



非自治Kadomtsev–Petviashvili方程的自相似变换和二维怪波构造

张解放 金美贞 胡文成

Self-similarity transformation and two-dimensional rogue wave construction of non-autonomous Kadomtsev–Petviashvili equation

Zhang Jie-Fang Jin Mei-Zhen Hu Wen-Cheng

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 69, 244205 (2020) DOI: 10.7498/aps.69.20200981

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200981>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

Fokas系统的怪波激发

Excitation of rogue waves of Fokas system

物理学报. 2020, 69(21): 214203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200710>

一类扰动Kadomtsev–Petviashvili方程的雅可比椭圆函数解的收敛性探讨

Convergence for Jacobi elliptic function series solutions to one kind of perturbed Kadomtsev–Petviashvili equations

物理学报. 2019, 68(14): 140201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190333>

四阶色散非线性薛定谔方程的明暗孤立波和怪波的形成机制

Study on the generation mechanism of bright and dark solitary waves and rogue wave for a fourth-order dispersive nonlinear Schrödinger equation

物理学报. 2020, 69(1): 010502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191384>

基于广义交替数值通量的局部间断Galerkin方法求解二维波动方程

Two-dimensional wave equation solved by generalized alternating flux based local discontinuous Galerkin method

物理学报. 2020, 69(2): 020202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190613>

基于分裂格式有限点集法对孤立波二维非线性问题的模拟

Simulation of two-dimensional nonlinear problem with solitary wave based on split-step finite pointset method

物理学报. 2019, 68(14): 140203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190340>

铁磁纳米线中磁化强度的磁怪波

Rogue wave solution in ferromagnetic nanowires

物理学报. 2020, 69(1): 017501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191352>

非自治 Kadomtsev-Petviashvili 方程的 自相似变换和二维怪波构造*

张解放^{1)2)†} 金美贞³⁾ 胡文成⁴⁾

1) (浙江传媒学院智能媒体技术研究院, 杭州 310018)

2) (浙江传媒学院, 浙江省影视媒体技术研究重点实验室, 杭州 310018)

3) (浙江传媒学院网络数据中心, 杭州 310018)

4) (中原工学院理学院, 郑州 450007)

(2020年6月25日收到; 2020年8月24日收到修改稿)

首先给出非自治 Kadomtsev-Petviashvili 方程转换为 Kadomtsev-Petviashvili 方程的一个自相似变换, 然后基于 Kadomtsev-Petviashvili 方程的 Lump 解构造了非自治 Kadomtsev-Petviashvili 方程的有理函数表示的二维单、双、三怪波解, 最后通过合适选取变参数, 用图示说明了它们的演化特征, 并利用快速傅里叶变换算法数值模拟测试了二维单怪波的动力学稳定性. 本文方法对寻找 $(2+1)$ 维非线性波动模型的怪波激发提供了启迪.

关键词: 二维怪波, Kadomtsev-Petviashvili 方程, 非自治非线性波动模型, 自相似变换

PACS: 42.65.Tg, 05.45.Yv, 02.30.Jr, 04.30.Nk

DOI: 10.7498/aps.69.20200981

1 引言

自然界中许多复杂系统会意外地出现一些罕见和极端的事件(现象), 并对它们周围环境产生巨大的影响. 起源于海洋的怪波就是一种波幅很大、持续时间极短的突然性海浪, 对海面上的船只和构建物具有极大的破坏力^[1,2]. 近 10 多年来, 怪波现象的研究已成为当前自然科学研究的热点^[3], 从海洋延伸到非线性光学系统^[4,5]、等离子体^[6,7]、流体动力学^[7,8]、大气^[9]、玻色-爱因斯坦凝聚^[10]、微波^[11]、超流体^[12] 和金融系统^[13], 既有丰富的理论成果^[14,15], 也有重要的实验成果^[16,17].

怪波被认为是非线性波动模型的时空局域有理函数解. Peregrine 孤子 (PS)^[18] 是 Peregrine 首先在非线性薛定谔 (NLS) 方程中发现的, 其数学

表式为时空双重局域的有理函数, 具有“来无影去无踪”特征. 今天被广泛认为 NLS 方程是刻画怪波动力学的重要模型, PS 是怪波的原型. 后来又进一步发现了 NLS 方程的高阶怪波和多怪波^[19–21]. 到目前为止, 一维怪波 (在一维空间上局域的短命大振幅波, 其模量是一个空间坐标和时间变量的有理函数) 的成果非常丰富, 除了 NLS 方程外, Hirota 方程^[22–24]、Sasa-Satsuma 方程^[25]、Chen-Lee-Liu 方程^[26,27]、Kundu-Eckhaus 方程^[28]、Fokas-Lenells 方程^[29–31]、复数 MKdV 方程^[32,33]、广义 NLS 方程^[34–39] 等, 均存在怪波解. 然而实际上海洋表面波是二维的, 因此二维怪波 (在两维空间坐标 (x, y) 平面上局域的短命大振幅波, 其模量为两个空间坐标和时间变量的有理函数) 才是自然地描述实际问题 (包括海洋、非线性光学、物质波和等离子体等) 的怪波范例.

* 国家自然科学基金 (批准号: 61877053) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: Zhangjief@cuz.edu.cn

存在怪波解的 $(2 + 1)$ 维非线性波动模型还很少, 完全不同于孤子和 Lump 波可存在于几乎所有的 $(2 + 1)$ 维非线性波动模型, 并可用不同方法, 如逆散射方法、Hirota 双线性方法、Darboux 变换方法、Riemann-Hilbert 方法、同宿波尝试法求解. 目前获得二维怪波的结构和演化特征和 $(1 + 1)$ 维 NLS 方程的原型尚有较大差异. 因此研究二维怪波具有重要价值.

尽管对二维怪波的研究没有一维怪波丰富, 但一些有意义的工作也相继报道. Ohta 和 Yang^[40,41] 基于双线性方法得到了第一类 Davey-Stewartson 方程和第二类 Davey-Stewartson 方程的线怪波和高阶怪波解; Rao 等^[42] 利用双线性方法得到了第三类 Davey-Stewartson 方程由不规则波、呼吸波和孤子组成的半有理解, 在适当的参数条件下, 给出了一阶线怪波和高阶怪波. 最近 Guo 等^[43] 利用第二类 Davey-Stewartson 方程深入研究二维模型中的怪波结构, 得到了在空间和时间上都是局域的二维怪波, 认为是 PS 的二维对等模拟. 还有其他一类 $(2 + 1)$ 维非线性模型也得到相应的二维怪波^[44–46] 等.

Kadomtsev-Petviashvili (KP) 方程为

$$(U_\tau + 6UU_\xi + u_{\xi\xi\xi})_\xi + 3\sigma^2 u_{\eta\eta} = 0, \quad (1)$$

其与 KdV 方程和 NLS 方程是非线性科学的 3 个最典型方程. KP 方程是 1970 年由 Kadomtsev 和 Petviashvili^[47] 首先导出, 用于描述横向扰动作用下等离子体中传播的小振幅离子声波的演化; 后来由 Ablowitz 和 Segur^[48] 作为表面和内层水波模型导出; 在非线形光学中由 Pelinovsky 等^[49] 导出; KP 方程被广泛认为是经典 KdV 方程在二维空间的自然推广, 几乎所有的物理领域都有应用. KP 方程在 $\sigma = -1$ 时称为 KPI 方程, 在 $\sigma = 1$ 时称为 KP II 方程, 在不同的物理领域具有广泛的应用. KP 方程的第一个有理形式表示的 Lump 解由 Manakov 等^[50] 在 1977 年发现的. 后续的各种研究, 包括 Krichever^[51] 在 1977 年, Satsuma 和 Ablowitz^[52] 在 1979 年, Pelinovsky 和 Stepanyants^[53] 在 1993 年, Pelinovsky^[54] 在 1994 年, Ablowitz 和 Villarroel^[55,56] 在 1997 年和 1999 年, Biondini 和 Kodama^[57–59] 在 2003 年和 2007 年的工作, 得到了 KPI 方程的更多 Lump 解. 值得指出之前得到的都是对称的 Lump 解. Ma^[60] 首次利用 Hirota 双线性方法基于设定正二次函数获得了 KPI 方程不对称的

Lump 解, 后来 Singh 和 Stepanyants^[61] 以及 Hu 等^[62] 进一步得到了 KPI 方程稳态形式的非对称 Lump 解和多非对称 Lump 解, Wen 和 Yan^[63] 给出了 KPI 方程的高阶有理孤子和似怪波解.

为了研究 KP 方程的怪波解, 马文秀等^[64] 和楼森岳等^[65] 利用 Hirota 双线性方法设定正二次函数和双曲函数 (指数函数) 的组合给出了 Lump 和孤子相互作用所形成的一种怪波, 但可以说 KP 方程的有理函数表示的怪波解还不能说真正得到.

然而, 在对不同物理背景下的各种非线性现象进行建模时, 非自治 (变系数) 数模型更能准确地描述实际情况. 值得指出, 非自治非线性系统的研究因具有深刻的物理意义受到广泛的兴趣, 而且方法成熟, 尤其光学和玻色爱因斯坦凝聚中的非自治 NLS 模型及其推广模型成果非常丰富^[66–75].

为此本文考虑如下非自治 KP 方程

$$[u_t + \alpha(t)uu_x + \beta(t)u_{xxx} + \gamma(t)u]_x + \delta(t)u_{yy} = 0, \quad (2)$$

其中, $u(x, y, t)$ 是空间坐标 (x, y) 和时间变量 t 的函数; $\alpha(t), \beta(t), \gamma(t), \delta(t)$ 分别表示非线性摄动、色散摄动、线性摄动和波速在 y 方向的扰动效应. 非自治 KP 方程 (2) 可以描述缓变宽度和缓变深度的海峡或大通道中涡度不为零时表面小振幅波的传播^[76,77]. Lü 和 Chen^[78] 基于文献 [60] 提出的方法已经给出了方程 (2) 一个怪波解. Ilhan 等^[79] 基于文献 [60] 提出的方法得到了 Lump 解以及各类相互作用解. 本文首先寻找非自治 KP 方程转换为 KP 方程的一个自相似变换; 然后基于 KPI 方程的 Lump 解构造它的二维有理函数表示的怪波解; 再通过变参数的合适选取, 讨论二维一阶怪波和多怪波的构造, 用图示说明它们的演化特征, 并给出了二维单怪波的数值测试. 发现它们是行二维怪波, 并具有和 NLS 方程的一阶怪波和多怪波类似的动力学特征, 可以作为描述海洋二维怪波和其他物理问题二维怪波的候选对象.

2 非自治 KP 方程的自相似变换

为了寻找方程 (1) 的怪波解, 引入下列相似变换:

$$u(x, y, t) = \rho(t)U(\xi, \eta, \tau), \quad (3)$$

其中 $\rho = \rho(t)$, $U = U(\xi, \eta, \tau)$ 和 $\xi = \xi(x, t)$, $\eta = \eta(y, t)$, $\tau = \tau(t)$ 是指定变量的待定函数, 假定 U 满足 KP 方程 (1). 将 (3) 式代入方程 (1) 并考虑到, 可以得到 $\rho = \rho(t)$ 和 $\xi = \xi(x, t)$, $\eta = \eta(y, t)$, $\tau = \tau(t)$ 必须满足下列关系:

$$\frac{\xi_x^3}{\tau_t} \beta - 1 = 0, \quad \frac{\eta_y^2}{\xi_x \tau_t} \delta = 3\sigma^2, \quad \frac{\xi_x}{\tau_t} \rho \alpha = 6, \quad \xi_{xx} = 0, \quad U_1 = \frac{\phi_1}{\phi_2^2}, \quad (6)$$

$$\eta_{yy} = 0, \quad \rho_t \xi_x + \rho \xi_{xt} + \rho \beta \xi_{xxx} + \rho \gamma \xi_x = 0, \quad \text{其中,}$$

$$\xi_t \xi_x + 3\beta \xi_{xx}^2 + 4\beta \xi_{xxx} \xi_x = 0. \quad (4)$$

求解方程 (4) 得到

$$\xi = kx + \xi_0, \quad \eta = ly + \eta_0, \quad \tau = k^3 \int \beta dt + \tau_0, \\ \rho = 6k^2 \frac{\beta}{\alpha}, \quad \gamma = \frac{\alpha t}{\alpha} - \frac{\beta t}{\beta}, \quad \delta = 3 \frac{k^4}{l^2} \sigma^2 \beta. \quad (5)$$

其中 k, l 和 ξ_0, η_0, τ_0 是任意常数.

下面从标准 KPI 方程的 Lump 解出发, 通过选择满足 (4) 式的参数, 借助变换 (3), 从 KP 方程 (3) 的 Lump 解讨论研究非自治 KP 方程 (1) 的二维怪波构造.

3 非自治 KP 方程的二维怪波构造

文献 [62] 已经得到 KPI 方程的单 Lump 解为

$$\phi_1 = \frac{1}{9} (-v_y^2 + 12v_x) + \frac{1}{11664} (-v_y^2 + 12v_x)^3 \\ \times (-v_y \tau + \eta)^2 - \frac{1}{1944} (-v_y^2 + 12v_x)^2 \\ \times [6(-v_x \tau + \xi) - v_y (-v_y \tau + \eta)]^2, \\ \phi_2 = 1 + \frac{1}{1296} (-v_y^2 + 12v_x)^2 (-v_y \tau + \eta)^2 \\ + \frac{1}{216} (-v_y^2 + 12v_x) [6(-v_x \tau + \xi) \\ - v_y (-v_y \tau + \eta)].$$

多 Lump 解为

$$U_2 = \frac{\phi_3}{\phi_5} + \frac{\phi_4}{\phi_5^2}, \quad (7)$$

其中,

$$\phi_3 = -40v_x^3 v_y (-v_x \tau + \xi)^3 (-v_y \tau + \eta) + 8v_x^3 (v_y^2 + 3v_x) (-v_x \tau + \xi)^2 (-v_y \tau + \eta)^2 \\ + \frac{4}{9} v_x^4 (v_y^2 + 3v_x) (-v_y \tau + \eta)^4 + \frac{2400v_y v_x^3 (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)}{(v_y^2 - 12v_x)^2} - \frac{2v_x^3 (40v_y^2 + 720v_x) (-v_y \tau + \eta)^2}{v_y^2 - 12v_x} \\ + \frac{4\sqrt{3}}{3} a v_x^2 (-v_y \tau + \eta) - \frac{4}{9} v_x^3 v_y (v_y^2 + 18v_x) (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)^3 + 60v_x^3 (-v_x \tau + \xi)^4 \\ - \frac{72000v_x^3}{(v_y^2 - 12v_x)^2} - \frac{7200v_x^3 (-v_x \tau + \xi)^2}{v_y^2 - 12v_x} - \frac{4\sqrt{3}}{3} v_x (a v_y + \sqrt{3} b v_x^{1/2}) (-v_x \tau + \xi), \\ \phi_4 = -10v_x^{7/2} v_y (-v_x \tau + \xi)^4 (-v_y \tau + \eta) - \frac{2}{9} v_x^{11/2} v_y (-v_y \tau + \eta)^5 \\ + \frac{8}{3} v_x^{7/2} (v_y^2 + 3v_x) (-v_x \tau + \xi)^3 (-v_y \tau + \eta)^2 + \frac{4}{9} v_x^{9/2} (v_y^2 + 3v_x) (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)^4 \\ + \frac{600v_x^{5/2} v_y (-v_x \tau + \xi)^2 (-v_y \tau + \eta)}{v_y^2 - 12v_x} - 80 \frac{v_x^{7/2} (v_y^2 + 9v_x) (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)^2}{v_y^2 - 12v_x} \\ - \frac{80}{9} v_x^{5/2} v_y (v_y^2 + 36v_x) (-v_y \tau + \eta)^3 + 12000 \frac{v_x^{7/2} v_y (-v_y \tau + \eta)}{(v_y^2 - 12v_x)^2} \\ - \frac{8\sqrt{3}}{3} \frac{a v_x^{3/2} v_y^3 + \sqrt{3} b v_x^2 v_y^2 - 12a v_x^{5/2} v_y - 12\sqrt{3} b v_x^3}{(v_y^2 - 12v_x)^2} + \frac{4\sqrt{3}}{3} a v_x^{5/2} (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta) \\ + \frac{2}{3} b v_x^3 (-v_y \tau + \eta)^2 - \frac{2}{9} (v_y^2 + 18v_x) v_x^{7/2} v_y (-v_x \tau + \xi)^2 (-v_y \tau + \eta)^3 + 12v_x^{7/2} (-v_x \tau + \xi)^5 \\ - \frac{72000v_x^{7/2} (-v_x \tau + \xi)}{(v_y^2 - 12v_x)^2} - \frac{2400v_x^{7/2} (-v_x \tau + \xi)}{v_y^2 - 12v_x} - \frac{2\sqrt{3}}{3} v_x^{3/2} (a v_y + \sqrt{3} b v_x^{1/2}) (-v_x \tau + \xi)^2,$$

$$\begin{aligned}
 \phi_5 = & -v_x^3 v_y (-v_x \tau + \xi)^5 (-v_y \tau + \eta) - \frac{1}{9} v_x^5 (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)^5 + \frac{1}{3} v_x^4 (v_y^2 + 3v_x) (-v_x \tau + \xi)^4 (-v_y \tau + \eta)^2 \\
 & + \frac{1}{9} (v_y^2 + 3v_x) v_x^4 (-v_x \tau + \xi)^2 (-v_y \tau + \eta)^4 + 200 \frac{v_x^3 v_y (-v_x \tau + \xi)^3 (-v_y \tau + \eta)}{v_y^2 - 12v_x} \\
 & - \frac{v_x^2 (20v_y^2 + 360v_x) (-v_x \tau + \xi)^2 (-v_y \tau + \eta)^2}{v_y^2 - 12v_x} - \frac{40 (v_y^3 - 27v_x v_y) v_x^3 (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)^3}{9 (v_y^2 - 12v_x)} \\
 & + 6000 \frac{v_x^3 v_y (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)}{(v_y^2 - 12v_x)^2} - \frac{\sqrt{3} (4av_y^3 + 4\sqrt{3}bv_x^{1/2}v_y^2 - 48av_x v_y - 38\sqrt{3}bv_x^{3/2}) v_x (-v_x \tau + \xi)}{3 (v_y^2 - 12v_x)^2} \\
 & - \frac{v_x^3 (2400v_y^2 - 22600v_x) (-v_y \tau + \eta)^2}{(v_y^2 - 12v_x)^2} \\
 & + \frac{4\sqrt{3} (av_y^4 + \sqrt{3}bv_y^3 v_x^{1/2} - 51av_x v_y^2 - 36bv_x^{3/2} v_y + 180av_x^4)}{3 (v_y^2 - 12v_x)^2} (-v_y \tau + \eta) \\
 & + \frac{4 v_x^3 (v_y^4 - 14v_x v_y^2 - 51v_x^2) (-v_y \tau + \eta)^4}{9 (v_y^2 - 12v_x)} - \frac{\sqrt{3} v_x^{1/2}}{9 (v_y^2 - 12v_x) (v_y^2 - 12v_x)^2} (abv_y^5 + \sqrt{3}a^2 v_x^{1/2} v_y^4 \\
 & + \sqrt{3}b^2 v_x v_y^4 - 24abv_x^{3/2} v_y^3 - 24\sqrt{3}v_x^2 v_y^2 (a^2 + b^2) + 144abv_x^{5/2} v_y + 144\sqrt{3}(a^2 + b^2)v_x^3 + 9720000\sqrt{3}v_x^3) \\
 & \times \frac{\sqrt{3}}{3} av_x^2 (-v_x \tau + \xi)^2 (-v_y \tau + \eta) + \frac{1}{3} bv_x^{5/2} (-v_x \tau + \xi) (-v_y \tau + \eta)^2 - \frac{1}{27} v_x^3 v_y (v_y^2 + 18v_x) (-v_x \tau + \xi)^3 \\
 & \times (-v_y \tau + \eta)^3 + v_x^3 (-v_x \tau + \xi)^6 - \frac{18000v_x^3 (-v_x \tau + \xi)^2}{(v_y^2 - 12v_x)^2} - \frac{300v_x^3 (v_x \tau + \xi)^4}{v_y^2 - 12v_x} \\
 & - \frac{\sqrt{3}}{9} v_x (av_y + \sqrt{3}bv_x) (-v_x \tau + \xi)^3 - \frac{1}{27} v_x^{5/2} (bv_y + \sqrt{3}av_x^{1/2}) (-v_y \tau + \eta)^3 + \frac{1}{27} v_x^6 (-v_y \tau + \eta)^6.
 \end{aligned}$$

需要指出, KP 方程的单 Lump 解的最大幅值 A 为

$$A = 4 - \mu^2,$$

其中 $\mu = -\frac{v_y}{\sqrt{3}v_x}$. 为了保证 Lump 解存在, 必须满足 $-2 < \mu < 2$, 而且还要求 x 方向速度分量 $v_x > 0$.

为了求得非齐次 KP 方程的怪波激发, 可假定:

$$\alpha = \lambda t^{2m} + \varepsilon, \quad \beta = \nu t^n + \chi, \quad (8)$$

其中 $m, n, \lambda, \varepsilon, \chi, \nu$ 都是待定常数. 从 (5) 求得

$$\begin{aligned}
 \rho &= 6k^2 \frac{\nu t^n + \chi}{\lambda t^{2m} + \varepsilon}, \quad \gamma = \frac{2m\lambda t^{2m-1}}{\lambda t^{2m} + \varepsilon} - \frac{n\nu t^{n-1}}{\nu t^n + \chi}, \\
 \delta &= \frac{3\sigma^2 k^4}{l^2} (\nu t^n + \chi). \quad (9)
 \end{aligned}$$

根据自相似变换 (2) 可以求得非自治 KP 方程的有理形式解是:

$$u_1(x, y, t) =$$

$$\rho U_1 \left[\xi = kx, \eta = ly, \tau = k^3 \left(\frac{\nu t^{n+1}}{n+1} + \chi t \right) \right], \quad (10)$$

$$u_2(x, y, t) =$$

$$\rho U_2 \left[\xi = kx, \eta = ly, \tau = k^3 \left(\frac{\nu t^{n+1}}{n+1} + \chi t \right) \right]. \quad (11)$$

因为不影响二维怪波的特性, 这里令 $\xi_0 = \eta_0 = \tau_0 = 0$. 从非自治 KP 方程 (2) 的有理形式解 (10) 和 (11) 可知, 其由 12 个参数 $k, l, m, n, \mu = -\frac{v_y}{\sqrt{3}v_x}$ (或 v_x, v_y), $\lambda, \varepsilon, \nu, \chi, a, b$ 控制.

必须指出, 为了从常系数 KP 方程的 Lump 解构造非自治 KP 方程的怪波, 参数 ρ 起着关键作用. 只有参数 α, β 选取保证 ρ 随时间衰减, 而且不会发生奇异, 才能保证大振幅波在短时间存在, 因此对 (8) 式中选择 m, n 有严格的限制, 其中 m 是不包括零的正整数, n 是不等于 -1 的正整数, 而且

$\lambda > 0, \varepsilon \geq 0, \nu > 0, \chi \geq 0$. 不失一般性, 这里仅讨论选择 $n = 0, m = 1$ 情况.

首先选择 $k = 1/2, l = 1/2, \lambda = 1, \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 3, v_y = 0$, 由 (10) 式得到非自治 KP 方程的一个二维单怪波

$$u_{rw1}(x, y, t) = \frac{6}{1+t^2} \frac{1 + \frac{1}{4}y^2 - \frac{1}{64}(-3t+4x)^2}{\left[1 + \frac{1}{4}y^2 + \frac{1}{64}(-3t+4x)^2\right]^2}. \quad (12)$$

怪波 (12) 呈现的波峰在 $t = 0$ 时达到幅值 6, 持续时间较短, 其演化如图 1 所示.

其次考虑 $k = l = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = 0$, 由 (10) 式可得到非自治 KP 方程的另一个二维单怪波:

$$u_{rw2}(x, y, t) = \frac{16}{1+t^2} \frac{1 + \frac{4}{9}y^2 - \frac{2}{3}(-2t+x)^2}{\left[1 + \frac{4}{9}y^2 + \frac{2}{3}(-2t+x)^2\right]^2}. \quad (13)$$

怪波解 (13) 呈现的波峰在 $t = 0$ 时达到幅度 16, 持续时间也较短, 演化如图 2 所示.

选择 $k = 2, l = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 1, v_y = 1$, 从 (10) 式可得到非自治 KP 方程二维单怪波为



图 1 由 (12) 式所确定的非自治 KP 方程的二维单怪波演化 (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$
 Fig. 1. Evolution of two-dimensional single rogue wave propagation given in Eq. (12) for non-autonomous KP equation: (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$.

$$u_{rw3}(x, y, t) = \frac{88}{3(1+t^2)} \times \frac{1 + \frac{121}{1296}(-8t+y)^2 - \frac{11}{1296}(-40t+12x+y)^2}{\left[1 + \frac{121}{1296}(-8t+y)^2 + \frac{11}{1296}(-40t+12x+y)^2\right]^2}. \quad (14)$$

怪波解 (14) 呈现的波峰在 $t = 0$ 时达到幅度 29.33, 持续时间也较短, 衰减更快, 演化如图 3 所示.

对于从 KP 方程的多 Lump 构造非自治 KP 方程的怪波, 考虑到冗长的数学表达式, 这里不列出具体的数学表达式. 图 4 给出了解 (11) 当 $k = 1/2, l = 1/2, a = 0, b = 0, \lambda = 1, \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = 1$ 时的二维双怪波演化, 呈现的两个波峰在 $t = 0$ 时达到幅值 4.64, 而且比二维单怪波消失更快. 图 5 给出了解 (11) 当 $k = 1/2, l = 1/2, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, a = 5000, b = 5000, v_x = 2, v_y = 1$

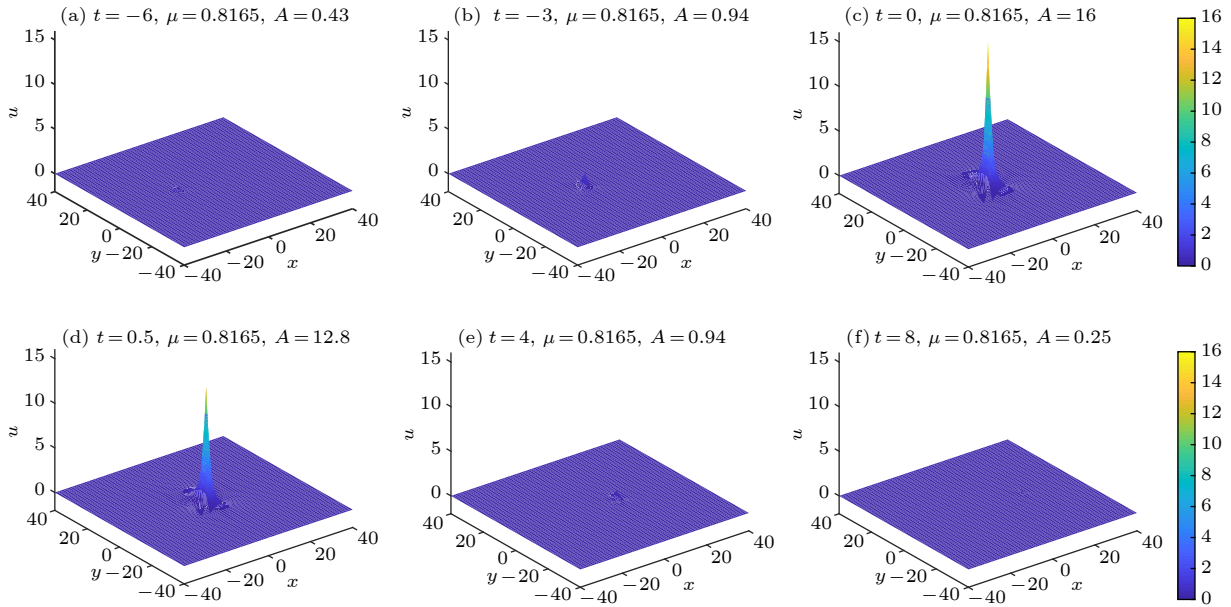


图 2 由 (13) 式所确定的非自治 KP 方程的二维单怪波演化 (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$
 Fig. 2. Evolution of two-dimensional single rogue wave propagation given in Eq. (13) for non-autonomous KP equation: (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$.

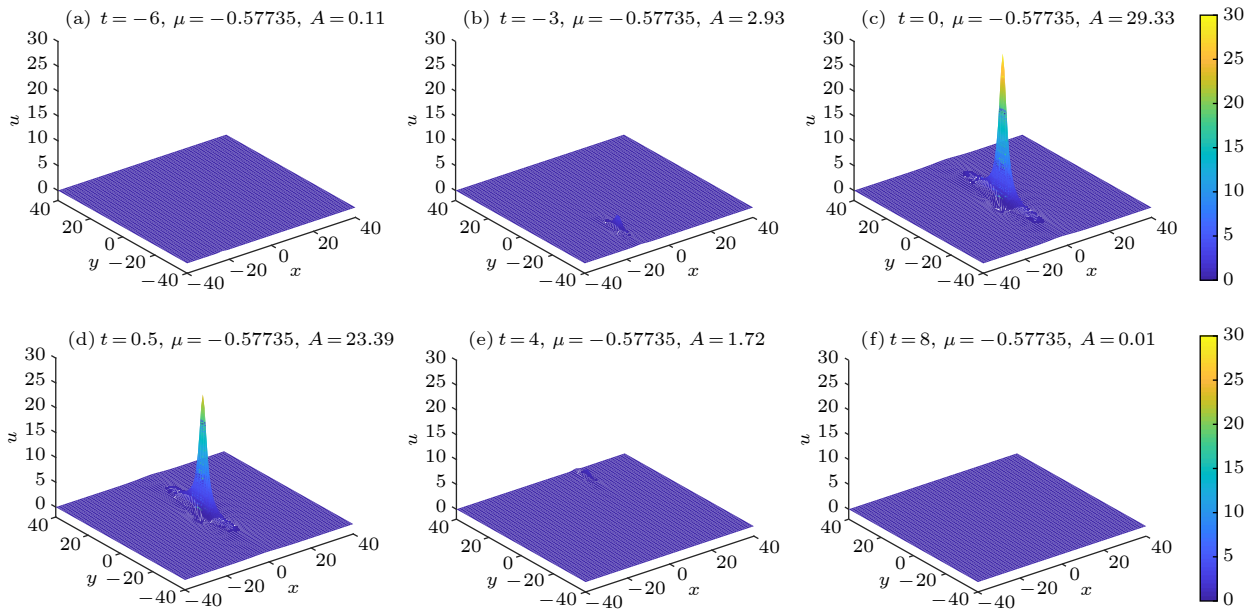


图 3 由 (14) 式所确定的非自治 KP 方程的二维单怪波演化 (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$
 Fig. 3. Evolution of two-dimensional single rogue wave propagation given in Eq. (14) for non-autonomous KP equation: (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$.

的二维三怪波演化, 呈现的三个波峰在 $t = 0$ 时达到幅值 4.05.

图 1—5 表明非自治 KP 方程的二维单、双和三怪波都具有“来无影去无踪”的明显特征. 值得指

出, 在有理形式解 (11) 中, 沿 x 轴的速度 v_x 的取值也只能大于零, 但沿着 y 轴的速度 v_y 的取值可以是任何值, 而且当 v_y 取正负相同速率时, 其二维怪波的结构和演化性质类似. 当 a, b 取值为零时呈现

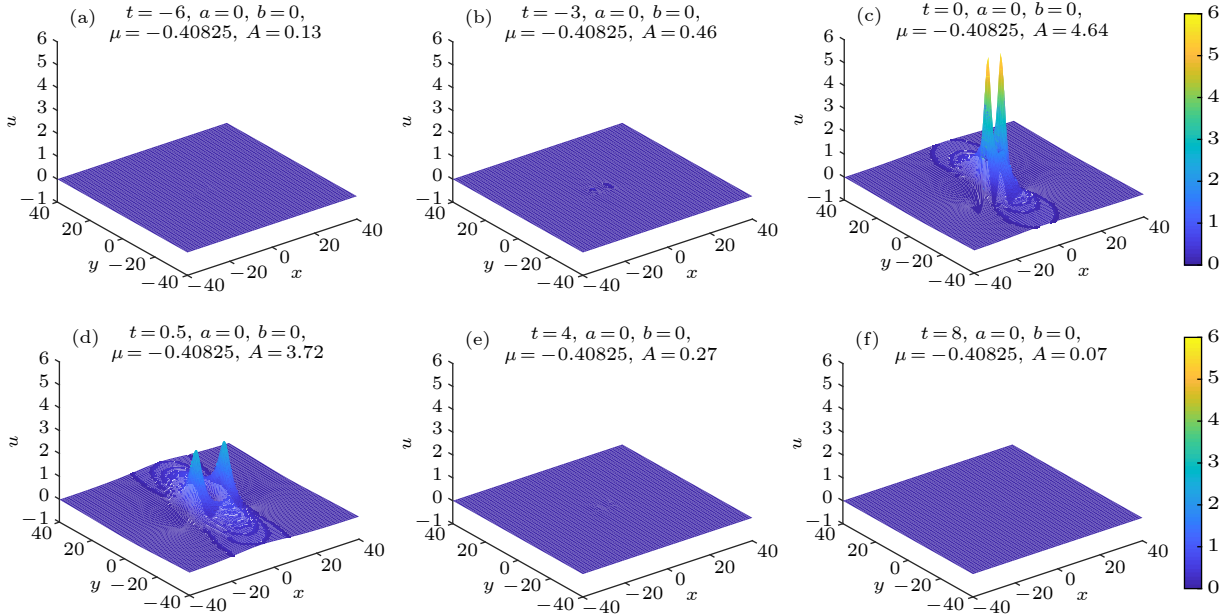


图 4 由 (11) 式所确定的非自治 KP 方程的二维双怪波演化 (选取 $k = 1/2, l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = 1, a = b = 0$) (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$

Fig. 4. Time evolution of two-dimensional double rogue waves propagation given in Eq. (11) for non-autonomous KP equation when $k = 1/2, l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = 1, a = b = 0$: (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$.

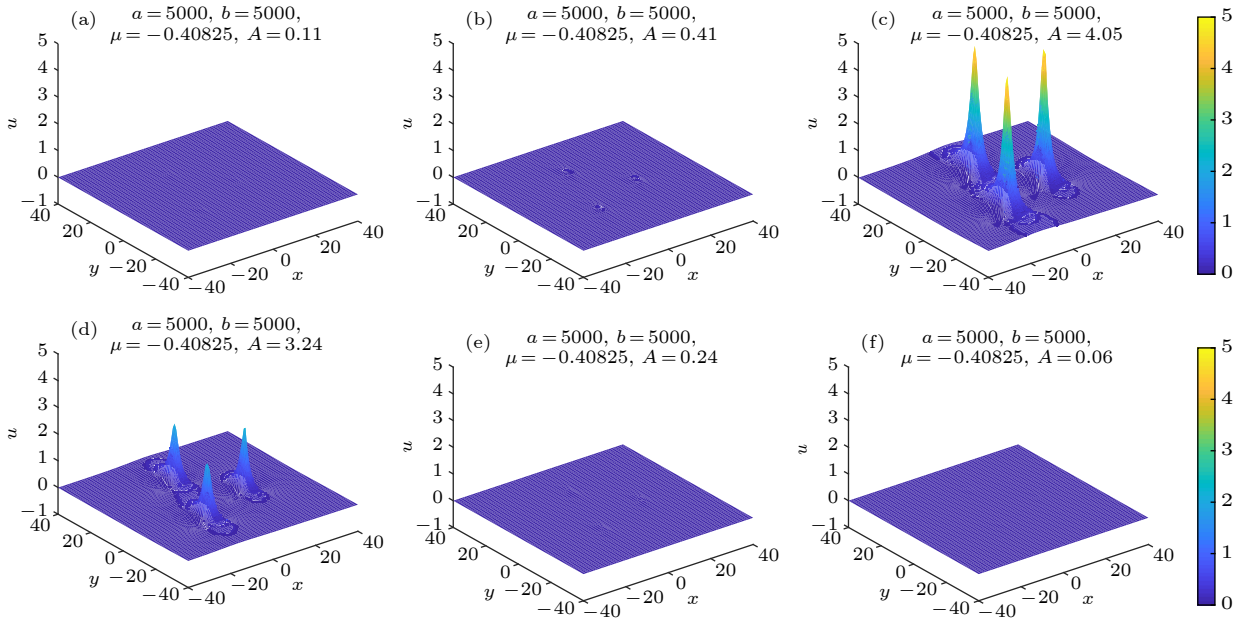


图 5 由 (11) 式所确定的非自治 KP 方程二维三怪波演化 (选择 $k = l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = 2, a = 5000, b = 5000$) (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$

Fig. 5. Time evolution of two-dimensional triple rogue waves propagation given in Eq. (11) for non-autonomous KP equation when $k = l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = 2, a = 5000, b = 5000$: (a) $t = -6$; (b) $t = -3$; (c) $t = 0$; (d) $t = 0.5$; (e) $t = 4$; (f) $t = 8$.

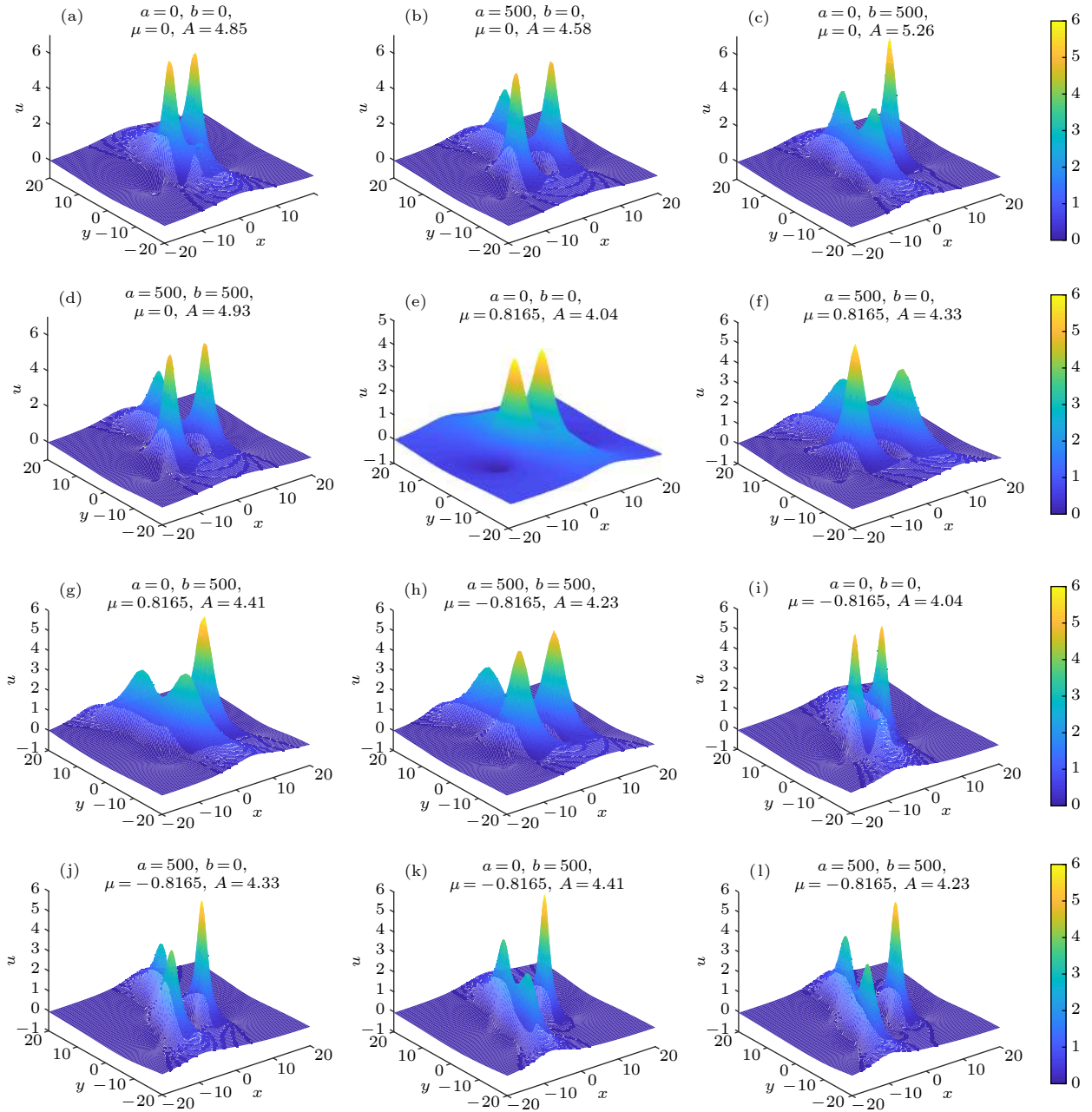


图 6 由 (11) 式所确定的二维双、三怪波 (选取 $k = 1/2, l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = 1, \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, \mu = 0, \mu = 0.8165, \mu = -0.8165$ 分别对应选取 $v_y = 0, v_y = -2, v_y = 2$)

Fig. 6. Profiles of two-dimensional double and triple rogue waves given in Eq. (11) for non-autonomous KP equation when $k = 1/2, l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = 1, \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, \mu = 0, \mu = 0.8165, \mu = -0.8165$ correspond to $v_y = 0, v_y = -2, v_y = 2$, respectively.

的是二维双怪波结构; 当 a, b 之一取值不为零时, 呈现的是二维三怪波结构. 如图 6 所示, 相关参数除 $\mu = 0, \mu = 0.8165, \mu = -0.8165$ 分别对应选取 $v_y = 0, v_y = -2, v_y = 2$ 外, 其他参数取值均为 $k = 1/2, l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, a, b, t$ 取值见图 6.

如果参数 α, β 选为其他形式的函数, 给出的可能是不同形式孤子、呼吸子或其他特征的异常波,

不在本文研究范围.

4 非自治 KP 方程二维单怪波稳定性的数值检验

下面采用快速傅里叶变换算法对非自治 KP 方程的二维怪波稳定性进行数值测试. 先考虑 $k = 1/2, l = 1/2, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = -2$ 情形, 其二维单怪波为

$$u_{rw4}(x, y, t) = \frac{10}{3(1+t^2)} \times \frac{1 + \frac{25}{1296}(t+2y)^2 - \frac{5}{144}(-2t+6x+2y)^2}{\left[\frac{25}{1296}(t+2y)^2 + \frac{5}{144}(-2t+6x+2y)^2 \right]^2}, \quad (15)$$

初始时刻选为 $t_0 = -5$, 由 (15) 式确定的各点怪波值作为初值, 加白噪声扰动, 可以得到二维单怪波 (15) 数值模拟结果, 如图 7 所示.

然后考虑 $k = 1, l = 1, n = 0, m = 1, \lambda = \varepsilon = 1, \nu = 1, \chi = 0, v_x = 2, v_y = -2$ 情形, 其二维单怪波为

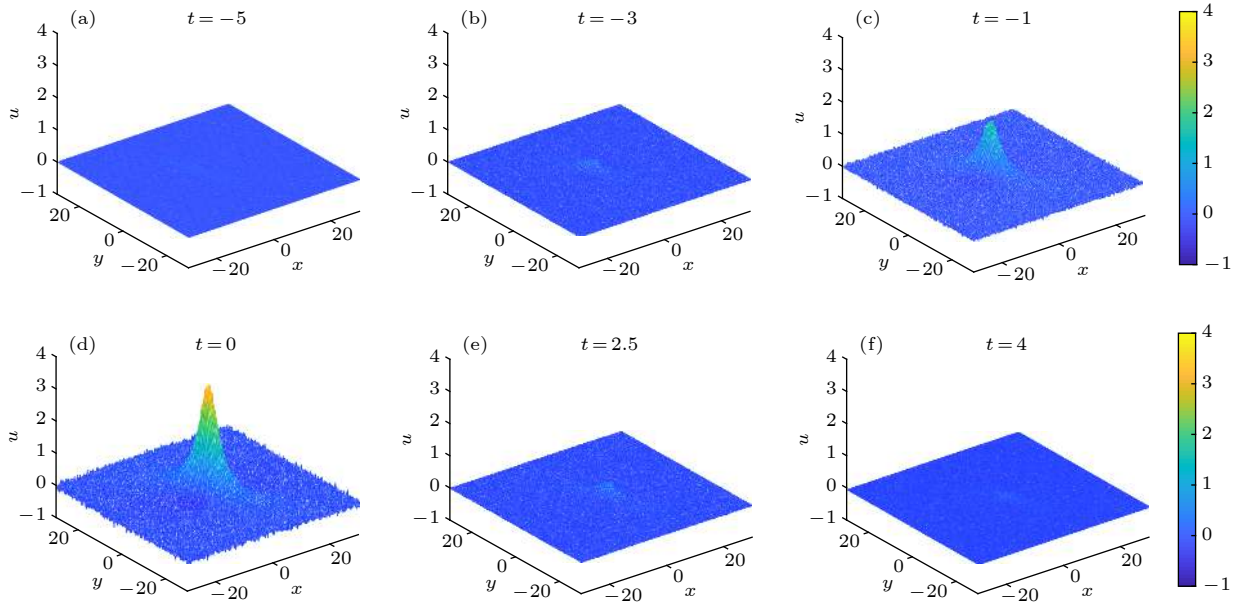


图 7 加了高斯白噪声扰动后由 (15) 式所确定的二维单怪波演化 (a) $t = -5$; (b) $t = -3$; (c) $t = -1$; (d) $t = 0$; (e) $t = 2.5$; (f) $t = 4$

Fig. 7. Evolution of two-dimensional single rogue wave determined by Eq. (15) after Gaussian white noise disturbance: (a) $t = -5$; (b) $t = -3$; (c) $t = -1$; (d) $t = 0$; (e) $t = 2.5$; (f) $t = 4$.

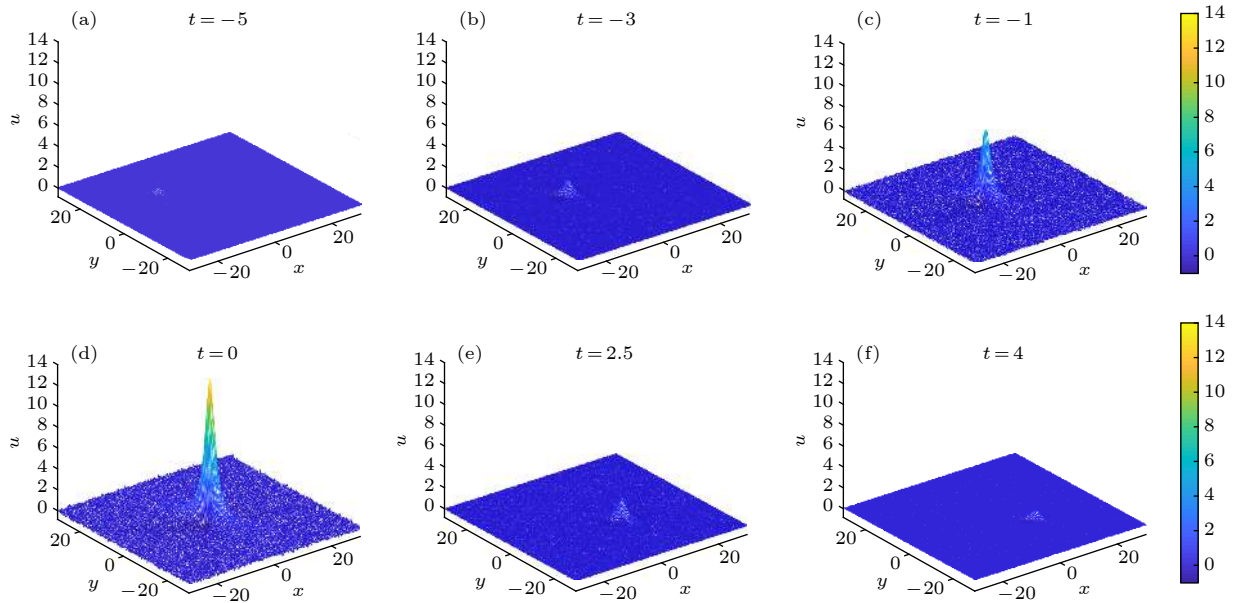


图 8 加了高斯白噪声扰动后由 (16) 式所确定的二维单怪波演化 (a) $t = -5$; (b) $t = -3$; (c) $t = -1$; (d) $t = 0$; (e) $t = 2.5$; (f) $t = 4$

Fig. 8. Evolution of two-dimensional single rogue wave determined by Eq. (16) after Gaussian white noise disturbance: (a) $t = -5$; (b) $t = -3$; (c) $t = -1$; (d) $t = 0$; (e) $t = 2.5$; (f) $t = 4$.

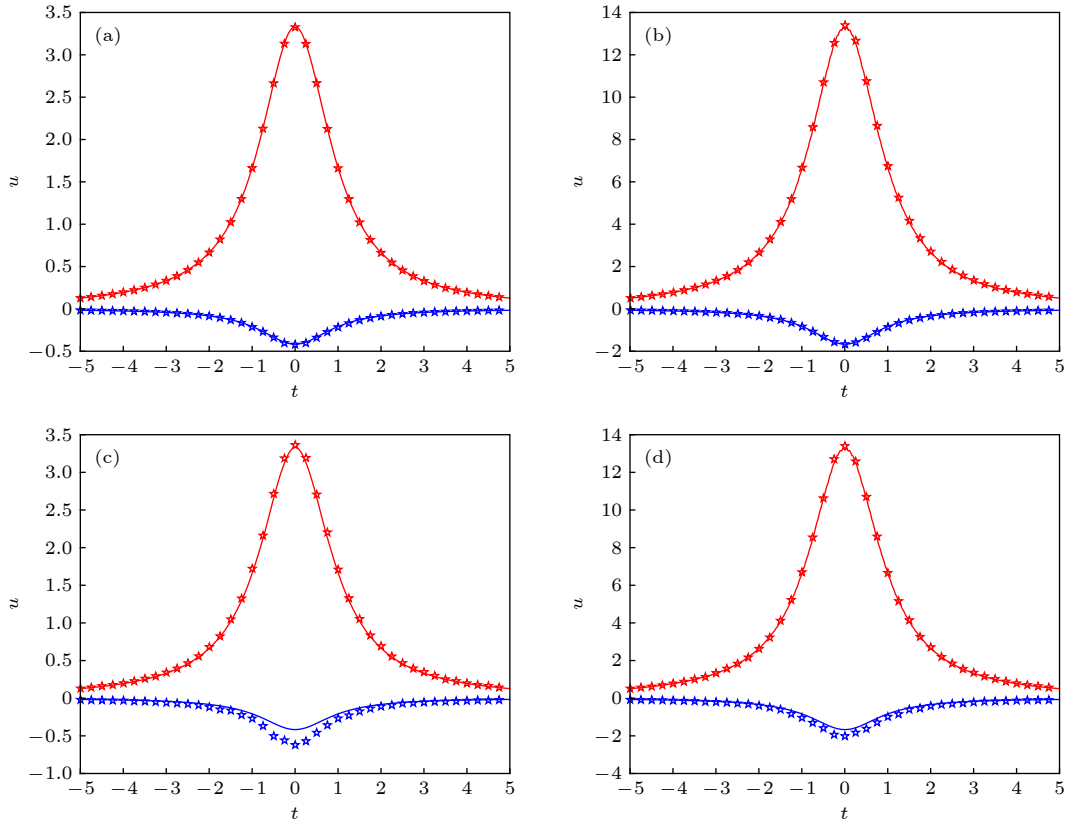


图 9 在时间区间 $[-5, 5]$ $x-y$ 平面上非自治 KP 方程的二维单怪波最大波动值和最小波动值的解析结果和数值计算模拟的对照图 (a) 对应二维单怪波 ((15) 式); (b) 对应二维单怪波 ((16) 式); (c) 在 (a) 中加了高斯白噪声扰动; (d) 在 (b) 中加高斯白噪声扰动
 Fig. 9. Simulation diagram of the analytic and numerical results of the maximum and minimum fluctuations of two-dimensional single rogue waves for the non- autonomous KP equation in the $x-y$ plane of the time interval $[-5, 5]$: (a) Corresponds to a two-dimensional single rogue wave (Eq. (15)); (b) Corresponds to a two-dimensional single rogue wave (Eq. (16)); (c) Gaussian white noise is added in panel (a); (d) Gaussian white noise is added in panel (b).

$$u_{rw5}(x, y, t) = \frac{40}{3(1+t^2)} \times \frac{1 + \frac{25}{81}(2t+y)^2 - \frac{5}{81}(-4t+x+y)^2}{\left[1 + \frac{25}{81}(2t+y)^2 + \frac{5}{81}(-4t+x+y)^2\right]^2}, \quad (16)$$

初始时刻选为 $t_0 = -5$, 由 (16) 式确定的各点怪波值作为初值, 加白噪声扰动, 可以得到二维单怪波 (15) 数值模拟结果, 如图 8 所示.

从图 7 和图 8 的数值模拟表明, 二维单怪波的演化是稳定的, 即使加了白噪声扰动, 对二维怪波的较大幅值不产生影响, 仅对小的幅值稍有扰动. 为了进一步考察二维单怪波的稳定性, 分别对上述两种情形在时间 $[-5, 5]$ 区间二维单怪波在 (x, y) 平面上的最大值和最小值进行数值模拟, 并和解析解进行比较 (精确结果用实线表示, 数值结果用五星点表示), 如图 9 所示, 两者符合很好. 对数值模拟加了白噪声扰动后, 两者也很好吻合, 表明非自治 KP 方程的二维单怪波是稳定的.

5 结 论

本文借助选择一个相似变换, 可将非自治 KP 方程转化为标准 KP 方程, 并基于 KPI 方程的 Lump 解得到非自治 KP 方程的二维怪波激发, 并采用快速傅里叶变换算法给出了精确解稳定性的数值测试. 由于所得到的有理函数表示的单二维怪波和多二维怪波解包含多个自由的参数, 因此怪波不仅具有丰富的结构和传播特性, 而且其幅值也可以操控. 本文结果为 $(2+1)$ 维非线性模型的怪波激发给出了一种合适的物理机制, 也有助于寻找新的二维怪波并对相应的物理问题提供启发.

感谢南方科技大学吴雷副教授和浙江传媒学院智能媒体技术研究院刘畅博士在数值计算上的大力帮助, 感谢浙江农林大学戴朝卿教授和王悦悦副教授的有益讨论, 感谢审稿专家的建设性意见和提供的相关文献.

参考文献

- [1] Pelinovsky E, Kharrif C 2008 *Extreme Ocean Waves* (Berlin: Springer)
- [2] Onorato M, Osborne A R, Serio M, Bertone S 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 5831
- [3] Ginzburg N S, Rozental R M, Sergeev A S, Fedotov A E, Zotova I V, Tarakanov V P 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 034801
- [4] Akhmediev N, Dudley J M, Solli D R, Turitsyn S K 2013 *J. Opt.* **15** 060201
- [5] Bludov Yu V, Konotop V V, Akhmediev N 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033610
- [6] Moslem W M 2011 *Phys. Plasm.* **18** 032301
- [7] Stenflo L, Marklund M 2010 *J. Plasm. Phys.* **76** 293
- [8] Onorato M, Residori S, Bertolozzo U, Montina A, Arecchi F 2013 *Phys. Rep.* **528** 47
- [9] Müller P, Garrett C, Osborne A 2005 *Oceanography* **18** 66
- [10] Zhang J F, Dai C Q 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 050501 (in Chinese) [张解放, 戴朝卿 2016 物理学报 **65** 050501]
- [11] Hohmann R, Kuhl U, Stockmann H J, Kaplan L, Heller E J 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 093901
- [12] Ganshin A N, Efimov V B, Kolmakov G V, Mezhev Deglin P V, McClintock E 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 065303
- [13] Yan Z Y 2010 *Commun. Theor. Phys.* **54** 947
- [14] Shats M, Punzmann H, Xia H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 104503
- [15] Xia H, Maimbourg T, Punzmann H, Shats M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 114502
- [16] Solli R, Ropers C, Koonath P, Jalali B 2007 *Nature* **450** 1054
- [17] Chabchoub A, Hoffmann N P, Akhmediev N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 204502
- [18] Peregrine D H 1983 *J. Aust. Math. Soc. Ser. B: Appl. Math.* **25** 16
- [19] Akhmediev N, Ankiewicz A, Soto Crespo J M 2009 *Phys. Rev. E* **80** 026601
- [20] Kedziora D J, Ankiewicz A, Akhmediev N 2012 *Phys. Rev. E* **86** 056602
- [21] Ohta Y, Yang J 2012 *Proc. R. Soc. A* **468** 1716
- [22] Ankiewicz A, Soto Crespo J M, Akhmediev N 2010 *Phys. Rev. E* **81** 046602
- [23] Li L J, Wu Z W, Wang J H, He J S 2013 *Annals of Physics* **334** 198
- [24] Tao Y S, He J S 2012 *Phys. Rev. E* **85** 026601
- [25] Chen S 2013 *Phys. Rev. E* **88** 023202
- [26] Chan H N, Chow K W, Kedziora D J, Grimshaw R H J, Ding E 2014 *Phys. Rev. E* **89** 032914
- [27] Zhang Y S, Guo L J, He J S 2015 *Lett. Math. Phys.* **105** 853
- [28] Qiu D Q, He J, Zhang Y H, Porsezian K 2015 *Proc. R. Soc. A* **471** 20150236
- [29] He J S, Xu S W, Porsezian K 2012 *J. Phys. Soc. Japan* **81** 124007
- [30] Xu S W, He J S, Cheng Y, Porsezian K 2015 *Math. Meth. Appl. Sci.* **38** 1106
- [31] Chen S, Song L Y 2014 *Phys. Lett. A* **378** 1228
- [32] He J S, Wang L, Li L, Porsezian K, Erdélyi R 2014 *Phys. Rev. E* **89** 062917
- [33] Zha Q 2013 *Phys. Scr.* **87** 065401
- [34] Chen S, Soto Crespo J M, Baronio F, Grell Ph, Mihalache D 2016 *Opt. Express* **24** 15251
- [35] Wang L H, Porsezian K, He J S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 053202
- [36] Chen S, Mihalache D 2015 *J. Phys. A: Math. Theor.* **48** 215202
- [37] Baronio F, Conforti M, Degasperis A, Lombardo S, Onorato M, Wabnitz S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 034101
- [38] He J S, Zhang H R, Wang L H, Porsezian K, Fokas A S 2013 *Phys. Rev. E* **87** 052914
- [39] Wang L H, He J S, Xu H, Wang J, Porsezian K 2017 *Phys. Rev. E* **95** 042217
- [40] Ohta Y, Yang J 2012 *Phys. Rev. E* **86** 036604
- [41] Ohta Y, Yang J 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 105202
- [42] Rao J G, Porsezian K, He J S 2017 *Chaos* **27** 083115
- [43] Guo L J, He J S, Wang L H, Cheng Y, Frantzeskakis D J, Kevrekidis P G 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033376
- [44] Wen L L, Zhang H Q 2016 *Nonlinear Dyn.* **86** 877
- [45] Qiu D Q, Zhang Y S, He J S 2016 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **30** 307
- [46] Jia R R, Guo R 2019 *Appl. Math. Lett.* **93** 117
- [47] Kadomtsev B B, Petviashvili V I 1970 *Sov. Phys. Dokl.* **15** 539
- [48] Ablowitz M J, Segur H 1979 *J. Fluid Mech.* **92** 691
- [49] Pelinovsky D E, Stepanyants Y A, Kivshar Y A 1995 *Phys. Rev. E* **51** 5016
- [50] Manakov S V, Zakharov V E, Bordag L A, Matveev V B 1977 *Phys. Lett. A* **63** 205
- [51] Krichever I 1978 *Funct. Anal. and Appl.* **12** 59
- [52] Satsuma J, Ablowitz M J 1979 *J. Math. Phys.* **20** 1496
- [53] Pelinovsky D E, Stepanyants Y A 1993 *JETP Lett.* **57** 24
- [54] Pelinovsky D E 1994 *J. Math. Phys.* **35** 5820
- [55] Ablowitz M J, Villarroel J 1997 *Phys. Rev. Lett.* **78** 570
- [56] Villarroel J, Ablowitz M J 1999 *Comm. Math. Phys.* **207** 1
- [57] Biondini G, Kodama Y 2003 *J. Phys. A: Math. Gen.* **36** 10519
- [58] Kodama Y 2004 *J. Phys. A: Math. Gen.* **37** 11169
- [59] Biondini G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 064103
- [60] Ma W X 2015 *Phys. Lett. A* **379** 1975
- [61] Singh N, Stepanyants Y 2016 *Wave Motion* **64** 92
- [62] Hu W C, Huang W H, Lu Z M, Stepanyants Y 2018 *Wave Motion* **77** 243
- [63] Wen X Y, Yan Z Y 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **43** 311
- [64] Yang J Y, Ma W X 2017 *Nonlinear Dyn.* **89** 1539
- [65] Jia M, Lou S 2018 arXiv: 1803.01730 v1[nlin.SI]
- [66] Serkin V N, Hasegawa A 2000 *Phys. Rev. Lett.* **85** 4502
- [67] Serkin V N, Hasegawa A, Belyaeva T L 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 074102
- [68] Yan Z Y, Zhang X F, Liu W M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 023627
- [69] Lou H G, Zhao D, He X 2009, *Phys. Rev. A* **79** 063802
- [70] Zhang J F, Li Y S, Meng J P, Wu L, Malomed B A 2010 *Phys. Rev. A* **82** 033614
- [71] Dai C Q, Zhang J F 2010 *Opt. Lett.* **35** 2651
- [72] Serkin V N, Hasegawa A, Belyaeva T L 2010 *Phys. Rev. A* **81** 023610
- [73] Kibler B, Fatome J, Finot C, et al. 2010 *Nat. Phys.* **6** 790
- [74] Wu L, Zhang J F, Li L, Tian Q, Porsezian K 2008 *Opt. Express* **16** 6352
- [75] Tian Q, Wu L, Zhang J F, Malomed B A, Mihalache D, Liu W M 2011 *Phys. Rev. E* **83** 016602
- [76] David D, Levi D, Wintemitz P 1987 *Stud. Appl. Math.* **76** 133
- [77] Chan W L, Li K S, Li Y S 1992 *J. Math. Phys.* **33** 3759
- [78] Lü Z S, Chen Y N 2015 *Eur. Phys. J. B* **88** 187
- [79] Ilhan O A, Manafian J, Shahriaric M 2019 *Comput. Math. App.* **78** 2429

Self-similarity transformation and two-dimensional rogue wave construction of non-autonomous Kadomtsev-Petviashvili equation*

Zhang Jie-Fang^{1)2)†} Jin Mei-Zhen³⁾ Hu Wen-Cheng⁴⁾

1) (*Institute of Intelligent Media Technology, Communication University of Zhejiang, Hangzhou 310018, China*)

2) (*Zhejiang Provincial Key Laboratory of Film and Television Media Technology, Communication University of Zhejiang, Hangzhou 310018, China*)

3) (*Network Data Center, Communication University of Zhejiang, Hangzhou 310018, China*)

4) (*College of Science, Zhongyuan University of Technology, Zhengzhou 450007, China*)

(Received 25 June 2020; revised manuscript received 24 August 2020)

Abstract

Rogue wave is a kind of natural phenomenon that is fascinating, rare, and extreme. It has become a frontier of academic research. The rogue wave is considered as a spatiotemporal local rational function solution of nonlinear wave model. There are still very few $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear wave models which have rogue wave solutions, in comparison with soliton and Lump waves that are found in almost all $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear wave models and can be solved by different methods, such as inverse scattering method, Hirota bilinear method, Darboux transform method, Riemann-Hilbert method, and homoclinic test method. The structure and evolution characteristics of the obtained $(2 + 1)$ -dimensional rogue waves are quite different from the prototypes of the $(1 + 1)$ -dimensional nonlinear Schrödinger equation. Therefore, it is of great value to study two-dimensional rogue waves.

In this paper, the non-autonomous Kadomtsev-Petviashvili equation is first converted into the Kadomtsev-Petviashvili equation with the aid of a similar transformation, then two-dimensional rogue wave solutions represented by the rational functions of the non-autonomous Kadomtsev-Petviashvili equation are constructed based on the Lump solution of the first kind of Kadomtsev-Petviashvili equation, and their evolutionary characteristics are illustrated by images through appropriately selecting the variable parameters and the dynamic stability of two-dimensional single rogue waves is numerically simulated by the fast Fourier transform algorithm. The obtained two-dimensional rogue waves, which are localized in both space and time, can be viewed as a two-dimensional analogue to the Peregrine soliton and thus are a natural candidate for describing the rogue wave phenomena. The method presented here provides enlightenment for searching for rogue wave excitation of $(2 + 1)$ -dimensional nonlinear wave models.

We show that two-dimensional rogue waves are localized in both space and time which arise from the zero background and then disappear into the zero background again. These rogue-wave solutions to the non-autonomous Kadomtsev-Petviashvili equation generalize the rogue waves of the nonlinear Schrödinger equation into two spatial dimensions, and they could play a role in physically understanding the rogue water waves in the ocean.

Keywords: two-dimensional rogue wave, Kadomtsev-Petviashvili equation, nonautonomous nonlinear wave model, self-similar transformation

PACS: 42.65.Tg, 05.45.Yv, 02.30.Jr, 04.30.Nk

DOI: 10.7498/aps.69.20200981

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61877053) .

† Corresponding author. E-mail: Zhangjief@cuz.edu.cn