

磁电弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的反平面断裂问题

杨东升 刘官厅

Anti-plane fracture problem of four nano-cracks emanating from a regular $4n$ -polygon nano-hole in magneto-electroelastic materials

Yang Dong-Sheng Liu Guan-Ting

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 244601 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200850

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200850>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

纳米尺度下气泡核化生长的分子动力学研究

Molecular dynamics study of bubble nucleation on a nanoscale

物理学报. 2018, 67(23): 234702 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180993>

表面效应对铁间隙型位错环的影响

Surface effect on interstitial dislocation loop in iron

物理学报. 2020, 69(3): 036101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191379>

基于金刚石体系中氮-空位色心的固态量子传感

Solid quantum sensor based on nitrogen-vacancy center in diamond

物理学报. 2018, 67(16): 160301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180788>

纳米颗粒的表面效应和电极颗粒间挤压作用对锂离子电池电压迟滞的影响

Influences of nanoscale particles and interparticle compression in electrodes on voltage hysteresis of lithium ion batteries

物理学报. 2019, 68(9): 090202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182302>

小角X射线散射表征非晶合金纳米尺度结构非均匀

Characterization of nanoscale structural heterogeneity in an amorphous alloy by synchrotron small angle X-ray scattering

物理学报. 2017, 66(17): 176109 <https://doi.org/10.7498/aps.66.176109>

纳米尺度金属-氧化物半导体场效应晶体管沟道热噪声模型

A channel thermal noise model of nanoscaled metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

物理学报. 2020, 69(5): 057101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191512>

磁电弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的反平面断裂问题*

杨东升 刘官厅†

(内蒙古师范大学数学科学学院, 呼和浩特 010022)

(2020年6月4日收到; 2020年7月26日收到修改稿)

基于 Gurtin-Murdoch 表面理论和保角变换技术, 研究了磁电弹性材料中含有带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的反平面断裂问题. 得出了考虑表面效应时磁电非渗透边界条件下的应力强度因子、电位移强度因子、磁感应强度因子和能量释放率的精确解. 数值算例展示了表面效应和孔口尺寸对磁电非渗透边界条件下应力强度因子、电位移强度因子、磁感应强度因子和能量释放率的影响. 研究发现, 考虑表面效应时的应力场强度因子、电位移强度因子和磁感应强度因子具有明显的尺寸依赖, 并且当孔口尺寸增加到一定程度后, 表面效应的影响开始减小, 最终趋于经典弹性理论.

关键词: 磁电弹性材料, 表面效应, 纳米尺度

PACS: 46.05.+b, 46.25.-y, 46.50.+a

DOI: 10.7498/aps.69.20200850

1 引言

磁电弹性材料^[1]可以实现磁能、电能和机械能的转换. 由于具有磁电耦合效应, 磁电弹性材料已广泛应用于许多工业部门和高科技领域, 如在传感器、转换器、驱动器等设备的生产中. 然而, 在磁、电和机械载荷的作用下, 材料中不可避免地存在裂纹、夹杂和位错等缺陷. 在工程中, 缺陷处容易产生应力集中, 然后缺陷会继续增大, 最终导致结构损伤. 因此, 研究磁电弹性材料的断裂问题具有重要的理论和实际意义. 文献[2, 3]研究了磁电弹性材料中含有不对称裂纹的椭圆孔的反平面问题. 在文献[4]中, 通过保角映射技术, 得到了磁电弹性材料中含有唇形裂纹的精确解. 文献[5, 6]首先利用 Stroh 方法, 得到了磁电弹性材料中含有共线裂纹的解析解. 文献[7]研究了磁电弹性材料中螺形

位错和楔形裂纹在机械、电和磁载荷作用下的相互作用. 文献[8, 9]分别研究了磁电弹性材料中含有一个和多个螺形位错与裂纹的相互作用. 文献[10]分析了磁电弹性材料中含有 Griffith 裂纹的 T 应力.

当裂纹孔的尺寸接近纳米级时, 其表面积与体积的比值将非常大. 此时, 表面效应对场强度因子和能量释放率的影响不能忽略. 为了合理地描述在纳米尺度下所引起的表面效应现象并解决纳米尺度开裂的反平面问题, Gurtin-Murdoch 表面/界面模型^[11–13]被广泛地应用. 文献[14, 15]分别研究了反平面剪切作用下弹性体中含有带一条和两条纳米裂纹的纳米圆孔的表面效应. 文献[16]增加了对电场的考虑, 研究了电不渗透边界条件下表面对压电材料中纳米椭圆孔和 Griffith 裂纹的影响. 文献[17]在这一基础上增加了对电渗透边界条件的考虑, 并将电渗透和电非渗透两种条件下的结果做了对比. 文献[18, 19]增加了对磁场的考虑,

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFC1405605)、自然资源部海洋遥测技术创新中心创新青年基金 (批准号: 21k20190088)、内蒙古自然科学基金 (批准号: 2018MS01005) 和内蒙古师范大学研究生科研创新基金 (批准号: CXJJS19098) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn

研究了在磁电非渗透边界条件下表面效应对磁电弹性材料中椭圆纳米孔的影响.

人们采用复势法和保角变换技术对带裂纹的椭圆孔和圆孔的反平面问题已作了大量研究^[2,20]. 对于正多边形孔边带裂纹的研究相对较少, 而类似缺陷在工程中广泛存在, 对这类缺陷的研究具有重要的理论和现实意义. 文献^[21, 22]分别研究了弹性体中含有两条和四条裂纹正方形孔的反平面问题, 而对含有四条裂纹的正 $4n$ 边形孔口的反平面问题还没有报道, 对于这一缺陷在纳米尺度下的精确解更是尚未得出. 本文在文献^[20, 23]的启发下, 得到了从带四条裂纹正 $4n$ 边形孔的外部到圆内(半径 R)的保角变换. 并利用边界条件^[24,25]解决此初边值问题. 得到了应力强度因子、电位移强度因子、磁感应强度和能量释放率的精确解.

2 基本方程

本文研究了磁电弹性材料中含纳米尺度缺陷的反平面问题. 缺陷形状为带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔(图1为 $n=1$ 时的示意图). 正 $4n$ 边形顶点到中心的距离为 a , 裂纹长度分别为 L_1, L_2 和 L_3 , 缺陷沿磁电极化方向穿透. 它受到远场反平面机械载荷 τ_{32}^∞ 、面内电载荷 D_2^∞ 和磁载荷 B_2^∞ 的共同作用. 对于磁电弹性材料, 以 x_3 轴为磁电极化方向, 选择垂直于 x_3 轴的 x_1ox_2 平面为各向同性平面. 本构关系可以表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{3j} & D_j & B_j \end{bmatrix}^T = \mathbf{A} \begin{bmatrix} \gamma_{3j} & -E_j & -H_j \end{bmatrix}^T, \quad (1)$$

其中材料矩阵 \mathbf{A} 定义如下:

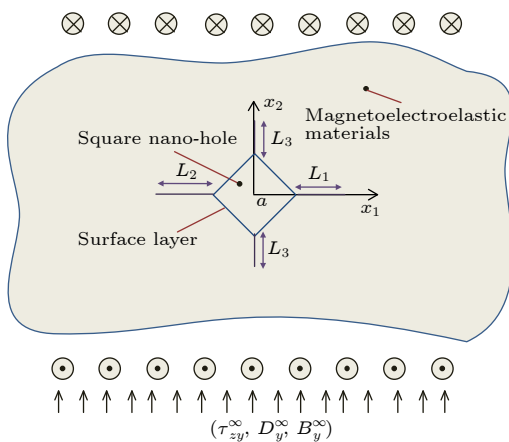


图1 磁电弹性材料中含有带四条裂纹的正方形孔

Fig. 1. Four cracks emanating from a square hole in magneto-electroelastic materials.

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} c_{44} & e_{15} & h_{15} \\ e_{15} & -\varepsilon_{11} & -\beta_{11} \\ h_{15} & -\beta_{11} & -\mu_{11} \end{bmatrix}. \quad (2)$$

磁电弹性材料中不考虑体力和电荷密度的静态平衡方程如下所示:

$$\sigma_{3j,j} = 0, D_{j,j} = 0, B_{j,j} = 0. \quad (3)$$

几何方程为

$$\gamma_{3j} = u_{3,j}, E_j = -\varphi_{,j}, H_j = -\psi_{,j}, \quad (4)$$

其中 $j=1, 2$; σ_{3j}, γ_{3j} 和 u_3 分别为应力、应变和位移; D_j, E_j 和 φ 分别为电位移、电场和电势; B_j, H_j 和 ψ 分别表示磁感应强度、磁场和磁势; c_{44} 是弹性常数; e_{15} 是压电耦合系数; h_{15} 是压磁耦合系数; ε_{11} 是介电常数; μ_{11} 是磁导率; β_{11} 是磁电耦合系数. 广义位移矩阵 \mathbf{u} 定义如下:

$$\mathbf{u} = [u_3 \quad \varphi \quad \psi]^T, \quad (5)$$

其中上标 \mathbf{T} 表示矩阵或向量的转置, (2)式中的 \mathbf{A} 是非奇异的. 根据(1)式, (3)式和(4)式可以得到

$$\nabla^2 \mathbf{u} = 0, \quad (6)$$

其中 ∇^2 是Laplace运算符.

根据复变函数方法, 调和方程(5)的解 u_3, φ 和 ψ 可以表示为3个解析函数 $F_1(z), F_2(z)$ 和 $F_3(z)$ 的实部或虚部, 可以假定

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= [u_3 \quad \varphi \quad \psi]^T \\ &= \text{Re} [F_1(z) \quad F_2(z) \quad F_3(z)]^T = \text{Re} \mathbf{F}, \end{aligned} \quad (7)$$

其中 $z = x + iy$, Re 表示解析函数的实部.

由于 $F_i(z)(i=1, 2, 3)$ 是解析函数, 可以得到

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} = \mathbf{F}', \quad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y} = i\mathbf{F}', \quad (8)$$

其中 $F' = \frac{dF}{dz}$.

根据以上结果, 可以得到

$$\begin{bmatrix} \sigma_{31} - i\sigma_{32} & D_1 - iD_2 & B_1 - iB_2 \end{bmatrix}^T = \mathbf{A} \mathbf{F}'. \quad (9)$$

(9)式可用极坐标表示为

$$\begin{bmatrix} \sigma_{3\theta} - i\sigma_{3r} & D_\theta - iD_r & B_\theta - iB_r \end{bmatrix}^T = e^{i\theta} \mathbf{A} \mathbf{F}'. \quad (10)$$

3 磁电非渗透条件下的解析解

定义 \mathbf{A}^s 为表面常数矩阵

$$\mathbf{A}^S = \begin{bmatrix} c_{44}^S & e_{15}^S & h_{15}^S \\ e_{15}^S & -\varepsilon_{11}^S & -\beta_{11}^S \\ h_{15}^S & -\beta_{11}^S & -\mu_{11}^S \end{bmatrix}. \quad (11)$$

基于 Gurtin-Murdoch 表面弹性理论^[11,12], 磁电弹性材料含有纳米级缺陷的边界条件如下:

$$\begin{aligned} u_3^c(t) &= u_3^m(t), \quad \varphi^c(t) = \varphi^m(t), \\ \psi^c(t) &= \psi^m(t), \quad t \in S, \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} & - [\sigma_{3r}^m(t) \quad D_r^m(t) \quad B_r^m(t)]^T \\ &= \frac{\mathbf{A}^S}{\rho} [\gamma_{3\theta,\theta}^S \quad -E_{\theta,\theta}^S \quad -H_{\theta,\theta}^S]^T, \quad t \in S, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, 上标 c, S, m 分别表示纳米孔、纳米孔的表面和基体, (ρ, θ) 为极坐标.

为了解决这个边值问题, 由文献^[23]可知 z 平面上正 $4n$ 边形孔外部到 z_1 平面单位圆外部的保角变换为

$$\begin{aligned} z = \omega(z_1) &= R(z_1 + c_1 z_1^{1-4n} + c_2 z_1^{1-8n} \\ &+ c_3 z_1^{1-12n} + c_4 z_1^{1-16n}), \end{aligned} \quad (14)$$

其中

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{4n(4n-1)}, \quad c_2 = \frac{4n-2}{16n^2(8n-1)}, \\ c_3 &= \frac{(4n-2)(8n-2)}{192n^3(12n-1)}, \\ c_4 &= \frac{(4n-2)(8n-2)(12n-2)}{3072n^4(16n-1)}. \end{aligned} \quad (15)$$

再受到文献^[20]的启发得到保角变换, 将 z 平面上有四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的外部映射到 ζ 平面上半径为 R 的圆的内部 (图 2 表示 $n=1$ 时的保角映射),

$$\begin{aligned} z = \omega(\zeta) &= R[\mu(\zeta) + c_1 \mu(\zeta)^{1-4n} + c_2 \mu(\zeta)^{1-8n} \\ &+ c_3 \mu(\zeta)^{1-12n} + c_4 \mu(\zeta)^{1-16n}], \end{aligned} \quad (16)$$

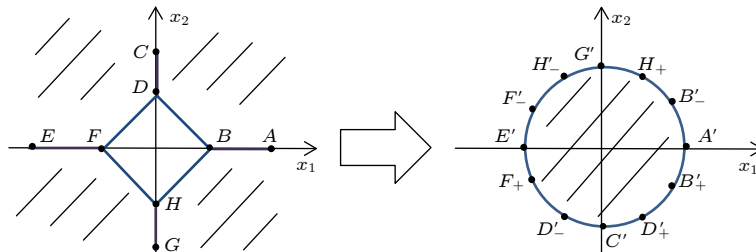


图 2 保角变换

Fig. 2. Conformal mapping.

$$\begin{aligned} \mu(\zeta) &= \frac{1}{4\zeta R} \left(\left\{ \left[\sqrt{l_1^2 + l_3^2} (R + \zeta)^2 + \sqrt{l_2^2 + l_3^2} (R - \zeta)^2 \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 16l_3^2 R^2 \zeta^2 \right\}^{1/2} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ \left[\sqrt{l_1^2 + l_3^2} (R + \zeta)^2 + \sqrt{l_2^2 + l_3^2} (R - \zeta)^2 \right]^2 \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - 16(l_3^2 + 1)R^2 \zeta^2 \right\}^{1/2} \right), \end{aligned} \quad (17)$$

$$\text{其中 } R = \frac{a}{1+c_1+c_2+c_3+c_4}, \quad l_k = \frac{(1+\alpha_k)+(1+\alpha_k)^{-1}}{2}$$

($k=1, 2$), $l_3 = \frac{(1+\alpha_3)-(1+\alpha_3)^{-1}}{2}$. 正实数参数 α_i ($i=1, 2, 3$) 由以下公式确定:

$$\begin{aligned} L_i + a &= R[(1 + \alpha_i) + c_1(1 + \alpha_i)^{1-4n} \\ &\quad + c_2(1 + \alpha_i)^{1-8n} + c_3(1 + \alpha_i)^{1-12n} \\ &\quad + c_4(1 + \alpha_i)^{1-16n}]. \end{aligned} \quad (18)$$

将解析函数 $F_i(z)$ ($i=1, 2, 3$) 洛朗展开可得

$$F_i(\zeta) = a_i^* \ln \zeta + \sum_{-\infty}^{+\infty} a_{ik} \zeta^k, \quad i=1, 2, 3, \quad (19)$$

其中 a_i^* 和 a_{ik} 为定义的常数.

根据文献^[26], 通过选择有限项可以得到问题的解:

$$\mathbf{F}^m(\zeta) = \begin{bmatrix} F_1^m(\zeta) \\ F_2^m(\zeta) \\ F_3^m(\zeta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} \zeta + \begin{bmatrix} B_{-1} \\ C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} \zeta^{-1}, \quad (20)$$

其中 $B_1, C_1, D_1, B_{-1}, C_{-1}$ 和 D_{-1} 是复常数.

利用远场力、电和磁载荷条件, 根据 (9) 式和 (20) 式, 可得

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} = -i \frac{\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2}}{2} \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}, \quad (21)$$

根据边界条件 (13) 式可得

$$\begin{aligned} & \frac{\mathbf{A}^S}{R} \left\{ \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} B_{-1} \\ C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} \right\} \\ &= \mathbf{A} \left\{ \begin{bmatrix} B_1 \\ C_1 \\ D_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{R^2} \begin{bmatrix} B_{-1} \\ C_{-1} \\ D_{-1} \end{bmatrix} \right\}. \end{aligned} \quad (22)$$

根据 (21) 式和 (22) 式可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} B_{-1} \\ D_{-1} \\ F_{-1} \end{bmatrix} &= -i \frac{\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2}}{2} R^2 \\ &\times \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} + \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} - \mathbf{A} \right) \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (23)$$

将 (20) 式、(21) 式和 (23) 式代入到 (9) 式中, 结果如下:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \sigma_{32} \\ D_2 \\ B_2 \end{bmatrix} &= \frac{\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2}}{2\omega'(\zeta)} \left[\mathbf{E} - \frac{R^2}{\zeta^2} \mathbf{A} \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} + \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} - \mathbf{A} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (24)$$

其中 \mathbf{E} 是三阶单位矩阵.

4 场强度因子和能量释放率

4.1 场强度因子

定义 z 平面 III 型裂尖应力强度因子、电位移强度因子和磁感应强度因子 [2]:

$$\begin{bmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{bmatrix} = \lim_{z \rightarrow z_0} \sqrt{2\pi(z - z_0)} \begin{bmatrix} \sigma_{32} \\ D_2 \\ B_2 \end{bmatrix}, \quad (25)$$

其中 $z_0 = L_1 + a$. 共形映射将 z 平面 $z = z_0$ 处映射到 ζ 平面的 $\zeta = R$ 处, 将 (24) 式代入到 (25) 式可得

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{bmatrix} &= \frac{\sqrt{\pi} \left(\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2} \right)}{2\sqrt{\omega''(R)}} \times \\ &\left[\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} + \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} - \mathbf{A} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (26)$$

假设 (26) 式可以表示为

$$\begin{bmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{bmatrix} = \frac{\sqrt{\pi} \left(\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2} \right)}{2\sqrt{\omega''(R)}} \begin{bmatrix} K_\tau^* \\ K_D^* \\ K_B^* \end{bmatrix}, \quad (27)$$

其中

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} K_\tau^* \\ K_D^* \\ K_B^* \end{bmatrix} &= \left[\mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} + \mathbf{A} \right)^{-1} \right. \\ &\times \left. \left(\frac{\mathbf{A}^S}{R} - \mathbf{A} \right) \mathbf{A}^{-1} \right] \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (28)$$

当表面常数矩阵 $\mathbf{A}^S = \mathbf{0}$ 时, (27) 式退化为全渗透磁电弹性材料的经典场强度因子

$$\begin{bmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{bmatrix} = \sqrt{\pi L'} K \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}, \quad (29)$$

其中 L' 是等效裂纹长度, $L' = (L_1 + L_2 + 2a)/2$; K 是无量纲场强度因子,

$$K = \left(\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2} \right) / \sqrt{L'\omega''(R)}. \quad (30)$$

当 $n = 1$ 时, 这一结果与文献 [22] 中的结果一致.

4.2 能量释放率

根据文献 [2], 假设反平面裂纹尖端的能量释放率为

$$J = \frac{1}{2} \left[K_{\text{III}}^\sigma \quad K_{\text{III}}^D \quad K_{\text{III}}^B \right] \mathbf{A}^{-1} \begin{bmatrix} K_{\text{III}}^\sigma \\ K_{\text{III}}^D \\ K_{\text{III}}^B \end{bmatrix}. \quad (31)$$

将 (26) 式代入到 (31) 式, 考虑表面效应时磁电非渗透磁电弹性材料中带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的能量释放率为

$$\begin{aligned} J &= \pi \left(\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2} \right)^2 / 8\omega''(R) \\ &\times \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}^T \mathbf{B}^T \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} \begin{bmatrix} \tau_{32}^\infty \\ D_2^\infty \\ B_2^\infty \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (32)$$

其中 $\mathbf{B} = \mathbf{E} - \mathbf{A} \left(\mathbf{A}^S/R + \mathbf{A} \right)^{-1} \left(\mathbf{A}^S/R - \mathbf{A} \right) \mathbf{A}^{-1}$.

特别地, 当表面常数矩阵为零时, 将 (29) 式代入到 (31) 式, 可以得到不考虑表面效应时磁电非渗透磁电弹性材料中带四条纳米裂纹的正 $4n$ 边形纳米孔的能量释放率,

$$J = \frac{\pi(\sqrt{l_1^2 + l_3^2} + \sqrt{l_2^2 + l_3^2})^2}{2\omega''(R)\det A} \Lambda. \quad (33)$$

当 $n = 1$ 时, 这一结果与文献 [22] 中的结果一致, 其中

$$\begin{aligned} \Lambda = & (\varepsilon_{11}\mu_{11} - \beta_{11}^2)(\tau_{32}^\infty)^2 - (h_{15}^2 + c_{44}\mu_{11})(D_2^\infty)^2 \\ & - (e_{15}^2 + c_{44}\mu_{11})(B_2^\infty)^2 + 2(e_{15}\mu_{11} \\ & - h_{15}\beta_{11})\tau_{32}^\infty D_2^\infty + 2(\kappa_{11}h_{15} - \beta_{11}e_{15})\tau_{32}^\infty B_2^\infty \\ & + 2(c_{44}\beta_{11} + e_{15}h_{15})D_2^\infty B_2^\infty. \end{aligned} \quad (34)$$

5 数值分析

根据文献 [18], 取磁电弹性材料作为基体, 材料常数为 $c_{44} = 44 \text{ GPa}$, $e_{15} = 5.8 \text{ C/m}^2$, $\varepsilon_{11} = 5.64 \times 10^{-9} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m}^2)$, $h_{15} = 275 \text{ N}/(\text{A}\cdot\text{m})$, $\beta_{11} = 5000 \times 10^{-9} \text{ N}\cdot\text{s}/(\text{V}\cdot\text{C})$, $\mu_{11} = 297 \times 10^{-6} (\text{N}\cdot\text{s}^2)/\text{C}^2$. 假设表面层由压磁材料构成 [18], $c_{44}^S = 10 \text{ N/m}$, $\varepsilon_{11}^S = 0.03 \times 10^{-18} \text{ C}^2/(\text{N}\cdot\text{m})$, $h_{15}^S = 330 \times 10^{-9} \text{ N/A}$.

图 3—5 分别给出了在磁电非渗透边界条件下考虑表面效应时, 只受机械载荷作用、只受电载荷作用和只受磁载荷作用下的裂纹尖端应力强度因子随正 $4n$ 边形孔尺寸的变化. 在经典弹性理论中, 应力强度因子只与机械载荷的变化有关. 而从图中看出在纳米尺度下, 应力强度因子还受到电载荷和

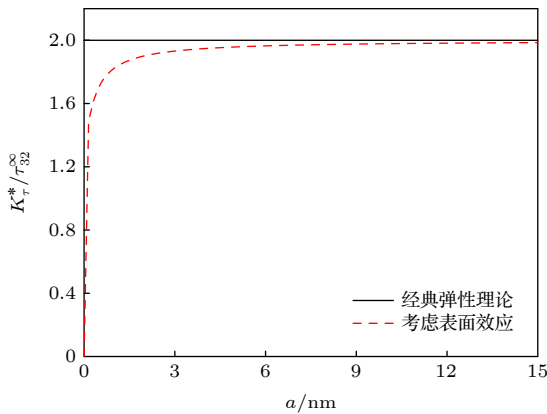


图 3 只受机械载荷作用时表面效应对应力强度因子的影响

Fig. 3. Surface effect on the stress intensity factor near the crack tip induced by anti-plane mechanical load τ_{32}^∞ only.

磁载荷的影响, 这与经典弹性理论中具有明显的差异. 所以可以得出结论, 表面效应会使磁、电、弹性场耦合. 从图 3 可以看出, 当 $a = 0 \text{ nm}$ 时 $K_\tau^*/\tau_{32}^\infty$ 也趋于 0, 而随着 a 的增大 $K_\tau^*/\tau_{32}^\infty$ 也逐渐增大, 最终趋于 2, 即趋于经典弹性理论中的结论. 图 4 和图 5 表明当 $a = 0 \text{ nm}$ 时, 表面效应的影响非常小 (K_τ^*/D_2^∞ 和 K_τ^*/B_2^∞ 趋于 0), 而当边长 a 在纳米尺度逐渐增加时, 缺陷的表面积与体积的比值变得非常大, 表面效应的影响也非常大. 此时 K_τ^*/D_2^∞ 随着 a 的增加迅速增大, 而 K_τ^*/B_2^∞ 随着 a 的增加迅速减小, 之后随着孔口的不断增加表面效应的影响开始逐渐减小, 最终趋于经典弹性理论中的结论.

图 6—8 分别给出了只受机械载荷作用、只受电载荷作用和只受磁载荷作用下的裂纹尖端电位

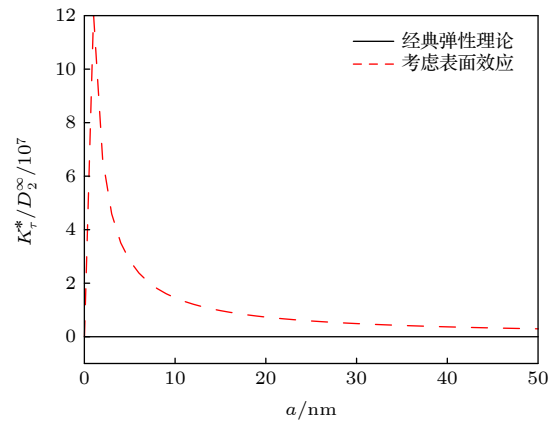


图 4 只受电载荷作用时表面效应对应力强度因子的影响
Fig. 4. Surface effect on the stress intensity factor near the crack tip induced by in-plane electrical load D_2^∞ only.

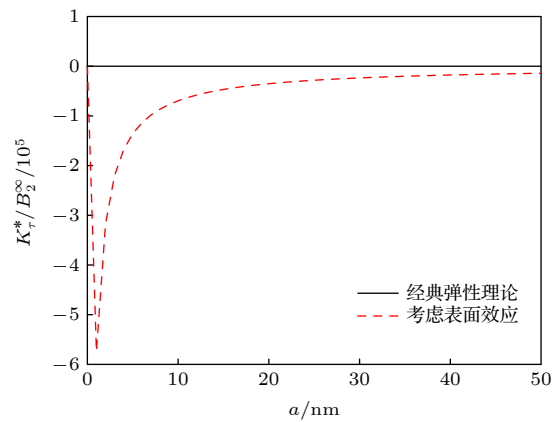


图 5 只受磁载荷作用时表面效应对应力强度因子的影响
Fig. 5. Surface effect on the stress intensity factor near the crack tip induced by in-plane magnetic load B_2^∞ only.

移强度因子随正 $4n$ 边形孔尺寸的变化. 而从图中可以看出, 在纳米尺度下, 电位移强度因子还受到机械载荷和磁载荷的影响, 所以可以得出同样的结论, 表面效应会使磁、电、弹性场耦合. 从图 6 可知, K_D^*/τ_{32}^∞ 随着 a 的增大而减小, 最终趋于 0. 图 7 表明 K_D^*/D_2^∞ 随着 a 迅速减小并趋于经典弹性理论中的结论, 可以看出当表面层选为压磁材料时电载荷对于电位移强度因子的影响只在 a 很小时有显著的影响. 图 8 表明当 $a = 0$ nm 时, K_D^*/B_2^∞ 趋于 0, 而当边长 a 在纳米尺度逐渐增加时, 此时 K_D^*/B_2^∞ 随着 a 的增加迅速减小. 之后表面效应的影响开始逐渐减小, 此时 K_D^*/B_2^∞ 逐渐增加, 最终趋于经典弹性理论中的结论.

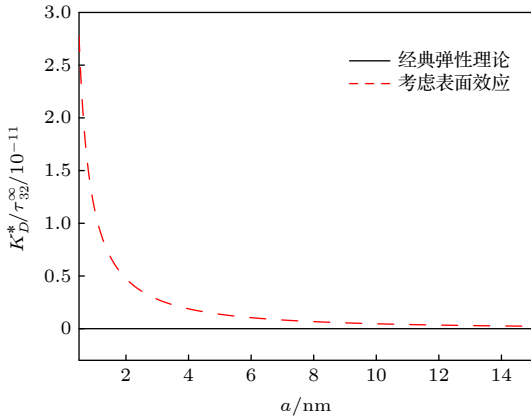


图 6 只受机械荷作用时表面效应对电位移强度因子的影响

Fig. 6. Surface effect on the electric displacement intensity factor near the crack tip induced by anti-plane mechanical load τ_{32}^∞ only.

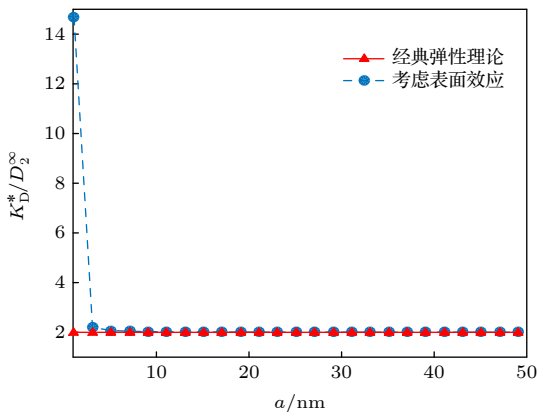


图 7 只受电载荷作用时表面效应对电位移强度因子的影响

Fig. 7. Surface effect on the electric displacement intensity factor near the crack tip induced by in-plane electrical load D_2^∞ only.

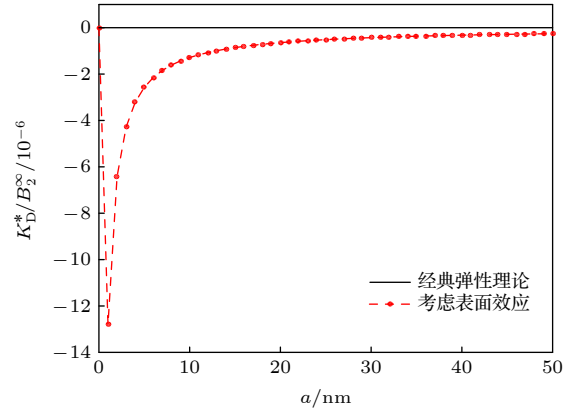


图 8 只受磁载荷作用时表面效应对电位移强度因子的影响

Fig. 8. Surface effect on the electric displacement intensity factor near the crack tip induced by in-plane magnetic load B_2^∞ only.

图 9—11 分别给出了在磁电非渗透边界条件下考虑表面效应时, 只受机械载荷作用、只受电载荷作用和只受磁载荷作用下的裂纹尖端电位移强度因子随正 $4n$ 边形孔尺寸的变化. 从图中可以看出, 在纳米尺度下, 电位移强度因子受到机械载荷、电载荷和磁载荷的影响, 进一步印证了表面效应会使磁、电、弹性场耦合. 图 9 和图 10 表明当 $a = 0$ nm 时, 表面效应的影响非常小 (K_B^*/τ_{32}^∞ 和 K_B^*/D_2^∞ 趋于 0), 而当边长 a 在纳米尺度逐渐增加时, 缺陷的表面积与体积的比值变得非常大, 而后逐渐减小, 此时 K_B^*/τ_{32}^∞ 和 K_B^*/D_2^∞ 随着 a 的增加迅速减小. 之后随着孔口表面积与体积的比值逐渐减小, 表面效应的影响开始逐渐减小, 此时 K_B^*/τ_{32}^∞ 和 K_B^*/D_2^∞ 随着 a 的增加逐渐增加, 最终趋于经典弹性理论中的结论. 图 11 表明 K_B^*/B_2^∞ 随着 a 的增加迅速增大并趋于经典弹性理论的结果. 这说明当表面层选为压磁材料时, 磁载荷只在 a 很小时才对磁感应强度因子有显著影响.

图 12 给出了当 $n = 1$, 即缺陷为带四条裂纹的正方形孔, 不考虑表面效应时无量纲场强度因子随右侧裂纹长度的变化. 从图 12 可以看出, K 随着右侧裂纹长度的增加而增加, 这就是说右侧裂纹长度增加会促进裂纹的扩展. 图 13 给出了无量纲场强度因子随正多边形边的数量的变化, 可以看出当裂纹长度为 $a = L_1 = 0.02$ m, $L_2 = 0.03$ m, $L_3 = 0.04$ m 时, 带四条裂纹的孔口为正方形时应力强度因子最大. 随着 n 的增加正 $4n$ 边形的形状越来越接近圆形, 此时应力强度因子逐渐减小, 最终趋于

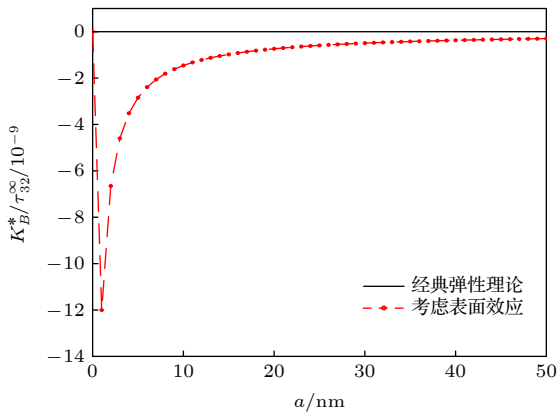


图 9 只受机械载荷作用时表面效应对磁感应强度因子的影响

Fig. 9. Surface effect on the magnetic induction intensity factor near the crack tip induced by anti-plane mechanical load τ_{32}^{∞} only.

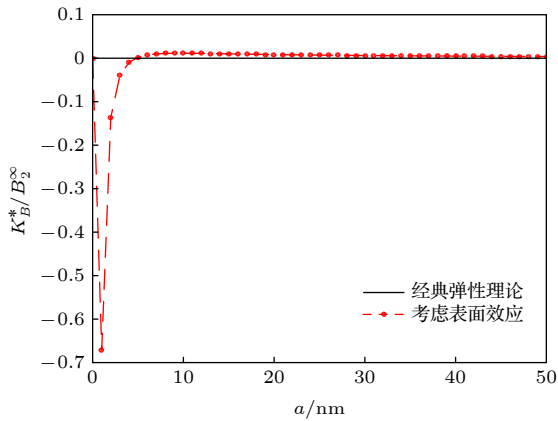


图 10 只受电载荷作用时表面效应对磁感应强度因子的影响

Fig. 10. Surface effect on the magnetic induction intensity factor near the crack tip induced by in-plane electrical load D_2^{∞} only.

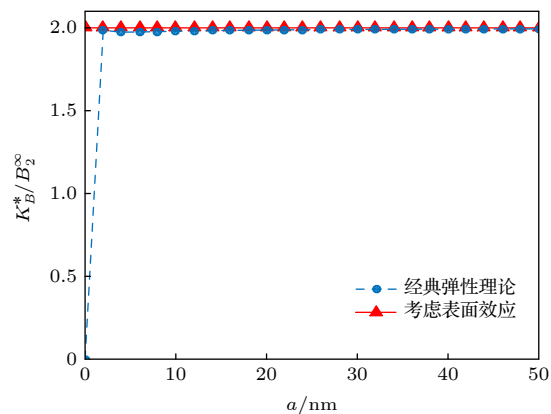


图 11 只受磁载荷作用时表面效应对磁感应强度因子的影响

Fig. 11. Surface effect on the magnetic induction intensity factor near the crack tip induced by in-plane magnetic load B_2^{∞} only.

带四条裂纹的圆孔的应力强度因子. 从图 13 可以看出, 正 $4n$ 边形边的数量越小, 缺陷扩展得越快. 图 14 给出了无量纲能量释放率 J/J_0 随 a 的变化,

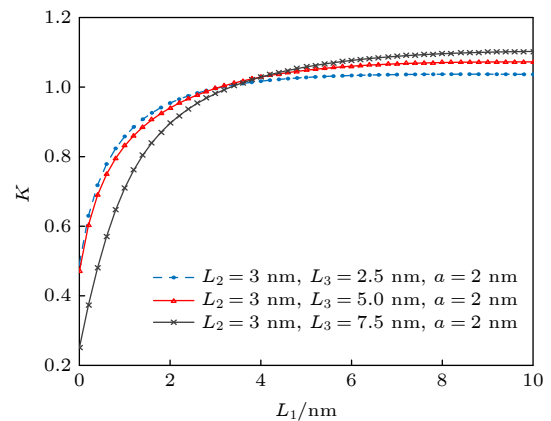


图 12 无量纲应力强度因子随右侧裂纹长度变化

Fig. 12. Variations of the dimensionless stress intensity factor at crack tip with the crack length L_1 .

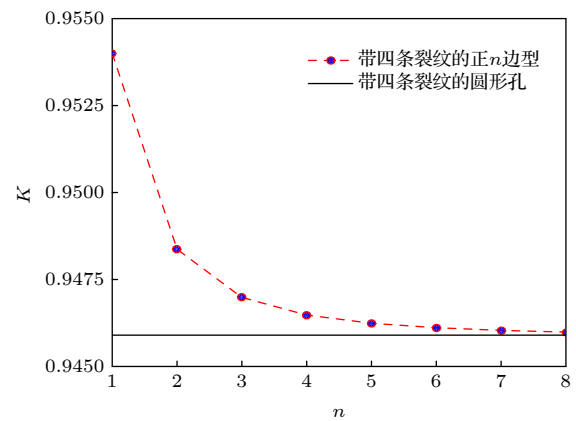


图 13 无量纲应力强度因子随 n 的变化

Fig. 13. Variations of the dimensionless stress intensity factor at crack tip with n .

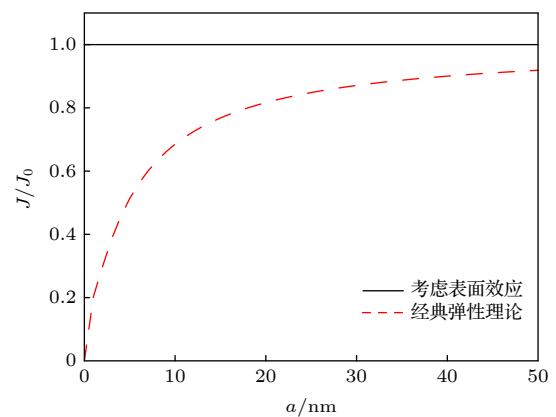


图 14 无量纲能量释放率随孔口尺寸的变化

Fig. 14. Variations of the dimensionless energy release rate with the size of the cracked hole.

其中 J_0 表示不考虑表面效应时的能量释放率. 从图 14 可以看出, 在纳米尺度下考虑表面效应的影响, J/J_0 随 a 的增加而增大, 最终趋于经典弹性理论.

选取 $n = 1$, $L_1 = 2.5$ mm, $L_2 = 3$ mm, $L_3 = 3.5$ mm, $J_{cr} = 5$ N/m (临界能量释放率). 图 15 给出了裂纹尖端能量释放率随机械载荷的变化趋势, 可以看出, 当 $D_2^\infty = 1 \times 10^{-3}$ C/m², $B_2^\infty = 1 \times 10^{-2}$ N/(A·m) 时施加的机械载荷越大, 其能量释放率也就越大. 当磁载荷不变, $D_2^\infty = 5 \times 10^{-3}$ C/m² 时能量释放率与机械载荷的变换曲线一直在 $D_2^\infty = 3 \times 10^{-3}$ C/m² 时能量释放率与机械载荷变换曲线的上方. 图 16 给出了裂纹尖端能量释放率随电载荷的变化趋势, 可以看出, 当 $\tau_{32}^\infty = 6$ MPa, $B_2^\infty = 1 \times 10^{-2}$ N/(A·m) 时, 能量释放率随着正电载荷的增加先减小后增大, 随着负电载荷的增加而

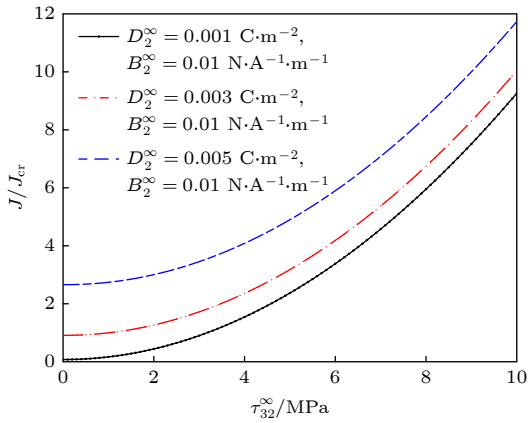


图 15 正则化能量释放率随机械载荷的变化

Fig. 15. Variations of the normalized energy release rate with the applied mechanical load.

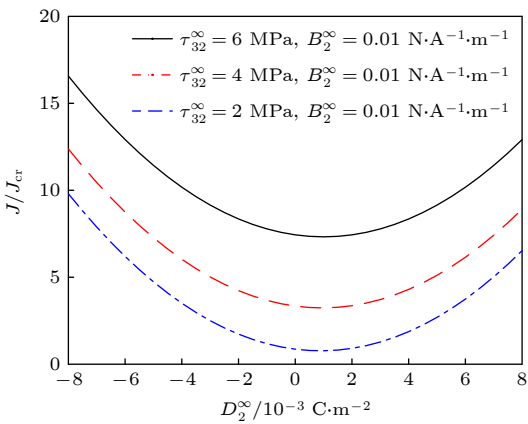


图 16 正则化能量释放率随电载荷的变化

Fig. 16. Variations of the normalized energy release rate with the applied electrical load.

增加. 当磁载荷不变, $\tau_{32}^\infty = 6$ MPa 时能量释放率与电载荷的变换曲线在 $\tau_{32}^\infty = 4$ MPa 时能量释放率与电载荷的变换曲线的上方. 图 17 给出了裂纹尖端能量释放率随磁载荷的变化, 可以看出, 当 $\tau_{32}^\infty = 6$ MPa, $D_2^\infty = 1 \times 10^{-3}$ C/m² 时, 能量释放率随着正磁载荷的增加而逐渐减小, 这表明当其他物理量不变时磁载荷的增加会抑制裂纹的增长.

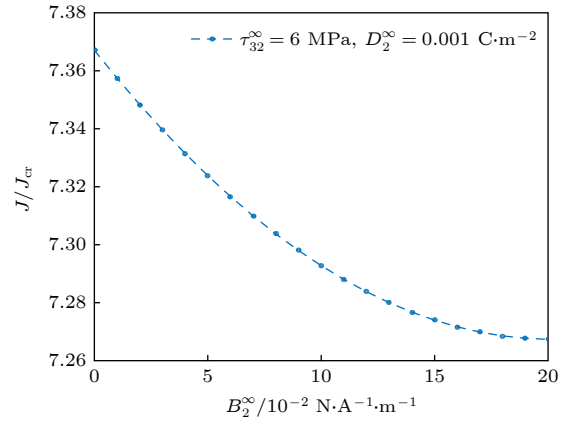


图 17 正则化能量释放率随磁载荷的变化

Fig. 17. Variations of the normalized energy release rate with the applied magnetic load.

6 结 论

基于表面弹性理论和保角变换技术, 研究了磁电弹性材料中正 $4n$ 边形纳米孔带四条纳米裂纹的反平面断裂问题. 得出了考虑表面效应时磁电非渗透边界条件下应力强度因子、电位移强度因子、磁感应强度因子和能量释放率的精确解. 并根据数值分析得到以下结论.

1) 无量纲应力强度因子随着正 $4n$ 边形边的数量增加而逐渐减小, 最终无限接近带四条裂纹圆孔的无量纲应力强度因子.

2) 在纳米尺度下, 考虑表面效应时无量纲能量释放率随着 a 的增大而逐渐趋于经典弹性理论的结果.

3) 在含有纳米尺度缺陷时, 应力强度因子、电位移强度因子、磁感应强度因子都受到三种外载荷的影响.

4) 在纳米尺度上, 正 $4n$ 边形的边长越大表面效应的影响越小. 当纳米缺陷的尺寸增加到一定程度时, 最终结果趋于经典弹性理论.

参考文献

- [1] Nan C W 1994 *Phys. Rev. B* **50** 6082
- [2] Guo J H, Lu Z X 2010 *Int. J. Solids Struct.* **47** 1847
- [3] Rogowski B 2011 *Arch. Appl. Mech.* **81** 1607
- [4] Liu X, Guo J H, Yu J 2016 *J. Inner Mongolia Univ. (Natural Science Edition)* **41** 37 (in Chinese) [刘鑫, 郭俊宏, 于静 2016 内蒙古大学学报 (自然科学版) **41** 37]
- [5] Gao C F, Kessler H, Balke H 2003 *Int. J. Eng. Sci.* **41** 969
- [6] Gao C F, Kessler H, Balke H 2003 *Int. J. Eng. Sci.* **41** 983
- [7] Liu X, Guo J H 2016 *Theor. Appl. Fract. Mech.* **86** 225
- [8] Qi M 2005 *M. S. Thesis* (Shijiazhuang: Shijiazhuang Tiedao University) (in Chinese) [齐敏 2005 硕士学位论文 (石家庄: 石家庄铁道大学)]
- [9] Lv X, Liu G T 2018 *Chin. Phys. B* **27** 074601
- [10] Zhong X C, Li C F 2008 *Arch. Appl. Mech.* **78** 117
- [11] Gurtin M E, Murdoch A I 1975 *Arch. Ration. Mech. Anal.* **57** 291
- [12] Gurtin M E, Murdoch A I 1978 *Int. J. Solids Struct.* **14** 431
- [13] Gurtin M E, Weissmuller J, Larche F 1998 *Philos. Mag. A* **78** 1093
- [14] Xiao J H, XU Y L, Zhang F C 2018 *Acta. Mech.* **229** 4915
- [15] Xiao J H, Cui Y Q, Xu Y L, Zhang F C 2018 *China Mech. Eng.* **29** 2347 (in Chinese) [肖俊华, 崔友强, 徐耀玲, 张福成 2018 中国机械工程 **29** 2347]
- [16] Xiao J H, Cui Y Q, Xu Y L, Zhang F C 2018 *Theor. Appl. Fract. Mech.* **96** 476
- [17] Guo J H, Li X F 2018 *Acta Mech.* **229** 4251
- [18] Liu Y Z, Guo J H, Zhang X Y 2019 *Z. Angew. Math. Mech.* **99** e201900043
- [19] Guo J H, He L T, Liu Y Z, Li L H 2020 *Theor. Appl. Fract. Mech.* **107** 102553
- [20] Guo J H, Lu Z X 2011 *Appl. Math. Comput.* **217** 9397
- [21] Wang Y J 2012 *Ph. D. Dissertation* (Nanjing: Nanjing University of Aeronautics and Astronautics) (in Chinese) [王永健 2012 博士学位论文 (南京: 南京航空航天大学)]
- [22] Fan S W, Guo J H, Yu J 2017 *Chin. J. Aeronaut.* **30** 461
- [23] Dharmendra S, Sharma 2014 *Int. J. Mech. Sci.* **78** 177
- [24] Wang Y B, Guo J H 2018 *Appl. Math. Mech. -Engl.* **39** 797
- [25] Fang X Q, Gupta V, Liu J X 2013 *Philos. Mag. Lett.* **93** 58
- [26] Muskhelishvili N I (translated by Zhao H Y) 1958 *Some Basic Problems of the Mathematical Theory of Elasticity* (Beijing: Science Press) p233 (in Chinese) [穆斯海里什维里 著(赵惠元译) 1958 数学弹性力学的几个基本问题 (北京: 科学出版社) 第 233页]

Anti-plane fracture problem of four nano-cracks emanating from a regular $4n$ -polygon nano-hole in magnetoelastic materials*

Yang Dong-Sheng Liu Guan-Ting[†]

(College of Mathematics Science, Inner Mongolia Normal University, Hohhot 010022, China)

(Received 4 June 2020; revised manuscript received 26 July 2020)

Abstract

According to the conformal mapping from the exterior region of the regular n -polygon hole to the exterior region of a unit circle and from the exterior region of four cracks emanating from a circle to the interior region of a unit circle, a new conformal mapping is constructed to map the exterior region of four cracks emanating from a regular $4n$ -polygon hole to the interior of a unit circle. Then, based on the Gurtin-Murdoch surface/interface model and complex method, the anti-plane fracture of four nano-cracks emanating from a regular $4n$ -polygon nano-hole in magnetoelastic material is studied. The exact solutions of stress intensity factor, electric displacement intensity factor, magnetic induction intensity factor, and energy release rate are obtained under the boundary condition of magnetoelectrically impermeable with considering the surface effect. Without considering the effect of the surface effect, the exact solution of four cracks emanating from a regular $4n$ -polygon hole in a magnetoelastic material can be obtained. The numerical results show the influences of surface effect and the size of defect on the stress intensity factor, electric displacement intensity factor, magnetic induction intensity factor and energy release rate under the magnetoelectrically impermeable boundary condition. It can be seen that the stress intensity factor, electric displacement intensity factor, and magnetic induction intensity factor are significantly size-dependent when considering the surface effects of the nanoscale defects. And when the size of defect increases to a certain extent, the influence of surface effect begins to decrease and finally tends to follow the classical elasticity theory. When the distance between the center and the vertex of the regular $4n$ -polygon nano-hole is constant, the dimensionless field intensity factor decreases gradually with the increase of the number of edges, and approaches to the conclusion of a circular hole with four cracks. With the increase of the relative size of the crack, the dimensionless field intensity factor increases gradually. The dimensionless energy release rate of the nanoscale cracked hole has a significant size effect. The increase of mechanical load will increase the normalized energy release rate. The normalized energy release rate first decreases and then increases with electrical load increasing. The normalized energy release rate decreases with magnetic load increasing.

Keywords: magnetoelastic materials, surface effect, nanoscale

PACS: 46.05.+b, 46.25.-y, 46.50.+a

DOI: [10.7498/aps.69.20200850](https://doi.org/10.7498/aps.69.20200850)

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFC1405605), the Innovation Youth Fund of the Ocean Telemetry Technology Innovation Center of the Ministry of Natural Resources, China (Grant No. 21k20190088), the Natural Science Foundation of Inner Mongolia, China (Grant No. 2018MS01005), and the Graduate Students' Scientific Research Innovation Fund Program of Inner Mongolia Normal University, China (Grant No. CXJJS19098).

[†] Corresponding author. E-mail: guantingliu@imnu.edu.cn