (9) 式中能反映奇偶摆动现象的 δ 项, 将其加入 (14) 式中得到 (15) 式:

$$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A} + d \frac{\delta}{A} \right) A^{1/3}. \quad (15)$$

拟合 (15) 式, 得到参数 $r_0 = 1.2223$ fm, $a = 0.1421$, $b = 2.4577$, $c = 0.3660$, $d = 0.1705$, 均方根偏差 $\sigma = 0.0369$ fm. 拟合图像如图 4 所示.

为了看出 (13) 式—(15) 式在具体的同位素链中拟合的好坏程度, 选取两个满壳附近的核 Ba 和 Fr, 与两个远离满壳附近的核 Ho 和 Lu. 把 (13) 式—(15) 式计算的理论的核电荷半径值与实验值进行对比, 结果如图 5 所示. 可以看出, 在实验曲线上的一些跳跃和转折, (13) 式并不能很好地体现. 这些跳跃和转折现象与奇偶摆动、壳效应、

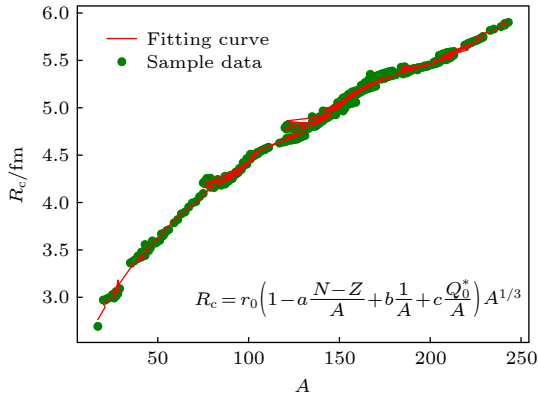


图 3 $R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A} \right) A^{1/3}$ 的拟合曲线图

Fig. 3. The fitting curve of the Eq. (14).

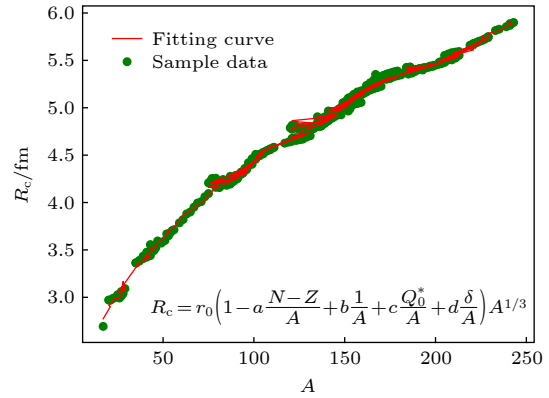


图 4 $R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A} + d \frac{\delta}{A} \right) A^{1/3}$ 的拟合曲线图

Fig. 4. The fitting curve of the Eq. (15).

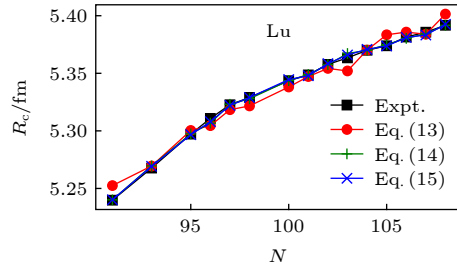
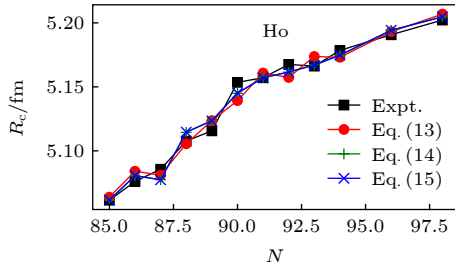
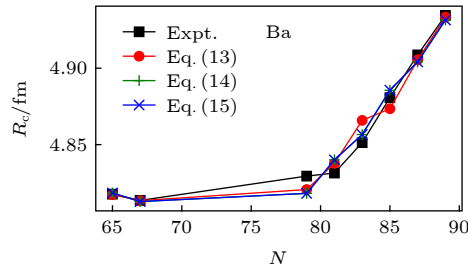
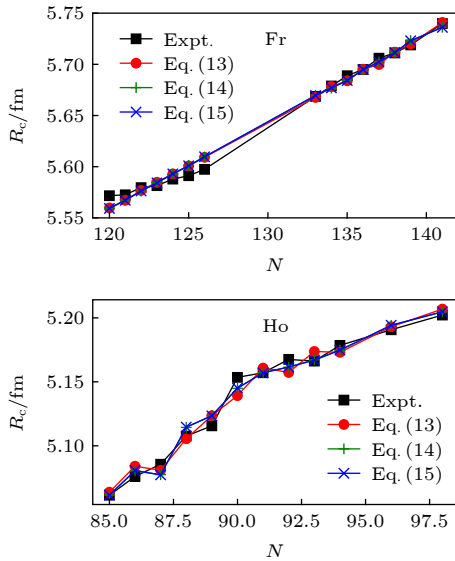


图 5 Ba 和 Fr, Ho 和 Lu 四个同位素链核电荷半径的实验值与 (13) 式—(15) 式计算的核电荷半径理论值的对比

Fig. 5. The experimental values of the nuclear charge radii of Ba and Fr, Ho and Lu isotopic chains are compared with the theoretical values calculated by Eqs. (13)–(15).

形变相关. 把电四极矩项转变为内禀电四极矩项之后, 均方根偏差下降, 说明含有内禀电四极矩的(14)式与实验曲线符合得更好, 且(14)式在跳跃与转折的地方有了些许改善. 在加入了奇偶摆动项之后, 在跳跃与转折的地方符合得更好, 但是在一些没有出现跳跃与转折的地方, (15)式却表现出来跳跃与转折, 这表明仅仅加入这些项还是不足以描述核电荷半径复杂的变化.

为了从整体上看出现理论值与实验值的差距, 计

算了核电荷半径的实验值与(13)式—(15)式计算的理论值的差值 ΔR , 做出 ΔR 随质子数 Z 变化, 结果如图6所示. 可以看出, 整体趋势上(15)式得出的结果比(13)式和(14)式更加集中, 也印证了(15)式得出的均方根偏差最小. (13)式计算的 ΔR 相对比较分散, 但在 $Z = 10$ 的轻核区, (13)式有少数核的 ΔR 比(14)式和(15)式的 ΔR 小. 在图6中还可以看到, 传统幻数 $Z = 28, 50, 82$ 所对应的 ΔR 接近于零, 也印证了电四极矩与壳效应相关.

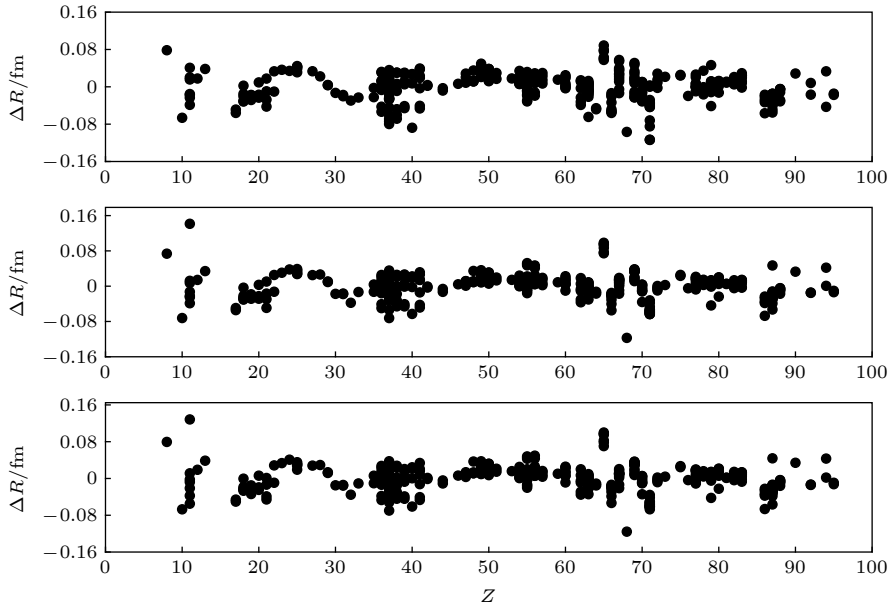


图6 计算368个核电荷半径的实验值分别与(13)式—(15)式计算的理论值的差值. (从上到下依次为核电荷半径的实验值与(13)式的差值图, 核电荷半径的实验值与(14)式的差值图, 核电荷半径的实验值与(15)式的差值图)

Fig. 6. The difference between the experimental value of 368 nuclear charge radii and the theoretical value calculated by Eqs. (13)–(15), respectively.

表1 各种核电荷半径公式

Table 1. The mentioned equations for nuclear charge radius R_c .

公式	参数	σ/fm
$R_c = r_0 A^{1/3}$	$r_0 = 1.2269 \text{ fm}$	$\sigma = 0.1224$
$R_c = r_0 Z^{1/3}$	$r_0 = 1.6394 \text{ fm}$	$\sigma = 0.0939$
$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2827 \text{ fm}, a = 0.2700$	$\sigma = 0.0855$
$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2331 \text{ fm}, a = 0.1461, b = 2.3301$	$\sigma = 0.0510$
$R_c = r_0 \left(1 + a \frac{N-N^*}{Z}\right) Z^{1/3}$	$r_0 = 1.6312 \text{ fm}, a = 0.0627$	$\sigma = 0.0618$
$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2221 \text{ fm}, a = 0.1350, b = 2.4698, c = 0.8976$	$\sigma = 0.0397$
$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2220 \text{ fm}, a = 0.1410, b = 2.4200, c = 0.3643$	$\sigma = 0.0372$
$R_c = r_0 \left(1 - a \frac{N-Z}{A} + b \frac{1}{A} + c \frac{Q_0^*}{A} + d \frac{\delta}{A}\right) A^{1/3}$	$r_0 = 1.2223 \text{ fm}, a = 0.1421, b = 2.4577, c = 0.3660, d = 0.1705$	$\sigma = 0.0369$

对于轻核区, (13) 式—(15) 式的拟合结果不是很好, 计算的理论和实验值差值较大, 这说明仅仅通过几个参数来精准地描述核电荷半径的变化趋势是很困难的. 以后还需要挖掘出蕴含在更深层的物理内容来对其进行补充. 最后, 将本文所提及的公式列在表 1 中, 可以直观地看到各公式拟合的参数和精确程度.

4 结论与展望

本文对已有的核电荷半径实验数据和已经提出的核电荷半径公式进行验证. 并在三参数的基础上加入了电四极矩项, 发现计算结果的均方根偏差下降. 在已有的电四极矩数据的基础上, 又求出内禀电四极矩. 替换拟合公式中原有的电四极矩项, 发现在质子数 $Z = 28, 50, 82$ 附近元素的实验值与公式计算的理论值相差非常小, 说明了内禀电四极矩项的加入, 很好地反映了壳效应的变化趋势, 继续加入奇偶摆动项之后, 进行拟合并计算均方根偏差, 发现均方根又减小了. 相比于已经提出的公式, 新提出的公式更好地反映了原子核形变、壳效应和奇偶摆动等变化趋势, 在计算精度上也有所提高, 这将为今后的实验提供有益的参考.

参考文献

- [1] De Vries H, De Jager C W, De Vries C 1987 *At. Data Nucl. Data Tables* **36** 495
- [2] Boehm E, Lee P L 1974 *At. Data Nucl. Data Tables* **14** 605
- [3] Engfer R, Schneuwly H, Vuileumier J L, Walter H K, Zehnder A 1974 *At. Data Nucl. Data Tables* **14** 509
- [4] Fricke G, Bernhardt C, Heilig K, Schaller L A, Schellenberg L, Shera E B, De Jager C W 1995 *At. Data Nucl. Data Tables* **60** 177
- [5] Heilig K, Steudel A 1974 *At. Data Nucl. Data Tables* **14** 613
- [6] Aufmuth P, Heilig K, Steudel A 1987 *At. Data Nucl. Data Tables* **37** 455
- [7] Angeli I, Marinova K P 2013 *At. Data Nucl. Data Tables* **99** 69
- [8] Nerlo-Pomorska B, Pomorski K 1993 *Z. Phys. A* **344** 359
- [9] Nerlo-Pomorska B, Pomorski K 1994 *Z. Phys. A* **348** 169
- [10] Sheng Z Q, Fan G W, Qian J F 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 112101 (in Chinese) [圣宗强, 樊广伟, 钱建发 2015 物理学报 **64** 112101]
- [11] Zeng J Y 1957 *Acta Phys. Sin.* **13** 357 (in Chinese) [曾谨言 1957 物理学报 **13** 357]
- [12] Zeng J Y 1975 *Acta Phys. Sin.* **24** 151 (in Chinese) [曾谨言 1975 物理学报 **24** 151]
- [13] Zhang S Q, Meng J, Zhou S G, Zeng J Y 2002 *High Energy Physics and Nuclear Physics* **26** 252 (in Chinese) [张双全, 孟杰, 周善贵, 曾谨言 2002 高能物理与核物理 **26** 252]
- [14] Barzakh A E, Fedorov D V, Ivanov V S, Molkanov P L, Moroz F V, Orlov S Y, Pantelev V N, Seliverstov M D, Volkov M Y 2018 *Phys. Rev. C* **97** 014322
- [15] Yang J J, Piekarewicz J 2018 *Phys. Rev. C* **97** 014314
- [16] Safronova M S, Porsev S G, Kozlov M G, Thielking J, Okhapkin M V, Glowacki P, Meier D M, Peik E 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 213001
- [17] Casten R F 1985 *Phys. Rev. Lett.* **54** 1991
- [18] Casten R F, Brenner D S, Hausteijn P E 1987 *Phys. Rev. Lett.* **58** 658
- [19] Casten R F 1988 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **14** S71
- [20] Casten R F, Zamfir N V 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 402
- [21] Foy B D, Casten R F, Zamfir N V, Brenner D S 1994 *Phys. Rev. C* **49** 1224
- [22] Saha M, Sen S 1994 *Phys. Rev. C* **49** 2460
- [23] Gangopadhyar G 2009 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **36** 095105
- [24] Stopkowicz S, Gauss J 2014 *Phys. Rev. A* **90** 022507
- [25] Zhao P W, Zhang S Q, Meng J 2014 *Phys. Rev. C* **89** 011301
- [26] Otsuka T, Suzuki T, Fujimoto R, Grawe H, Akaishi Y 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 232502
- [27] Bohr A 1976 *Science* **48** 365
- [28] Cheal B, Mane E, Billowes J, Bissell M L, Blaum K, Brown B A, Charlwood F C, Flanagan K T, Forest D H, Geppert C, Honma M, Jokinen A, Kowalska M, Krieger A, Kramer J, Moore I D, Neugart R, Neyens G, Nortershauser W, Schug M, Stroke H H, Vingerhoets P, Yordanov D T, Zakova M 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 202502
- [29] Ohtsubo T, Stone N J, Stone J R, Towner I S, Bingham C R, Gaulard C, Koster U, Muto S, Nikolov J, Nishimura K, Simpson G S, Soti G, Veskovic M, Walters W B, Wauters F 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 032504
- [30] Snyder J B, Reviol W, Sarantites D G, Afanasjev A V, Janssens R V F, Abusara H, Carpenter M P, Chen X, Chiara C J, Greene J P, Lauritsen T, McCutchan E A, Seweryniak D, Zhu S 2013 *Phys. Rev. B* **723** 61
- [31] Heyde K, Wood J L 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1467
- [32] Yordanov D T, Balabanski D L, Bieron J, Bissell M L, Blaum K, Budincevic I, Frizsche S, Frommgen N, Georgiev G 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 192501
- [33] Chen C X 2015 *M. S. Thesis* (Guangxi: Guangxi Normal University) (in Chinese) [陈春杏 2015 硕士学位论文 (广西: 广西师范大学)]
- [34] Stone N J 2016 *At. Data Nucl. Data Tables* **111-112** 1

Study of nuclear charge radius^{*}

Cao Ying-Yu Guo Jian-You[†]*(School of Physics and Materials Science, Anhui University, Hefei 230601, China)*

(Received 8 October 2019; revised manuscript received 8 May 2020)

Abstract

Based on the existing experimental data of nuclear radius, the previous formula of nuclear charge radius is verified and discussed. Comparing the formula of the single-parameter nuclear charge radius, it is proved that the formula of $Z^{1/3}$ law is better than the formula of $A^{1/3}$ law. We refitted the two-parameter formula and the three-parameter formula that have been proposed and confirmed that the two-parameter and three-parameter formula fit better than the single-parameter formula. It is shown that show that the deformation plays a key role in the nuclear charge radius. The electric quadrupole moment is an important physical quantity representing the properties of the nucleus. Its appearance indicates the deviation from spherical symmetry and also reflects the size of the nuclear deformation. The electric quadrupole moment is also one of the basic observations to understand the distribution of matter within the nucleus, to examine the nuclear model, and to observe nucleon-nuclear interactions. Taking into account the relationship between the nuclear quadrupole moment and the deformation, the electric quadrupole moment factor is added to the original three-parameter formula to obtain a new formula for the nuclear charge radius. Fitting the four-parameter formula, it is found that the theoretical value of the nuclear charge radius is in good agreement with the experimental value, the root-mean-square deviation is 0.0397 fm. Considering the relationship between the total spin and the electric quadrupole moment, the intrinsic electric quadrupole moment is obtained and brought into the formula for fitting, and the root-mean-square deviation further decreases, the root-mean-square deviation is 0.0372 fm. Finally, considering the universality of odd-even staggering, we add the δ term that can reflect the odd and even oscillation phenomenon, and the root-mean-square deviation obtained by the formula is 0.369 fm, which better reflects the relationship between the deformation and the nuclear charge radius. Compared with the formulas already proposed, the new formula can better reflect the variation trend of nuclear deformation, shell effect, odd-even staggering, etc., and the calculation accuracy is also improved, which can provide a useful reference for future experiments.

Keywords: nuclear charge radius, quadrupole moment, spin**PACS:** 21.10.Ft, 21.10.Ky, 21.10.Hw**DOI:** [10.7498/aps.69.20191643](https://doi.org/10.7498/aps.69.20191643)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11575002).

† Corresponding author. E-mail: jianyou@ahu.edu.cn