



## 共焦腔稳定性突变分析

胡悦 曹凤朝 董仁婧 郝辰悦 刘大禾 石锦卫

### Analysis of stability catastrophe of confocal cavity

Hu Yue Cao Feng-Zhao Dong Ren-Jing Hao Chen-Yue Liu Da-He Shi Jin-Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 224202 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200814

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200814>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 三端磁隧道结的稳定性分析

Stability analysis in three-terminal magnetic tunnel junction

物理学报. 2019, 68(20): 207201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190927>

#### 垂直自由层倾斜极化层自旋阀结构中的磁矩翻转和进动

Magnetization reversal and precession in spin valve structures with a perpendicular free layer and a tilted polarizer layer

物理学报. 2017, 66(12): 127201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.127201>

#### 共焦腔增强的空气拉曼散射

Confocal-cavity-enhanced Raman scattering of ambient air

物理学报. 2017, 66(19): 190703 <https://doi.org/10.7498/aps.66.190703>

#### 双共焦波导结构二次谐波太赫兹回旋管谐振腔设计

Design of second harmonic terahertz gyrotron cavity based on double confocal waveguide

物理学报. 2020, 69(6): 068401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191222>

#### 基于复杂网络动力学模型的无向加权网络节点重要性评估

Evaluation methods of node importance in undirected weighted networks based on complex network dynamics models

物理学报. 2018, 67(9): 098901 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172295>

#### 混有协同自适应巡航控制车辆的异质交通流稳定性解析与基本图模型

Stability analysis and fundamental diagram of heterogeneous traffic flow mixed with cooperative adaptive cruise control vehicles

物理学报. 2017, 66(9): 094502 <https://doi.org/10.7498/aps.66.094502>

## 共焦腔稳定性突变的分析\*

胡悦 曹凤朝 董仁婧 郝辰悦 刘大禾 石锦卫†

(北京师范大学物理学系, 应用光学北京市重点实验室, 北京 100875)

(2020年5月31日收到; 2020年6月28日收到修改稿)

光学谐振腔是现代光学的基础性器件. 本文从最常见的共焦腔出发, 分别从代数解析和几何拓扑的角度解释了其稳定性随参数变化而发生突变的现象, 给出了突变的数学原因和物理原因. 从数学的角度看, 共焦腔稳定性突变是因为反三角余弦函数的函数值在传统的定义域以外由复数向实数的突变; 从几何拓扑的角度看, 根据光线在腔内的传播路径定义拓扑荷, 由于只有拓扑荷为零的腔是稳定的, 且拓扑荷的变化是量子化的, 因此共焦腔的稳定性发生突变. 并根据其突变原因设计由双非稳腔组合的耦合腔, 重新构建拓扑荷, 实现了新的稳定腔, 并且在其中发现了单腔中没有的新模式.

**关键词:** 共焦腔, 稳定性分析, 拓扑结构

**PACS:** 42.60.Lh, 42.15.Dp, 42.25.-p, 42.55.Sa

**DOI:** 10.7498/aps.69.20200814

## 1 引言

光学谐振腔是一类非常重要的光学元件, 在激光的产生<sup>[1-2]</sup>、非线性光学转换<sup>[3-6]</sup>、光与物质相互作用<sup>[7-8]</sup>、光学传感器<sup>[9-10]</sup>等领域都有广泛的应用. 对光学谐振腔的稳定性分析是其主要的研究方面, 该研究一般是从几何光学的角度来进行的. 根据它们几何损耗的不同可以分为稳定腔、临界腔和非稳腔三类. 其中典型稳定腔包括对称共焦腔、满足一定参数条件的双凹腔、平凹腔等; 典型临界腔包括平行平面腔、共心腔等; 典型非稳腔包括双凸腔、平凸腔等<sup>[1]</sup>. 由于腔的种类不同, 其几何损耗有很大的不同, 因此它们在激光器发展的历史上分别有着不同的用途. 比如, 调谐腔的耦合系数与损耗可以用于制作单模激光器<sup>[11-15]</sup>、高灵敏度传感器<sup>[16-19]</sup>、单向耦合器件等<sup>[20-21]</sup>.

教材中有一种常用的判断谐振腔稳定性的数学方法——传播矩阵法<sup>[1]</sup>. 该方法将光线在谐振腔

中的直线传播和反射过程表示为矩阵的形式, 进而计算出光线在腔内往返 $n$ 次对应的传播矩阵 $T_n$ , 如(1)式所示:

$$T_n = \frac{1}{\sin \phi} \begin{pmatrix} A \sin n\phi - \sin(n-1)\phi & B \sin n\phi \\ C \sin n\phi & D \sin n\phi - \sin(n-1)\phi \end{pmatrix}. \quad (1)$$

(1) 式中 $A, B, C, D, \phi$ 的表达式如(2)式所示:

$$\begin{cases} A = 1 - \frac{2L}{R_2}, \\ B = 2L \left(1 - \frac{L}{R_2}\right), \\ C = - \left[ \frac{2}{R_1} + \frac{2}{R_2} \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right) \right], \\ D = - \left[ \frac{2L}{R_1} - \left(1 - \frac{2L}{R_1}\right) \left(1 - \frac{2L}{R_2}\right) \right], \\ \phi = \arccos \frac{1}{2} (A + D), \end{cases} \quad (2)$$

式中,  $R_1$ 和 $R_2$ 分别表示两腔镜的半径,  $L$ 表示腔长, 如图1(a)所示. 若将光线表示为列向量的形式, 则在谐振腔内往返 $n$ 次的光线与入射光线满足如(3)式:

\* 国家自然科学基金(批准号: 11674032, 11774035, 91950108)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: shijinwei@bnu.edu.cn

$$\begin{pmatrix} r_n \\ \theta_n \end{pmatrix} = T_n \begin{pmatrix} r_1 \\ \theta_1 \end{pmatrix}, \quad (3)$$

式中  $r_{n(1)}$  表示往返  $n$  次 (入射) 的光线与轴的距离,  $\theta_{n(1)}$  表示往返  $n$  次 (入射) 的光线与腔轴的夹角.

因此, 若谐振腔稳定, 需要保证矩阵  $T_n$  的每一个元素都为有限值, 进而需要保证  $\phi$  为实数, 且不等于  $\pi$  的整数倍, 即保证  $-1 < \frac{1}{2}(A + D) < 1$ , 可改写成 (4) 式所示:

$$0 < g_1 g_2 < 1, \quad (4)$$

其中,  $g_1 = 1 - L/R_1$ ,  $g_2 = 1 - L/R_2$ . 腔的稳定性与  $g_1 g_2$  的关系如表 1 所示.

表 1 腔的稳定性与  $g_1 g_2$  的关系

Table 1. Relationship between the stability of the cavity and the factors.

稳定性	$g_1 g_2$ 的取值范围
稳定腔	$0 < g_1 g_2 < 1$
临界腔	$g_1 g_2 = 0$ 或 $g_1 g_2 = 1$
非稳腔	$g_1 g_2 < 0$ 或 $g_1 g_2 > 1$

根据表 1 中的关系, 分别以  $g_1$  和  $g_2$  为坐标轴画出稳定图, 如图 1(b) 所示. 图中白色的区域表示稳定腔, 坐标轴和双曲线上的点表示临界腔, 灰色的区域表示非稳腔.

值得指出的是上述关系式不适用于  $g_1 = 0$  且  $g_2 = 0$  的情况, 即稳定图中原点的位置. 图 1(b) 中原点代表对称共焦腔, 为稳定腔, 而非临界腔. 而这一点的特殊性质会引起共焦腔的稳定性在参数

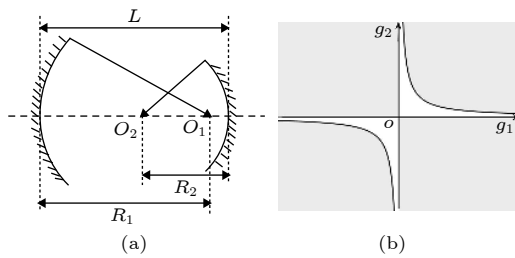


图 1 腔的稳定性分析 (a) 谐振腔的示意图及参数,  $O_1$  和  $O_2$  代表腔镜的球心,  $R_1$  和  $R_2$  分别表示两腔镜的半径,  $L$  表示腔长; (b) 稳定图, 白色的区域表示稳定腔, 坐标轴和双曲线上的点表示临界腔, 灰色的区域表示非稳腔

Fig. 1. Stability analysis of the cavity: (a) Schematic diagram and parameters of the resonator cavity:  $O_1$  and  $O_2$  represent the spherical center of the cavity mirror,  $R_1$  and  $R_2$  represent the radius of the two mirrors,  $L$  represents the cavity length; (b) stability diagram, the white area represents the stable cavity, the coordinate axis and the hyperbola point represents the critical cavity, and the gray area represents the unstable cavity.

变化过程中发生突变. 虽然是个经典体系的基础问题, 但是文献中关于这一点的研究分析还远远不够. 本文将首先阐述共焦腔稳定性突变的含义, 然后分别从解析和拓扑的角度对这个看似违背直觉的现象给出解释. 随后根据上述分析提出一种耦合的双腔, 尽管其每个单腔都是非稳的, 但是从拓扑学上分析发现, 整个双腔是稳定的. 最后用数值模拟验证了这个构想, 通过分析品质因子  $Q$  值 (quality factors) 的变化证明了腔的稳定性, 并发现了耦合双腔中还存在单腔中不存在的新模式. 这些发现提出了一种新的调控微腔损耗的方法, 对新型微纳激光器、片上非线性器件、非厄米光学传感器等研究具有一定的价值.

## 2 共焦腔稳定性的突变

共焦腔满足如 (5) 式所示的关系:

$$R_1 + R_2 = 2L. \quad (5)$$

将 (5) 式用  $g_1$  和  $g_2$  表示, 可以得到如 (6) 式所示的关系:

$$\frac{1}{1 - g_1} + \frac{1}{1 - g_2} = 2. \quad (6)$$

对于非共焦腔 (不考虑含有平面镜的腔):

$$R_1 + R_2 = 2(L + \Delta L). \quad (7)$$

当  $g_1 \neq 1$  且  $g_2 \neq 1$  时, 满足 (8) 式关系:

$$\frac{1}{1 - g_1} + \frac{1}{1 - g_2} = 2 \left( 1 + \frac{\Delta L}{L} \right). \quad (8)$$

将  $\Delta L$  分别取 0, 0.15L 和 -0.25L, 即  $R_1 + R_2 = 2L$ ,  $R_1 + R_2 = 2.3L$  和  $R_1 + R_2 = 1.5L$  三种腔在稳定图上对应的曲线画出, 如图 2 所示. 图中实线表示共焦腔, 但线上的  $g_1 = 1$  且  $g_2 = 1$  的点表示平行平面腔, 不符合共焦腔和非共焦腔的概念, 在图中用红色圆圈除去. 虚线表示满足  $R_1 + R_2 = 2.3L$  的非共焦腔, 点划线表示满足  $R_1 + R_2 = 1.5L$  的非共焦腔.

从图 2 中可以看出: 在  $g_1$  连续增大的过程中, 非共焦腔从非稳腔变化到稳定腔的过程中必须经过临界腔; 而共焦腔的稳定性变化不经过临界腔, 直接从非稳腔变化为稳定腔, 再到非稳腔. 这一稳定性突变过程看似违反物理上的连续性, 下面将会从解析和拓扑两个角度对其给出解释.

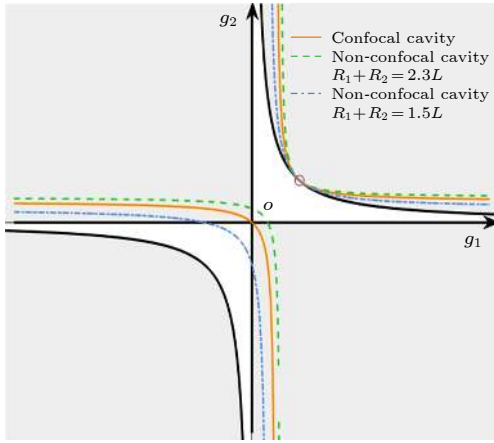


图 2 共焦腔和几种非共焦腔对应的曲线, 实线表示共焦腔, 虚线表示满足  $R_1 + R_2 = 2.3L$  的非共焦腔, 点划线表示满足  $R_1 + R_2 = 1.5L$  的非共焦腔 (红色圆圈除外)

Fig. 2. Stability curves corresponding to the confocal cavity and non-confocal cavities. The solid line represents the confocal cavity, the dotted line represents the non-confocal cavity satisfying  $R_1 + R_2 = 2.3L$ , and the dash dot line represents the non-confocal cavity satisfying  $R_1 + R_2 = 1.5L$  (except for the red circle).

### 3 共焦腔稳定性突变的解析分析

考虑一个腔长仍为  $L$  的非对称共焦腔, 它的两个腔镜的半径分别为  $R_1 = L + \Delta R$  和  $R_2 = L - \Delta R$ , 其中  $\Delta R \ll L$ , 是一个数学小量, 它在稳定图上对应的点在实线上原点附近的邻域内, 从稳定图上看属于非稳腔. 现在需要计算这个共焦腔的传播矩阵  $T_n$ , 从而找出稳定性突变的解析原因.

为了计算矩阵  $T_n$  的元素, 首先需要计算参数  $\phi$ . 将  $R_1$  和  $R_2$  的值代入 (2) 式的第 5 式, 可以求出  $\phi$  如 (9) 式所示:

$$\phi = \arccos \left[ -\frac{L^2 + \Delta R^2}{(L + \Delta R)(L - \Delta R)} \right]. \quad (9)$$

经计算可知,  $-\frac{L^2 + \Delta R^2}{(L + \Delta R)(L - \Delta R)} \leq -1$ , 不在传统的反三角余弦函数定义域范围之内, 因此, 为求解  $\phi$  的值, 需要对反三角函数的定义域进行延拓.

将  $-\frac{L^2 + \Delta R^2}{(L + \Delta R)(L - \Delta R)}$  的值记作  $-a$ , 其中  $a \geq 1$ , 故  $\arccos(-a) = \phi$ . 由此可知  $\cos \phi = -a$ , 需根据此式求解  $\phi$ .

用  $\phi + (2k + 1)\pi$  替换上式中的  $\phi$  可得:

$$\cos [\phi + (2k + 1)\pi] = a, \quad (10)$$

其中,  $k$  为整数, 即  $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ . 将 (10) 式的余弦函数用指数函数展开, 可得:

$$\frac{\exp \{i[\phi + (2k + 1)\pi]\} + \exp \{-i[\phi + (2k + 1)\pi]\}}{2} = a, \quad (11)$$

整理可以得到一元二次方程:

$$\exp \{i[\phi + (2k + 1)\pi]\}^2 - 2a \exp \{i[\phi + (2k + 1)\pi]\} + 1 = 0, \quad (12)$$

可求解  $\phi$ :

$$\phi = -(2k + 1)\pi \pm i \ln \left( a + \sqrt{a^2 - 1} \right). \quad (13)$$

从 (13) 式可以看出,  $\phi$  的实部不唯一. 按照上述方法对反三角余弦函数的定义域进行延拓, 可以发现, 在传统定义域以外的反三角余弦函数的值是实部为  $\pi$  的奇数倍的复数. 从后续计算中可以发现,  $\phi$  的实部以及虚部的符号不影响计算结果, 因此为了简化计算, 规定:

$$\phi = -\pi - i \ln \left( a + \sqrt{a^2 - 1} \right) = -\pi - ib, \quad (14)$$

即取  $\phi$  的实部为  $-\pi$ , 虚部为  $-i \ln \left( a + \sqrt{a^2 - 1} \right)$ , 并将  $\ln \left( a + \sqrt{a^2 - 1} \right)$  的值记作  $b$ , 满足  $b \geq 0$ .

将矩阵  $T_n$  中的  $\sin \phi$  和  $\sin n\phi$  展开成指数函数, 再将  $\phi$  的值代入, 可得:

$$\begin{aligned} \frac{\sin n\phi}{\sin \phi} &= \frac{\exp(in\phi) - \exp(-in\phi)}{\exp(i\phi) - \exp(-i\phi)} \\ &= -\frac{\cos(n\pi)[\exp(nb) - \exp(-nb)]}{\exp b - \exp(-b)}. \end{aligned} \quad (15)$$

从 (15) 式中可以看出, 若将  $\cos(n\pi)$  替换成  $\cos[(2k + 1)n\pi]$ , 再将  $b$  替换成  $-b$ , 结果不受影响, 因此上述为简化计算而做出的规定是合理的.

当光线往返次数足够大, 即  $n \rightarrow \infty$  时, 对于非对称共焦腔 ( $b > 0$ ), 可省略分子上的  $\exp(-nb)$ , 将上式简化为

$$\frac{\sin n\phi}{\sin \phi} \approx -\frac{\cos(n\pi) \exp(nb)}{\exp b - \exp(-b)}. \quad (16)$$

同理可得:

$$\frac{\sin(n-1)\phi}{\sin \phi} \approx -\frac{\cos(n\pi) \exp[(n-1)b]}{\exp b - \exp(-b)}. \quad (17)$$

将 (16) 式、(17) 式代入矩阵  $T_n$  的表达式中, 得到这个非对称共焦腔的传播矩阵, 如 (18) 式所示:

$$T_n = \begin{pmatrix} \left(-A + \frac{1}{e}\right) \frac{\cos(n\pi)}{\exp b - \exp(-b)} \exp(nb) & -B \frac{\cos(n\pi)}{\exp b - \exp(-b)} \exp(nb) \\ -C \frac{\cos(n\pi)}{\exp b - \exp(-b)} \exp(nb) & \left(-D + \frac{1}{e}\right) \frac{\cos(n\pi)}{\exp b - \exp(-b)} \exp(nb) \end{pmatrix}. \quad (18)$$

从 (18) 式中的可以看出,  $T_n$  的每一项都含有  $\exp(nb)$  项, 且对于非对称共焦腔,  $b > 0$ , 因此当  $n \rightarrow \infty$  时,  $T_n$  发散. 但是对于对称共焦腔,  $\Delta R = 0$ , 因此  $\phi = \pi$  为实数, 上述计算不成立. 根据洛必达法则可以知道:

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{\sin(n\phi)}{\sin\phi} = \lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{n \cos(n\phi)}{\cos\phi} = \begin{cases} n & (n \text{ 为奇数}) \\ -n & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}, \quad (19)$$

$$\lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{\sin(n-1)\phi}{\sin\phi} = \lim_{\phi \rightarrow \pi} \frac{(n-1) \cos(n-1)\phi}{\cos\phi} = \begin{cases} -n+1 & (n \text{ 为奇数}) \\ n-1 & (n \text{ 为偶数}) \end{cases}. \quad (20)$$

将 (19) 式、(20) 式代入  $T_n$  的表达式, 可以得到对称共焦腔的传播矩阵. 当光线往返次数为奇数次时:

$$T_{n \text{ 为奇数}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (21)$$

当光线往返次数为偶数次时:

$$T_{n \text{ 为偶数}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (22)$$

因此, 对称共焦腔的传播矩阵不发散, 从而验证了对称共焦腔为稳定腔.

综合分析非对称共焦腔和对称共焦腔的传播矩阵, 可以发现, 导致共焦腔稳定性突变的解析原因是在传统定义域的边界, 反三角函数值由复数突变为实数.

#### 4 共焦腔稳定性突变的拓扑分析

下面, 我们从几何光线拓扑性质的角度重新理解这个问题. 根据 (3) 式可以知道, 往返偶数次和奇数次出射的光线分别是入射光线自身和一条与它关于光轴对称的光线, 在对称共焦腔内形成稳定的模式分布.

画出一束平行于光轴的入射光在对称共焦腔和非对称共焦腔中传播的路径, 如图 3 所示. 从几何光学的角度, 观察它在腔内的传播路径, 并根据闭合回路的数量及方向定义拓扑荷, 记作 TC (topological charge). 下文将阐述本文对共焦腔的拓扑荷的定义: 规定按照右手螺旋定则, 方向向外的回路记作  $l$  (loop) = +1, 向内的回路  $l = -1$ ; 按照图 1 的腔镜配置, 定义入射光的方向  $d$  (direction), 由曲率半径大的腔镜射向曲率半径小的腔镜  $d = +1$ , 由曲率半径小的腔镜射向曲率半径大的腔镜  $d = -1$ , 则腔的拓扑荷的定义为各回路的  $l$  与  $d$  的乘积之和:

$$TC = \sum l \cdot d. \quad (23)$$

将图 3 中左、右两面腔镜的半径分别记作  $R_1$ ,  $R_2$ , 则图 3(a)、3(b)、3(c) 分别为稳定图上第二象限的非对称共焦腔 ( $R_1 < R_2$ )、对称共焦腔和第四象限的非对称共焦腔 ( $R_1 > R_2$ ) 内的光线传播路径图, 其中图 3(a) 与图 3(c) 互为镜像. 图中已经标出每一个回路对应的拓扑荷. 图 3(a) 的非对称共焦腔内不能形成稳定的模式, 对于图中给定的光线

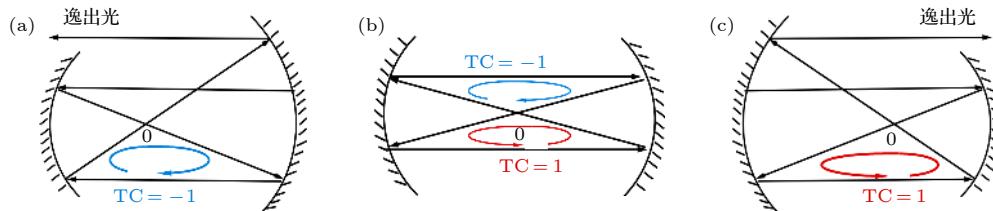


图 3 对称和非对称共焦腔的拓扑荷分析 光线在 (a) 稳定图上第二象限的非对称共焦腔 ( $R_1 < R_2$ ); (b) 对称共焦腔; (c) 第四象限的非对称共焦腔 ( $R_1 > R_2$ ) 内的传播路径图

Fig. 3. Topological charge analysis of symmetric and asymmetric confocal cavities. The propagation path diagram of light in: (a) the asymmetric confocal cavity in the second quadrant ( $R_1 < R_2$ ); (b) the symmetric confocal cavity; (c) the asymmetric confocal cavity in the fourth quadrant ( $R_1 > R_2$ ).

只能有一个闭合回路,且根据我们的规定和图示的入射方式,  $TC = -1$ ; 图 3(c) 的非对称共焦腔与上图互为镜像,二者在稳定图上对应的点分别位于二、四象限,且关于一三象限的角平分线对称,以同样的方式向图 6(c) 所示的腔镜上入射一束光,也只能形成一个闭合回路,且  $TC = +1$ . 还可以按照另一种方式理解,即图 3(c) 相当于图 3(a) 的时间反演,自然拓扑荷的绝对值相等,符号相反. 图 3(b) 为对称共焦腔,其内部有稳定的模式,可以形成方向相反的两个回路,因此任意光线的  $TC = 0$ .

从稳定图上看,三个共焦腔对应的点分别位于实线上第二象限、原点和第四象限,可以据此判断,位于第二象限的所有非对称共焦腔拓扑荷都为  $-1$ , 第四象限的非对称共焦腔拓扑荷均为  $+1$ . 因此,当  $g_1$  从负数连续增大,并经过原点时,拓扑荷从  $-1$  变为  $0$  再变为  $+1$ . 只有拓扑荷为零的腔内才可能形成闭合回路,从而是稳定的,而拓扑荷等于  $+1$  和  $-1$  的腔都是非稳的. 由于拓扑荷的变化只能是量子化的,不是连续的,因此共焦腔的稳定性发生突变.

此外,上述分析也说明了稳定腔的拓扑荷为零,非稳腔的拓扑荷不为零;而且,拓扑荷为零的腔一定是稳定腔. 如果把拓扑荷分别为  $-1$  和  $+1$  的两个非稳腔组合在一起,可以形成总拓扑荷为零的稳定的耦合腔,如图 4(a) 所示. 这个新的稳定腔是两个非稳定腔耦合形成的,因此其腔模不同于原来的非稳定腔,为验证两个非对称共焦腔组合后的耦合腔的稳定性,利用时域有限差分法 (finite difference time domain method, FDTD) 分别对如图 3(b)、图 3(c) 及图 4(a) 中所示的对称共焦腔、非对称共焦腔及耦合腔进行了电场模拟. 模拟采用的为置于腔内的偶极子光源,波长为  $400\text{--}700\text{ nm}$ , 偏振方向平行于  $y$  方向,对称共焦腔、非对称共焦腔腔长皆为  $2\text{ }\mu\text{m}$ , 耦合腔由两个非对称共焦腔组成,中间腔镜的间距设为零. 图 4(b) 中红色虚线所示为拓扑数为零的对称共焦腔内存在的模式,绿色虚线所示为非对称共焦腔内存在的模式,蓝线实线所示为耦合腔内存在的模式. 通过模拟对比,在偶极子光源激发下,对称共焦腔内可以稳定存在四个模式. 由于拓扑数为零的耦合腔为腔长相同的非对称共焦腔组成,因此耦合腔内同样存在可以与对称共焦腔匹配的模式. 而非对称共焦腔的光谱虽然也有四个模式,但其半宽明显增大,  $Q$  值降低,表明由于腔镜的不对称性,损耗明显增大.

图中序号 1, 2, 3, 4 分别表示对称共焦腔、非对称共焦腔及耦合腔中同时支持的模式.

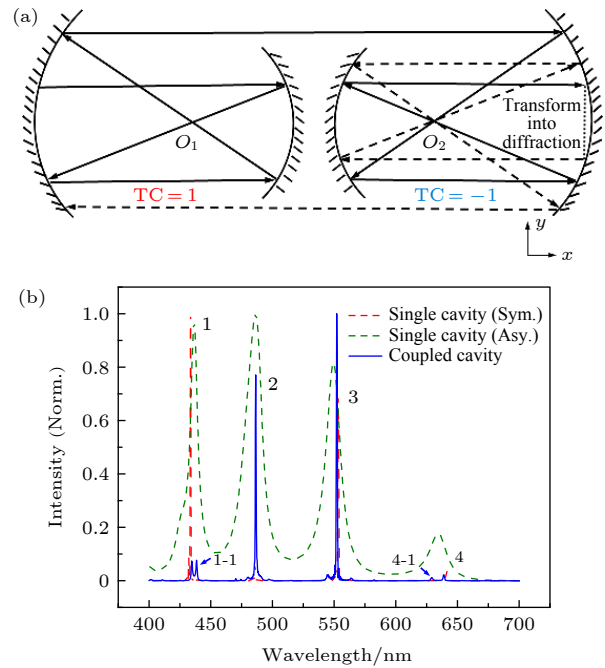


图 4 总拓扑荷为零的稳定的耦合腔 (a) 耦合腔示意图; (b) 对称共焦腔、耦合腔内的模式

Fig. 4. Stable coupling cavities with a total topological charge of zero: (a) Schematic diagram of the coupling cavity; (b) symmetrical confocal cavity and the mode in the coupling cavity.

表 2 中分别列出了对称共焦腔、非对称共焦腔及耦合腔内支持的模式的  $Q$  值. 通过对比,对称共焦腔内模式可以稳定存在,半宽较窄,只有  $1\text{ nm}$  左右,  $Q$  值恢复到对称共焦腔的水平. 而非对称共焦腔内虽然也存在四个模式,但损耗明显在增大,  $Q$  值降低数十倍. 而将参数相同的两个非对称共焦腔组成耦合腔后,腔内模式再次趋于稳定. 因此如果把拓扑荷分别为  $-1$  和  $+1$  的两个非稳腔组合在一起,可以形成总拓扑荷为零的稳定的耦合腔. 显然,如果逐渐地减小第二个腔的尺寸,第一个腔中泄露的模式未必能全部被第二个腔束缚,换句话说,不是第一个腔泄露的每一道几何光线的拓扑荷

表 2 对称、非对称共焦腔及耦合腔内模式的  $Q$  值  
Table 2.  $Q$  factor of modes in symmetric, asymmetric and coupled confocal cavities.

模式 $Q$ 值	1	1-1	2	3	4	4-1
对称共焦腔	666.2		555.6	505.6	427.5	
非对称共焦腔	40.4		23.5	28.9	27.4	
耦合腔	274.1	276.6	491.2	494.1	406.2	248.7

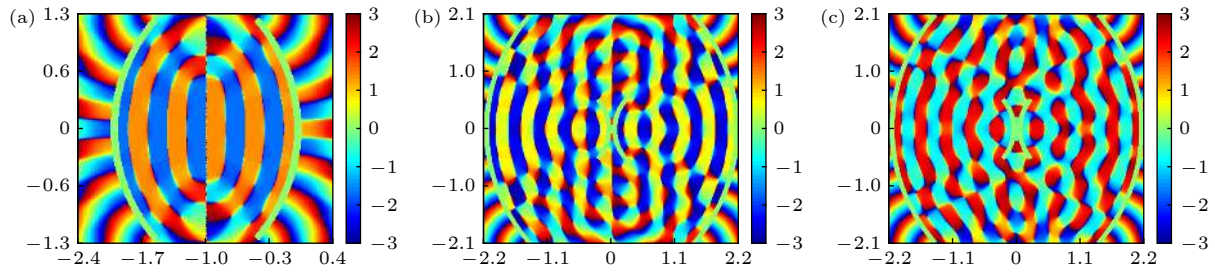


图5 模式1和模式4的相位 (a) 对称共焦腔内模式1的相位分布; (b) 耦合腔内模式1的相位分布; (c) 耦合腔内模式1-1的相位分布

Fig. 5. Phase distribution of mode 1 and mode 4: (a) Phase distribution of mode 1 in a coupled cavity; (b) phase distribution of mode 1 in a coupled cavity; (c) phase distribution of mode 1-1 in a coupled cavity.

都可以被第二个腔中和. 因此, 耦合腔给出了一个连续调节腔损耗的方法.

通过模拟对比对称共焦腔及耦合腔内的模式, 发现除了两种腔都支持的四个模式外, 耦合腔在模式1和模式4旁边还出现了新的模式1-1及4-1. 为进一步分析新模式出现的原因, 分别探究了对称共焦腔及耦合腔内的相位分布. 图5所示为模式1和模式4的相位, 其中模式1为两种腔都支持的模式, 模式1-1为耦合腔内出现的新模式, 如图4(b)中的蓝色箭头所示. 通过对比磁场的相位分布, 发现对称共焦腔所支持的四种模式的相位分布都是关于结构反对称分布, 而耦合腔内出现的新模式其相位分布为对称分布. 根据相位分布可见, 耦合腔内出现的新模式是由两个非对称共焦腔之间的耦合形成的, 这证明了耦合的非对称共焦腔拥有比单个腔更多的调节自由度.

## 5 结论

通过对反三角函数的定义域进行延拓, 求解对称共焦腔和非对称共焦腔的传播矩阵, 以及对腔内光路的拓扑分析, 分别从解析和拓扑的角度给出了共焦腔稳定性随参数变化而发生突变的原因. 从代数解析的角度, 共焦腔稳定性突变是由函数的函数值在传统的定义域以外由复数向实数的突变引起的; 从几何拓扑的角度, 通过定义拓扑荷, 得到了发生突变的物理量, 找出了共焦腔的稳定性发生突变的根本原因, 也说明了稳定性发生突变的必然性. 同时通过时域有限差分法对共焦腔稳定性突变的原因进行了验证. 上述分析表明, 通过附加一个非对称共焦腔, 我们可以重新获得稳定腔. 另外从图4可以看出, 如果微调附加腔的尺寸, 可以使得部分大角度光线依然无法形成闭合环路(拓扑荷为

零), 从而实现对整个腔的损耗的精细调谐, 这对于设计各类非厄米器件具有非常重要的价值.

## 参考文献

- [1] Zhou B K, Gao Y Z, Chen T R 2009 *Principles of Lasers* (Vol.6) (Beijing: National Defense Industry Press) pp33–39 (in Chinese) [周炳琨, 高以智, 陈倜嵘 2009 激光原理 (北京: 国防工业出版社) 第33—39页]
- [2] Svelto O, Hanna D C 2010 *Principles of Lasers* (New York: Springer)
- [3] Boyd R W 2003 *Nonlinear Optics* (Oxford: Elsevier) pp108–115
- [4] Matsko A B, Savchenkov A A, Strekalov D 2005 *IPN Progress Report* **42** 162
- [5] Bravo-Abad J, Rodriguez A, Bermel P 2007 *Opt. express* **15** 24
- [6] Smolyaninov I I, Davis C C 2004 *Phys. Rev. B* **69** 20
- [7] Hsu C W, Zhen B, Stone A D 2016 *Nat. Rev. Mater.* **1** 9
- [8] Kockum A F, Miranowicz A, De Liberato S 2019 *Nat. Rev. Phys.* **1** 1
- [9] Li M, Cushing S K, Wu N 2015 *Analyt* **140** 2
- [10] Vollmer F, Yang L 2012 *Nanophotonics* **1** 3
- [11] Jing H, Ozdemir S K, Lu X Y, Zhang J, Yang L, Nori F 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 053604
- [12] Vahala K J 2003 *Nature* **424** 6950
- [13] Wang Y, Cui B F, Fang T X 2017 *Optoelectron.* **7** 50 (in Chinese) [王阳, 崔碧峰, 房天啸 2017 光电子 **7** 50]
- [14] Liu Z Z, Yang J, Du J, Hu Z P, Shi T C, Zhang Z Y, Liu Y Q, Tang X S, Leng Y X, Li R 2018 *ACS Nano* **12** 5923
- [15] Wang K Y, Sun W Z, Li J K, Gu Z Y, Xiao S M, Song Q H 2016 *ACS Photonics* **3** 1125
- [16] Yang Y, Chen H J 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 246302 (in Chinese) [杨建勇, 陈华俊 2019 物理学报 **68** 246302]
- [17] Chen W J, Ozdemir S K, Zhao G M, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
- [18] Chen H J, Fang W X, Chen C Z, Li Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **65** 194205 (in Chinese) [陈华俊, 方贤文, 陈昌兆, 李洋 2019 物理学报 **65** 194205]
- [19] Angelo B, Sara P, Francesco D A 2017 *Analyt* **142** 883
- [20] Chang L, Jiang X S, Hua S Y, Yang C, Wen J M, Jiang L, Li G Y, Wang G Z, Xiao M 2014 *Nature Photon.* **8** 524
- [21] Peng B, Ozdemir S K, Lei F C, Monifi F, Gianfreda M, Long G L, Fan S H, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nature Phys.* **10** 394

# Analysis of stability catastrophe of confocal cavity\*

Hu Yue    Cao Feng-Zhao    Dong Ren-Jing    Hao Chen-Yue

Liu Da-He    Shi Jin-Wei<sup>†</sup>

(Department of Physics and Applied Optics Beijing Area Major Laboratory, Beijing Normal University, Beijing 100875, China)

( Received 31 May 2020; revised manuscript received 28 June 2020 )

## Abstract

Optical cavity is a fundamental device of modern optics and has a wide range of applications in the fields of laser generation, nonlinear optical conversion, and optical sensors. A major aspect of the properties of optical cavity is the stability analysis. According to different geometric losses, these optical cavities can be divided into three types: stable cavity, critical cavity, and unstable cavity. The determination of the stability of the optical cavity is the basic problem of a classic system, but the research and analysis of this point have been much insufficient in the past. In this paper, by extending the definition domain of the inverse trigonometric function, the propagation matrices of the symmetric confocal cavity and the asymmetric confocal cavity are solved. The sudden change of stability with the change of geometric parameters is explained by algebraic analysis and optical ray topology. The mathematical analysis shows that the stability catastrophe of confocal cavity is due to the sudden change in the value of inverse cosine function at the critical point of the traditional domain of definition. From the perspective of geometric topology, we define the topological charge of the cavities according to the geometric propagation path of light in the cavity. Only the cavities with zero topological charge are found to be stable, and the change of topological charge is quantized, which explains the sudden change of confocal cavity stability. Finally, we build a coupled stable cavity consisting of two unstable cavities with the same parameters. The quality factors of the coupled stable cavity and the unstable cavity are analyzed by the finite difference time domain method, which further verifies the origin of the sudden change in the stability of the confocal cavity. We propose that the coupled unstable dual cavities with opposite topological charges are able to be stable, and we also find that there are new modes in the coupled cavities which are not found in the corresponding single cavity. These findings suggest a new method for controlling microcavity loss, which has a certain value for studying the new micro-nano lasers, on-chip nonlinear devices, and non-Hermitian optical sensors.

**Keywords:** confocal cavity, stability analysis, topological structure

**PACS:** 42.60.Lh, 42.15.Dp, 42.25.-p, 42.55.Sa

**DOI:** [10.7498/aps.69.20200814](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200814)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grants Nos. 11674032, 11774035, 91950108).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [shijinwei@bnu.edu.cn](mailto:shijinwei@bnu.edu.cn)