中 國 物 理 學 報
第七卷第六期，489—490 頁，1950 年 12 月

關於波動方程式之“超前解”

束 星 北

（浙 江 大 學 物 理 系）

波動方程式 $\Delta\psi-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2}=-4\pi\sigma(xyzt)$ 有兩不同之解答，一爲落後解

$$\psi(P,t_0)=\int_V\frac{[\sigma]}{r}dV+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left\{\frac{1}{r}\left[\frac{\partial\psi}{\partial n}\right]+\frac{1}{cr}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}\right]\frac{\partial r}{\partial n}-[\psi]\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right\}dS,$$

其方括弧內之 σ,ψ 值係在 t_0 前之時間 $t=t_0-\frac{r}{c}$，惟另一解爲

$$\bar{\psi}(P,t_0)=\int_V\frac{\{\sigma\}}{r}dV+\frac{1}{4\pi}\iint_S\left[\frac{1}{r}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial n}\right\}-\frac{1}{cr}\left\{\frac{\partial\psi}{\partial t}\right\}\frac{\partial r}{\partial n}-\{\psi\}\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS,$$

此彎括弧內之 σ,ψ 值係在 t_0 後之時間 $t=t_0+\frac{r}{c}$。後一解稱爲“超前解”因某點在 t_0 時之 ψ 值係從其以後空間內之 σ 值及其以後 ψ 在包容此空間邊緣曲面上之值計算而來。此“超前解”因認爲與因果律衝突故均置之不理。但本文內證明此“超前解”與上之“落後解”實爲一而二，二而一者。由“超前解”計算之 $\bar{\psi}$ 與“落後解”計算得之 ψ 完全相同。

將 σ,ψ 分析爲若干週期性之變化其振幅隨位置及週期而異。此“超前解”與“落後解”即可互相比較。得出結論證明此“超前解”即“落後解”。儘管計算的方法不同，兩者之結果實毫無區別。在某種問題上，如倒算以前的 ψ，此“超前解”便宜多矣。

由習慣看來，好像與事實不符，因“超前解”乃由尙未發生之 σ 與 ψ 值而算。此種尙未發生之事，可以人力轉移。如先將一保護 γ 線盒內之 ψ 量妥，再將盒上之鉛皮取消。γ 線將影響以後邊緣上之 ψ 值。此種影響將由

"超前解"倒過來影響盒內未開前之 ψ 值！或者明天的廣播我們今天就可收到！此種不可能的結論實爲以前一般不用此"解"之原因。

但是，仔細的計算證明在"超前解"內，此種影響將自動消滅。如包容面包括此以後發生之影響在內，則其包容面之超前積分與容積空間中之積分恰巧取消。如包容面不包括此發生之影響在內，則此包容面之超前積効自己對消。此結果可很簡單的看出。因此面積分可以 Green 定理換爲包容此 P 點之小球面積分。在此小球面上此"超前"之時間將較以後發生影響所需之傳播時間爲短。是以影響尚未能到達，所以積分當然爲零，再由另一方面看，此種面積分祇爲不完全之面。因在遠部分面上，此種新發生之干擾卽扣去超前之時間亦未能有值。故此面積分可變爲面上之線積分，此線在面上之無 ψ 值之處，因之此線積分之值爲零，(超前解之面轉線積分恰與落後解之面轉線 Maggi 積分相反。)

很多實際的例子可以擧出，其中並無困難，祇須注意此假設面上之 ψ 滿足波方程式，其不連續處宜設法使之連續而已，明天的廣播今天由超前解算出也是收不到！