中　國　物　理　學　報
第七卷第六期，454—461 頁，1950 年 12 月

原子核 ^{6}Li 和 ^{7}Li 的結合能

第二部　關於 ^{6}Li 的數字計算

(近代物理研究所論文第四號)

葉　龍　飛

(中國科學院近代物理研究所)

用第一部計算 ^{6}Li 結合能的公式，在本文中以粗略的變分函數進行數字計算。結果是兩種力强的核子作位能好，而且這兩種力程的比最好大於三倍。

在第一部（前文）中已說明 ^{6}Li 的波函數 ψ 大概是這樣的形狀

$$\psi=(6\,!)^{-\frac{1}{2}}\sum(\pm)\mathfrak{P}\,\phi(\overline{r_1,r_2,r_3,r_4};\overline{r_5,r_6})\,\chi(1,2,3,4,5,6) \tag{1}$$

其中 $\phi(\overline{r_1,r_2,r_3,r_4};\overline{r_5,r_6})$ 對 r_1,r_2,r_3,r_4 及 r_5,r_6 對稱，自旋電荷函數 χ 對 5 及 6 兩核子的自旋座標對稱，而 1, 2, 3, 4, 四核子組成閉殼。很清楚這波函數表示總自旋 $I=1$ 的狀態。事實上 ^{6}Li 的基層狀態[1] 大部份是 $^3S_1$ 的。由這樣的推想，我們選用下列含有兩參數 a 和 b 的式子作爲波函數的空間部份

$$\phi(\overline{r_1,r_2,r_3,r_4};\overline{r_5,r_6})=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}a\lambda\rho}\Big\{|r_5-r_6|^2+\frac{b}{12}|2r_5+2r_6-r_1-r_2-r_3-r_4|^2\Big\} \tag{2}$$

其中
$$\rho^2=\frac{1}{12}\sum_{i,j=1}^{6}|r_i-r_j|^2=\sum_{i=1}^{6}r_i^2-\frac{1}{6}\Big(\sum_{i=1}^{6}r_i\Big)^2 \tag{3}$$

1. 參看 L. Rosenfeld, *Nuclear Forces* (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1948) p. 306 and p. 415

參數 a 及 b 和 ^{6}Li 的結合能是由極小化下列的比 E 而求得。

$$E=\frac{\int\psi^* T\psi\, d\tau+\int\psi^* V\psi\, d\tau}{\int\psi^*\psi\, d\tau} \tag{4}$$

這裏 $\int\dots d\tau$ 包括對六個核子的自旋和電荷座標的求和，以及對空間座標的積分。在 (4) 式中的三個積分，由第一部的計算已求得 (13)，(15) 及 (23) 各式，只餘對各核子空間座標的積分需在本文中計算。

對於正化積分和動能積分，我們以下列的正交變換，引用新的變數 $\boldsymbol{R}$, ρ_1, ρ_2, ρ_3, ρ_4, ρ_5。（ρ_n 都是相對座標，而 $\boldsymbol{R}$ 是重心的座標的 $\sqrt{6}$ 倍）。

$$\left.\begin{aligned}
r_1&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(R+\sqrt{3}\,\rho_1+\rho_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_3-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_4\right)\\
r_2&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(R-\sqrt{3}\,\rho_1+\rho_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_3-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_4\right)\\
r_3&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(R-2\rho_2+\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_3-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_4\right)\\
r_4&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(R-\frac{3}{2}\sqrt{2}\,\rho_3-\frac{1}{2}\sqrt{2}\,\rho_4\right)\\
r_5&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(R+\sqrt{2}\,\rho_4+\sqrt{3}\,\rho_5\right)\\
r_6&=\frac{1}{\sqrt{6}}\left(R+\sqrt{2}\,\rho_4-\sqrt{3}\,\rho_5\right)
\end{aligned}\right\} \tag{5}$$

這些方程式中的變數都是矢量。由這個變換可得

$$\sum_{i=1}^{6} r_i^2=R^2+\sum_{n=1}^{5}\rho_n^2 \tag{6}$$

$$\sum_{i=1}^{6}\nabla_i^2=\nabla_R^2+\sum_{n=1}^{5}\nabla_n^2 \tag{7}$$

此中 ∇_i, ∇_R, ∇_n 各表示對於 r_i, R, ρ_n 的微分。此時 (2) 式及 (3) 式各變爲

$$\phi=\phi\,(\overline{r_1, r_2, r_3, r_4};\ \overline{r_5, r_6})=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}a\lambda\rho}\left\{2\rho_5^2+b\rho_4^2\right\} \tag{8}$$

$$\rho^2=\sum_{n=1}^{5}\rho_n^2 \tag{9}$$

故可得

$$\left\{\sum_{i=1}^{6}\nabla_i^2\right\}\phi=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}a\lambda\rho}\left\{\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}\left(\frac{a\lambda}{\sqrt{2}}-\frac{18}{\rho}\right)(2\rho_5^2+b\rho_4^2)+6\,(2+b)\right\} \tag{10}$$

而對於整個形相空間的積分則為

$$\int\cdots d(r)=\int\cdots d(R)\prod_{n=1}^{5}d(\rho_n)\equiv\int\cdots d(R)\ d(\rho) \tag{11}$$

此後，對於重心座標的積分 $\int\ldots d\ (R)$ 卽將略去，因爲這對 (4) 式的比並無關係。設 a 及 b 皆爲實數，則 $\phi^*=\phi$。我們可以求得

$$(16)\ \phi=\phi\,(\overline{r_6, r_2, r_3, r_4};\ \overline{r_5, r_1})=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}a\lambda\rho}\left\{\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}b\right)\rho_1^2+\left(\frac{1}{6}+\frac{1}{8}b\right)\rho_2^2+\left(\frac{1}{12}+\frac{1}{16}b\right)\rho_3^2+\left(\frac{3}{4}+\frac{1}{16}b\right)\rho_4^2+\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{8}b\right)\rho_5^2+\text{互乘的各項}\right\} \tag{12}$$

$$(16)\,(25)\ \phi=\phi\,(\overline{r_6, r_5, r_3, r_4};\ \overline{r_2, r_1})=e^{-\frac{1}{\sqrt{2}}a\lambda\rho}\left\{2\rho_1^2+\frac{1}{2}b\rho_2^2+\frac{1}{4}b\rho_3^2+\frac{1}{4}b\rho_4^2+\text{互乘的各項}\right\} \tag{13}$$

互乘的各項互乘各項的積分結果皆爲零，故不必詳細寫出。利用 ρ 對於各 ρ_n 的對稱關係，可得

$$\int \psi^* \psi \, d\tau = (2 - 3b + \frac{9}{8} b^2) \int e^{-\sqrt{2}\, a\lambda\rho} (\rho_1^4 - \rho_1^2 \rho_2^2)\, d(\rho)\,, \tag{14}$$

$$\int \psi^* T \psi \, d\tau = -\frac{\hbar^2}{2M} (2 - 3b + \frac{9}{8} b^2) \int e^{-\sqrt{2}\, a\lambda\rho} (\rho_1^4 - \rho_1^2 \rho_2^2) \times$$
$$\frac{a\lambda}{\sqrt{2}} \left(\frac{a\lambda}{\sqrt{2}} - \frac{18}{\rho} \right) d(\rho) = \frac{\hbar^2}{2M} \frac{a^2 \lambda^2}{2} \int \psi^* \psi \, d\tau\,. \tag{15}$$

這裏, $d(\rho)$ 含有 $\rho^{14}\, d\rho$ 的因子, 由對於輻變數 ρ 的積分, (15) 式中最後的一個步驟需用下式

$$18 \int_0^\infty e^{-x} x^{17}\, dx = \int_0^\infty e^{-x} x^{18}\, dx\,, \qquad (x = \sqrt{2}\, a\lambda\rho)\,. \tag{16}$$

在計算位能積分 (第一部的 (23) 式) 時, 對於含有 φ_{12}, φ_{56}, φ_{12}^0, φ_{56}^0 各項, 可沿用上面的正交變換。此處除 (12) 及 (13) 式外, 我們還需要 $(35)\phi$, $(16)(35)\phi$, $(46)(35)\phi$, 其形狀都與 $(16)\phi$, $(16)(25)\phi$ 的類似。
對於含有 φ_{16}, φ_{16}^0 各項, 則需改用下列的正交變換

$$\left.\begin{aligned}
r_1 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (R + \sqrt{3}\, \rho_1 + \rho_2 - \rho_3) \\
r_2 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (R \qquad\qquad + \rho_3 - 2\rho_4) \\
r_3 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (R \qquad\qquad + \rho_3 + \rho_4 + \sqrt{3}\, \rho_5) \\
r_4 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (R \qquad\qquad + \rho_3 + \rho_4 - \sqrt{3}\, \rho_5) \\
r_5 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (R \qquad -2\rho_2 - \rho_3) \\
r_6 &= \frac{1}{\sqrt{6}} (R - \sqrt{3}\, \rho_1 + \rho_2 - \rho_3)
\end{aligned}\right\} \tag{17}$$

其中的相對座標仍用 ρ_n 表示, 但請莫與上面的 ρ_n 相淆混。由這個變換, 可得

$$\phi = e^{-\frac{1}{\sqrt{2}} a\lambda\rho} \Big\{ (\frac{1}{2} + \frac{3}{8} b)\, \rho_1^2 + (\frac{3}{2} + \frac{b}{8}) \rho_2^2 + \frac{1}{2} b \rho_3^2$$
$$+ (-1 + \frac{b}{4}) \sqrt{3}\, (\rho_1, \rho_2) + \frac{b}{2} \sqrt{3}\, (\rho_1, \rho_3) + \frac{1}{2} b\, (\rho_2, \rho_3) \Big\} \tag{18}$$

以及 $(16)\phi$, $(15)\phi$, $(26)\phi$, $(25)\phi$, $(16)(25)\phi$, $(26)(35)\phi$, 其內 (ρ_1, ρ_2), (ρ_1, ρ_3), (ρ_2, ρ_3) 三類互乘項須予保留,因其自乘平方在積分後不等於零。其實我們只消在被積函數中拿 $\frac{1}{3}\rho_1^2\rho_2^2$ 代替 $(\rho_1, \rho_2)^2$ 便對。利用對稱關係,簡化後的結果是

$$\int\psi^* V\psi\, d\tau = \int e^{-\sqrt{2}\,a\lambda\rho}\,\frac{e^{-\sqrt{2}\,\lambda\rho_1}}{\sqrt{2}\,\rho_1}\Big[A\rho_1^4+B\rho_1^2\rho_2^2+C\rho_2^4+D\rho_2^2\rho_3^2\Big]\,d(\rho)$$

$$+\int e^{-\sqrt{2}\,a\lambda\rho}\,\frac{e^{-\sqrt{2}\,\lambda_0\rho_1}}{\sqrt{2}\,\rho_1}\Big[A_0\rho_1^4+B_0\rho_1^2\rho_2^2+C_0\rho_2^4+D_0\rho_2^2\rho_3^2\Big]\,d(\rho) \qquad (19)$$

A, B, C, D 及 A_0, B_0, C_0, D_0 各爲 g^2, f^2 及 g_0^2, f_0^2 之直線組合,其係數都是 b 的二次式,屬於後四者的並含有 $\varDelta$。以 (14) 式除 (19) 式,把 $d(\rho)$ 寫成 $\Pi(4\pi\rho_n^2\,d\rho_n)$,並引用極座標 $\rho, \varphi, \varphi', \varphi'', \varphi'''$,而代入

$$d\rho_1\,d\rho_2\,d\rho_3\,d\rho_4\,d\rho_5=\rho^4\sin^3\varphi\sin^2\varphi'\sin\varphi''\,d\rho\,d\varphi\,d\varphi'\,d\varphi''\,d\varphi''' \qquad (20)$$

再將所得的式先對 $\varphi''', \varphi'', \varphi'$ 然後對 ρ 積分。最後,又用新變數 $z=\cos\varphi$,結果是以下的形狀

$$\frac{\int\psi^* V\psi\,d\tau}{\int\psi^*\psi\,d\tau}=\frac{4}{9}a\lambda\beta^2\,\frac{\int_0^1\left\{(1+\frac{z}{a})^{-18}S+(1+\frac{z}{a_0})^{-18}S_0\right\}z(1-z^2)^5\,dz}{\int_0^1\left\{z^4-\frac{1}{4}z^2(1-z^2)\right\}z^2(1-z^2)^5\,dz} \qquad (21)$$

其中

$$\left.\begin{aligned} S&\equiv Az^4+\frac{1}{4}Bz^2(1-z^2)+\frac{1}{56}(5C+3D)(1-z^2)^2\\ S_0&\equiv A_0z^4+\frac{1}{4}B_0z^2(1-z^2)+\frac{1}{56}(5C_0+3D_0)(1-z^2)^2\end{aligned}\right\} \qquad (22)$$

此處已引用簡式

$$\beta=\frac{1}{3b-4}\qquad 即\qquad b=\frac{4}{3}+\frac{1}{3\beta} \qquad (23)$$

及

$$a_o = \frac{\lambda}{\lambda_o} a \tag{24}$$

引用 $I(u)$, $J(u)$, $K(u)$ 三函數，其定義爲

$$5I(u) = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \int_o^1 z^5 (1-z^2)^5 \left(1+\frac{z}{u}\right)^{-18} dz \tag{25}$$

$$9J(u) = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \int_o^1 z^3 (1-z^2)^6 \left(1+\frac{z}{u}\right)^{-18} dz \tag{26}$$

$$7K(u) = 7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\cdot 11\cdot 13\cdot 17 \int_o^1 z (1-z^2)^7 \left(1+\frac{z}{u}\right)^{-18} dz \tag{27}$$

則 (21) 式變成

$$\frac{\int \psi^* V \psi \, d\tau}{\int \psi_c^* \psi \, d\tau} = \frac{a\lambda}{2^{14}\cdot 9} \beta^2 \Big\{ 40\, A\, I(a) + 18\, B\, J(a) + (5C + 3D)\, K(a) + 40\, A_0\, I(a_0) + 18\, B_0\, J(a_0) + (5C_0 + 3D_0)\, K(a_0) \Big\} \tag{28}$$

由 (23) 式可知 A, A_0 等卽 $1/\beta$ 的二次式，故 (28) 式爲 β 的二次式。將 (4) 改爲

$$E = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{M} \varepsilon \tag{29}$$

(如 $\mu = \hbar \lambda / c = 286$ 電子質量，則 $\hbar^2 \lambda^2 / M = 22.8$ Mev)

由 (15) 式及 (28) 式，可得

$$\varepsilon = \varepsilon(a, \beta) \equiv \frac{1}{4} a^2 - \frac{1}{2^{21}\cdot 3^3} (P + 2Q\beta + R\beta^2)\, a \tag{30}$$

其中

$$P = 12 \frac{M}{\mu \hbar c} \Big\{ f^2 F(a) + g^2 G(a) + f_0^2 F_0(a_0) + g_0^2 G_0(a_0) \Big\} \tag{31}$$

$$Q = 16\frac{M}{\mu\hbar c}\left\{f^2 L(a) - \left(\frac{1+\Delta}{2}g_0^2 - \frac{3+\Delta}{2}f_0^2\right)L(a_0)\right\} \qquad (32)$$

$$R = 256\frac{M}{\mu\hbar c}\left\{f^2 M(a) - \left(\frac{1+\Delta}{2}g_0^2 - \frac{3+\Delta}{2}f_0^2\right)M(a_0)\right\} \qquad (33)$$

而 $F(u)$, $G(u)$, $F_0(u)$, $G_0(u)$ 都是 $I(u)$, $J(u)$, $K(u)$ 三函數的直線組合, $L(u)$, $M(u)$ 是 $J(u)$, $K(u)$ 二函數的直線組合。各係數都是數字, 但屬於 F_0 和 G_0 的還含有 Δ。

對 β 取 ε 的極小值, 則得

$$\beta = -\frac{Q}{R} \qquad (34)$$

$$\varepsilon = \varepsilon(a) \equiv \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2^{21}\cdot 3^3}\left(P - \frac{Q^2}{R}\right)a \qquad (35)$$

最後這式仍須對 a 取極小值, 由數字計算求得: $I(u)$, $J(u)$, $K(u)$ 三函數都可用超幾何函數表出, 經改換變數, 更可變爲有限項的級數, 簡化後則爲 $u^2/(1+u)^{12}$ 的有理式乘上 u 的十次多項式, 其數值可以表列備用。$(f^2 M/\mu\hbar c)$ $(g^2 M/\mu\hbar c)$, $(f_0^2 M/\mu\hbar c)$, $(g_0^2 M/\mu\hbar c)$ 的數值是由以前關於 ^{2}H, ^{3}H, ^{4}He 的結合能的計算結果[2, 3] 取來。

a) 兩種力程的核子作用位能: 用張一彭文[2]第八表中 $(M/\mu)(f^2/\hbar c)$ 等的數值, 取不同的 μ/μ_0 (μ 及 μ_0 各表示帶電的及中性的介子質量), 得 $\varepsilon(a)$ 的數字計算結果如下:

$\mu/\mu_0 =$	0·3	0·4	0·5	0·6	0·7
$\varepsilon(a)$ 的極小值 $=$	−0·53	−0·42	−0·30	−0·20	−0·11
$a \doteq$	2·0	1·8	1·7	1·5	1·3

^{6}Li 結合能的實驗值 $=1{\cdot}45$, 卽 33 Mev. (此數值已包含約百分之三的庫倫能在內)

在以計算值與實驗值比較時, 須注意 $(f^2 M/\mu\hbar c)$ 等常數的求值 (張一彭[2]) 是假定 ^{2}H, ^{3}H, ^{4}He 的結合能的計算值僅各爲實驗值的 87%, 67% 和

2. 張繼恆, 彭桓武, 中國物理學報, 7 (1950), 339.
3. 俞星南, 張繼恆, 彭桓武, 中國物理學報, 7 (1950), 324.

63%，估計到計算的不够精細。故此，對於 ^{6}Li，現在所得的計算值自不能希望會大於實驗值的 40% 或甚至 50%。所以，從上面的計算結果可知 μ/μ_o 的比值要小，約爲 0·3 或更小。

b) 摩勒—羅森費德的位能：第一部已說明摩勒—羅森費德可由兩種力程的位能特別化而得。金—張—彭[3] 曾由 ^{2}H, ^{3}H 及 ^{4}He 的結合能求得 $k = 3(g_o^2 + 3f_o^2)\,M/\mu\hbar c$ 和 $l = (-g_o^2 + 3f_o^2)\,M/\mu\hbar c$ 的值，這樣從 ^{3}H 求得的值和從 ^{4}He 求得的并不一致。用這位能由三組 k 和 l 的值，計算的結果都是正值，如此則 ^{6}Li 將不能是穩定的。

本文之寫成，實賴彭桓武教授多方指導，作者特此誌謝。