中　國　物　理　學　報
第七卷第六期，475—480 頁，1950 年 12 月

# 原子核 $^6$Li 和 $^7$Li 的結合能

## 第三部　$^7$Li 結合能的計算

(近代物理研究所論文第五號)

金　星　南

(中國科學院近代物理研究所)

用第一部得到的公式，用變分方法算了 $^7$Li 的結合能。我們用的波函數雖然不一定太好，但其結果表示兩種力程的核子作用位能是比較適合的。像前文所述的 $^6$Li 一樣，在此計算其指明了兩種力程之比至少是 3 。

原子核 $^7$Li 的波函數，可用第一部的 (5) (6) 兩式表之。因 $^7$Li 的基態可能為 $^2P_{\frac{3}{2}}$[1]，故其位置部份 $\phi$ 當為

$$\phi(\overline{r_1, r_2, r_3, r_4};\ \overline{r_5, r_6, r_7}) = u\,v \exp\left(-\frac{a\lambda\rho}{\sqrt{2}}\right) \tag{1}$$

其中

$$\rho^2 = \frac{1}{14}\sum_{i,j=1}^{7} |\,r_i - r_j\,|^2 = \sum_{i=1}^{7} r_i^2 - \frac{1}{7}\left(\sum_{i=1}^{7} r_i\right)^2 \tag{2}$$

$$u = \frac{12}{7}\left(\frac{r_5+r_6+r_7}{3} - \frac{r_1+r_2+r_3+r_4}{4}\right)^2 + b\left\{\left(\frac{r_5-r_6}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{r_5+r_6-2r_7}{\sqrt{6}}\right)^2\right\} \tag{3}$$

1. 見 Rosenfeld, *Nuclear Forces* (1948) p. 370.

$$v=\sqrt{\frac{12}{7}}\left\{\frac{x_5+x_6+x_7}{3}-\frac{x_1+x_2+x_3\,x_4}{4}\right.$$
$$\left.+\,i\left(\frac{y_5+y_6+y_7}{3}-\frac{y_1+y_2+y_4}{4}\right)\right\} \tag{4}$$

$x_i$ 和 $y_i$ 爲 $\mathbf{r}_i$ 在 $x$ 軸和 $y$ 軸上的射影。參數 $a$ 和 $b$ 可由下式 $E$ 的極小值求得之，

$$E=\frac{\int\psi^*\,T\,\psi\,d\tau+\int\psi^*\,V\,\psi\,d\tau}{\int\psi^*\,\psi\,d\tau}=\frac{\hbar^2\lambda^2}{M}\,\varepsilon \tag{5}$$

其中 $\hbar^2\lambda^2/M=\mu^2c^2/M=22.8$ Mev.（介子質量 $\mu=286$ 電子質量）。

計算正化積分 $\int\psi^*\,\psi\,d\tau$ 時，把上述 (1)，(3)，(4) 三式代入第一部 (14) 式，再代以正交變換

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}&=\frac{1}{\sqrt{7}}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4+\mathbf{r}_5+\mathbf{r}_6+\mathbf{r}_7)\\
\rho_1&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\\
\rho_2&=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2-2\mathbf{r}_3)\\
\rho_3&=\frac{1}{\sqrt{12}}(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3-3\mathbf{r}_4)\\
\rho_4&=\frac{1}{\sqrt{84}}\left\{4(\mathbf{r}_5+\mathbf{r}_6+\mathbf{r}_7)-3(\mathbf{r}_1+\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_3+\mathbf{r}_4)\right\}\\
\rho_5&=\frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{r}_5-\mathbf{r}_6)\\
\rho_6&=\frac{1}{\sqrt{6}}(\mathbf{r}_5+\mathbf{r}_6-2\mathbf{r}_7)\,.
\end{aligned} \tag{6}$$

用此正變換時，我們注意 $\sum_{i=1}^{7}r_i^2=R^2+\sum_{n=1}^{6}\rho_n^2$，所以 (2) 式變成 $\rho^2=\sum_{n=1}^{6}\rho_n^2$，又注意 $d(r)=d(R)\prod_{n=1}^{6}d(\rho_n)=d(R)\,d(\rho)$。因爲 (5) 式爲一比値，

故正化積分動能積分和位能積分所共有之因子 $(4\pi)^6\int\ldots d(R)$ 可以同時略去不算。由此可得正化積分

$$\int \psi^* \psi\, d\tau = \left(\frac{1}{\sqrt{2}\, a\lambda}\right)^{24} \frac{35\cdot 23!}{2^{17}\cdot 3^2\cdot 11!}\pi^3 (49 - 56b + 40b^2) \tag{7}$$

動能積分（第一部（16）式）當為

$$\int \psi^* T \psi\, d\tau = \frac{\hbar^2 \lambda^2}{M}\cdot\frac{1}{4}a^2\int \psi^* \psi\, d\tau. \tag{8}$$

第一部 (24) 式的勢能公式中，含有 $\varphi_{12}$, $\varphi_{12}^0$, $\varphi_{56}$, $\varphi_{56}^0$ 的諸積分，我們仍用變換 (4) 化簡之。但含 $\varphi_{16}$, $\varphi_{16}^0$ 的積分我們需用另一正交變換化簡，如下：

$$\left.\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \frac{1}{\sqrt{7}}(\boldsymbol{r}_1+\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4+\boldsymbol{r}_5+\boldsymbol{r}_6+\boldsymbol{r}_7)\\
\boldsymbol{\rho}_1 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r}_1-\boldsymbol{r}_6)\\
\boldsymbol{\rho}_2 &= \frac{1}{\sqrt{238}}(\boldsymbol{r}_1-6\boldsymbol{r}_2-6\boldsymbol{r}_3-6\boldsymbol{r}_4+8\boldsymbol{r}_5+\boldsymbol{r}_6+8\boldsymbol{r}_7)\\
\boldsymbol{\rho}_3 &= \sqrt{\frac{6}{17}}\left(-\boldsymbol{r}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{r}_1+\frac{1}{3}\boldsymbol{r}_3+\frac{1}{3}\boldsymbol{r}_4+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_6+\frac{1}{2}\boldsymbol{r}_7\right)\\
\boldsymbol{\rho}_4 &= \frac{1}{\sqrt{6}}(-2\boldsymbol{r}_2+\boldsymbol{r}_3+\boldsymbol{r}_4)\\
\boldsymbol{\rho}_5 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r}_3-\boldsymbol{r}_4)\\
\boldsymbol{\rho}_6 &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\boldsymbol{r}_5-\boldsymbol{r}_7)
\end{aligned}\right\} \tag{9}$$

由此我們可以得到位能積分，如下形式

$$\begin{aligned}
\int \psi^* V \psi\, d\tau = &-\sum_{i=1}^{7} H_i(a,\lambda)\,(g^2+3f^2)\,Q_i(b)\\
&+\sum_{i=1}^{7} H_i(a_0,\lambda_0)\Big\{\left[(1+2\Delta)g_0^2-3f_0^2\right]R_i(b)\\
&-\left[\frac{(1+2)\Delta g_0^2-3f_0^2-3(1+\Delta)(g_0^2+f_0^2)}{2+\Delta}\right]S_i(b)\Big\}
\end{aligned} \tag{10}$$

此中 $a_0=a\lambda/\lambda_0$，又 $Q_i(b)$，$R_i(b)$，$S_i(b)$ 爲 $b$ 的二次式、其係數皆爲固定的數值，玆不詳述。至於 $H_i(u,v)$，係代表下列諸式

$$\left.\begin{aligned}
H_1(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{14}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{135135}I_1(u)\\
H_2(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{14}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{6235515}I_2(u)\\
H_3(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{14}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{675675}I_3(u)\\
H_4(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{14}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{2297295}I_4(u)\\
H_5(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{24}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{14549535}I_5(u)\\
H_6(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{14}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{3828825}I_6(u)\\
H_7(u,v)&=\frac{22!\,\pi^2}{2^{14}(u\,v)^{24}}\cdot\frac{v}{24249225}I_7(u)
\end{aligned}\right\}\qquad(11)$$

其中 $I_i(u)$ 爲某種固定積分，其數字值，曾由數值積分法算出，玆不詳述。

把 (7)，(8)，(10)，(11) 代入 (5)，則得 $\varepsilon$

$$\varepsilon=\varepsilon(a,b)=\frac{a^2}{4}-\frac{2^{23}\,3^4}{23\pi(49-56b+40b)^2}\sum_{i=1}^{7}c_i\Big\{I_i(a)\,p\,Q_i(b)$$

$$-\frac{\lambda}{\lambda_0}I_i(a_0)\,[q\,R_i(b)-\frac{q-(1+\triangle)t}{2+\triangle}S_i(b)]\Big\}\qquad(12)$$

式中 $p$, $q$, $t$ 爲 $g^2$, $f^2$, 等之某種組合，(見參考文獻[2])，又

$$c_1=\frac{1}{91},\quad c_2=\frac{1}{4199},\quad c_3=\frac{1}{455},\quad c_4=\frac{1}{1547},$$

$$c_5=\frac{3}{29393},\quad c_6=\frac{1}{7735},\quad c_7=\frac{9}{146965},\qquad(13)$$

因 $Q_i(b)$，$R_i(b)$，$S_i(b)$ 均爲 $b$ 的二次式，故 (12) 式可寫爲

$$\varepsilon=\varepsilon(a,b)=\frac{a^2}{4}+\frac{A+Bb+Cb^2}{49-56b+40b^2}\qquad(14)$$

$A$, $B$, $C$, 爲參數 $a$ 的函數, 其值可由 $I_i$ 及 $p$, $q$, $t$ 之數值算出。 對 $b$ 求 (14) 的極小值, 則得

$$\varepsilon = \varepsilon(a) = \frac{a^2}{4} + \xi - \frac{1}{2}\left\{\eta + \sqrt{\eta^2 + \frac{\zeta^2}{1176}}\right\} \tag{15}$$

其中

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \frac{A + 0.7B + 0.49C}{29.4} \\ \eta &= \xi - \frac{C}{40} \\ \zeta &= B + 1.4C \end{aligned}\right\} \tag{16}$$

(15) 式對 $a$ 的極小值, 則由數字計算求得之。

$a$) 兩種力程的核子作用位能[2] 命 $\Delta = 1$, 而 $\lambda/\lambda_0 = \mu/\mu_0 < 1$。 在求 $^2$H, $^3$H, $^4$He 的結合能計算中, 對不同的 $\mu/\mu_0$ 值求得了常數 $p$, $q$, $t$ (見參考文獻 2 中的第二第八兩表)。 用此諸常數, 及 $I_i$ 的值, 及 $Q_i(b)$, $R_i(b)$, $S_i(b)$ 諸式的係數, 則可計算 $A$, $B$, $C$, 再用 (16) 式可得 $\xi$, $\eta$, $\zeta$。 以 $\xi$, $\eta$, $\zeta$ 之值, 代入 (15) 式, 則得 $\varepsilon(a)$。 兹將其最小值列下, 並與實驗結果相較:

第一表 $^7$Li 的 $^2P_{3/2}$ 態之結合能

| | | |
|---|---|---|
| 計算值 | 7.5 Mev. | 假定 $\lambda/\lambda_0 = 0.3$ |
| | 4.1 Mev. | 假定 $\lambda/\lambda_0 = 0.4$ |
| 實驗值 | 40.4 Mev. | (估計 3% 之庫倫改正在內) |

$b$) 摩勒羅一森費得的核子作用位能 由以前計算 $^2$H, $^3$H, $^4$He 的結合能時所求得[3] 的 $k$, $l$, 可用以求得 $p$, $q$, $t$。 由此可算得 $\varepsilon(a)$, 所得數字均爲正數。 由此, 我們知道用此核子作用位能, $^7$Li 將爲一不穩定之原子核。

把我們計算得之 $^7$Li 的結合能與實驗所得的結果比較, 則知和實驗的結果, 相差尙多。 因在決定 $p$, $q$, $t$ 時, 我們用的變分方法是不够精確的, 以前[2] 已

2. 彭桓武, 張繼恆, 中國物理學報, 7 (1950), 339.

3. 金星南, 張繼恆, 彭桓武, 中國物理學報, 7 (1950), 324.

經假定過，關於結合能計算，$^{2}H$ 的結果當爲實驗結果的 87%，$^{3}H$ 爲實驗結果的 67%，$^{4}He$ 爲實驗結果的 63%。故在此計算中，$^{7}Li$ 的結合能當爲實驗結果的 30% 至 40%。像計算 $^{6}Li$ 的結合能時一樣，知 $\lambda/\lambda_0$ 之比值最大當爲 0.3。但 $^{7}Li$ 的結果較 $^{6}Li$ 尙差，這因爲在 $^{7}Li$ 中，自旋角動量和軌道角動量均非零而產生了旋軌作用。此作用對 $^{7}Li$ 的結合能也產生相當影響。（比 $^{7}Li$ 輕的原子核，自旋角動量或軌道角動量，兩者必有一者爲零，故此作用不致發生影響。）又最近 Avery 和 Blanchard[4] 分析得 $^{7}Li$ 的基態當爲 $D$ 態。但在目前兩種力程核子作用位能的式本身尙不十分確定，故暫時不作更精密之計算。

此工作由彭桓武先生之指導而成，特此誌謝。

4. Avery & Blanchard, Phys. Rev. 78 (1950), 704.