

基于温度效应的无限长压电圆杆纵波分析

陈琼 薛春霞 王勋

Longitudinal wave analysis of infinite length piezoelectric circular rod based on temperature effect

Chen Qiong Xue Chun-Xia Wang Xun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 035201 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20200774

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200774>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

高应变率下温度对单晶铁中孔洞成核与生长影响的分子动力学研究

Molecular dynamics simulation of effect of temperature on void nucleation and growth of single crystal iron at a high strain rate

物理学报. 2019, 68(24): 246102 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190920>

PS3000-b-PAA5000球形胶束温度效应的原位小角X射线散射技术研究

Temperature dependence of spherical micelles of PS3000-b-PAA5000 studied by in-situ small angle X-ray scattering

物理学报. 2018, 67(4): 048301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172167>

磁致伸缩/压电层叠复合材料磁电效应分析

Magnetolectric effect analysis of magnetostrictive/piezoelectric laminated composites

物理学报. 2018, 67(7): 077702 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172307>

晶粒尺寸对钙钛矿型压电陶瓷压电性能的影响

Grain size effect on piezoelectric performance in perovskite-based piezoceramics

物理学报. 2020, 69(21): 217704 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201079>

高温压电材料、器件与应用

Review of high temperature piezoelectric materials, devices, and applications

物理学报. 2018, 67(20): 207701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181091>

基于磁圆二向色谱的单层MoS₂激子能量和线宽温度依赖特性

Temperature dependent excitonic transition energies and linewidths of monolayer MoS₂ probed by magnetic circular dichroism spectroscopy

物理学报. 2018, 67(14): 147801 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180615>

基于温度效应的无限长压电圆杆纵波分析*

陈琼 薛春霞[†] 王勋

(中北大学理学院工程力学系, 太原 030051)

(2020年5月21日收到; 2020年9月14日收到修改稿)

利用有限变形理论, 以无限长压电圆杆为研究对象, 考虑了在横向惯性、等效泊松比效应以及在热弹耦合共同作用下, 基于 Hamilton 原理, 并引入 Euler 方程推导出压电圆杆的纵向波动方程. 采用 Jacobi 椭圆函数展开法, 求解压电圆杆的波动方程和对应的解. 最后, 通过 Matlab 软件得到不同波速比下的色散曲线, 以及温度场对压电圆杆的波形、波幅和波数的影响曲线. 数值分析结果表明: 随着温度的升高, 波速逐渐降低, 温度场的改变可影响和控制孤立波的传播特性.

关键词: 压电圆杆, Hamilton 原理, 温度效应, 孤波

PACS: 52.35.Mw, 77.84.-s

DOI: 10.7498/aps.70.20200774

1 引言

随着现代科学技术的飞速发展, 压电材料因其独特的性能而被广泛应用^[1]. 在航空航天、智能结构等领域, 装备工作环境恶劣, 差异大, 特别是温度变化比较大, 对实施控制有着非常大的影响. 因此在实际工况条件的精确建模过程中, 需要考虑电场和温度场的耦合作用. 而杆作为常用的构件, 也吸引了不少学者的关注. 刘延柱等^[2]和 He 等^[3]利用广义热-弹耦合理论求解并研究了半无限压电杆的边值问题. 目前对于波动的问题, 主要采用多尺度法、齐次平衡法等展开了对压电圆杆波动的研究^[4,5]. 冯依虎^[6]利用泛函分析变分迭代的方法求出各次孤子波近似解, 进而研究了强非线性波动方程的行波解. Guo 等^[7]利用 Hamilton 变分原理, 根据有限变形理论的拉格朗日描述, 推导出弹性细杆的非线性波动方程, 利用多尺度法得到了稳定的行波解. 李敏等^[8]通过对薛定谔方程的相平面分析, 约化得到其同异宿轨道, 并在相应条件下得到

方程的明、暗孤立波解.

然而上述求解方法具有一定的局限性, 只能求出波动方程的冲击波解、孤波解和初等函数的周期解^[9-11]. 但采用 Jacobi 椭圆函数法便可求出波动方程的广义周期解和对应的孤立波解^[12,13], 刘志芳和张善元^[14-16]利用 Jacobi 椭圆函数展开法求得了无限长圆杆的非线性扭转波解、孤波解以及非圆截面杆的行波解、周期解.

由于压电结构在工程领域具有广泛应用, 压电介质中波的传播吸引了很多学者的关注. 邓庆田等^[17]用逐步近似法对位移函数进行了假设并通过变动参数法求解, 对压电层和圆杆中的几何非线性波进行了研究. Seadawy 和 Manafian^[18]通过扩展尝试方程法和积分方法, 推导出了磁电弹圆杆纵波方程的暗孤子、亮孤子、孤波、周期孤波、有理函数解和椭圆函数解等不同形式的新的显式精确解. Baskonus 等^[19,20]利用 Sin-gordon 展开法对磁电弹性圆杆的纵波方程的解析解进行了研究, 得到了更多新的解析解, 给出了所有解的数值模拟, 很好地解释了一些实际物理问题. Wang^[21]研究了压电

* 国家自然科学基金 (批准号: 11202190) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: xuechunxia@nuc.edu.cn

耦合圆柱壳结构中波的传播, 从理论上得到了双模壳模型的频散曲线, 推导出波数极限情况下的截止频率和相速度. Xue 和 Pan^[22] 考虑几何非线性以及横向泊松比引起的弥散效应对无限长磁电弹圆杆进行了研究, 建立了纵波方程, 并通过 Jacobi 椭圆函数法对其进行了求解. Samsonov^[23] 首先报道了杆中存在孤波的实验研究, 利用聚苯乙烯的弹性介质, 设计了一套通过光学原理构造和记录孤波实验的方法, 用全息照相法记录下了孤波轨迹, 从事实上证实了弹性固体中孤波的存在. 2013 年, Toffoli 等^[24] 在一个大的定向波池实验中探究了平面波对斜摄动的调制和有限水深下异常波动的产生, 并采集了实验数据, 对流体中的波动进行了实验探究.

综上所述, 由于非线性波的激发和观测是非常困难的, 导致实验上工作比较少. 所以本文采用建立模型和数值分析的方法, 研究不同温度场下的非线性波动问题. 通过 Hamilton 变分原理, 引入 Euler 方程, 采用 Jacobi 椭圆函数展开法, 推导出压电圆杆的波动方程和对应的解, 并讨论温度变化对压电介质的波形、波幅以及波速等的影响.

2 建立压电圆杆的波动方程

图 1 为无限长压电圆杆示意图, 建立圆柱坐标系 (r, θ, z) , z 是沿着杆的轴向, 也是波传播的方向. $\theta = [0, 2\pi]$, $0 \leq r \leq R$, 其中 R 为压电圆杆半径. 为了研究方便, 假设: 1) 变形后, 板中初始状态垂直于中心平面的点仍然垂直于中心平面; 2) 杆的截面是轴对称的, 即 $U_\theta = 0$ 和 $\partial/\partial\theta = 0$, 其中 U_θ 为 θ 方向位移; 3) 考虑泊松比效应, 纵向位移 U 和径向位移 U_r 之间满足 $U_r = v_{\text{eff}} \partial U / \partial z$, 其中 v_{eff} 是有效泊松比.

对于横观各向同性的压电材料圆杆, 在考虑温

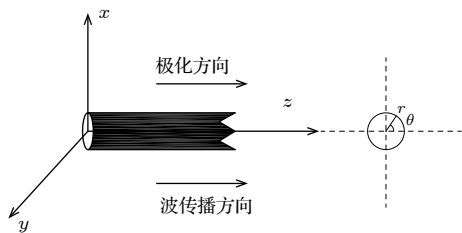


图 1 压电圆杆示意图

Fig. 1. Schematic diagram of piezoelectric rod.

度效应时的本构方程如下^[25]:

$$\begin{cases} \sigma_r = c_{11}\varepsilon_r + c_{12}\varepsilon_\theta + c_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z - \lambda_{11}\Theta, \\ \sigma_\theta = c_{12}\varepsilon_r + c_{11}\varepsilon_\theta + c_{13}\varepsilon_z - e_{31}E_z - \lambda_{11}\Theta, \\ \sigma_z = c_{13}\varepsilon_r + c_{13}\varepsilon_\theta + c_{33}\varepsilon_z - e_{33}E_z - \lambda_{33}\Theta, \\ \tau_{rz} = c_{44}\gamma_{rz} - e_{15}E_r, \\ \tau_{\theta z} = c_{44}\gamma_{\theta z} - e_{15}E_\theta, \\ \tau_{r\theta} = c_{66}\gamma_{r\theta}, \\ D_r = e_{15}\gamma_{rz} + \varepsilon_{11}E_r + d_1\Theta, \\ D_\theta = e_{15}\gamma_{\theta z} + \varepsilon_{11}E_\theta + d_1\Theta, \\ D_z = e_{31}\varepsilon_r + e_{31}\varepsilon_\theta + e_{33}\varepsilon_z + \varepsilon_{33}E_z + d_3\Theta, \end{cases} \quad (1)$$

其中 σ_i 是法向应力; τ_{ij} 是切向应力; ε_i 是法向应变; γ_{ij} 是切向应变; E_i 是电场; D_i 是电位移; c_{ij} 是弹性常数; ε_{ij} 是介电常数; e_{ij} 是压电耦合系数; d_i 是热电耦合系数; λ_{ii} 是热机耦合系数^[26,27], $\lambda_{11} = (c_{11} + c_{12} + c_{13})\alpha_1$, $\lambda_{33} = (2c_{13} + c_{33})\alpha_3$; α_i 为热膨胀系数; Θ 为相对于初始温度 T_0 的温度增量.

有限 (非线性) 弹性应变位移关系为

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial U_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta = \frac{\partial U_\theta}{r\partial\theta} + \frac{U_r}{r}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial U}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)^2, \\ \gamma_{r\theta} &= \frac{\partial U_r}{r\partial\theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial r} - \frac{U_\theta}{r}, \quad \gamma_{\theta z} = \frac{\partial U}{r\partial\theta} + \frac{\partial U_\theta}{\partial z}, \\ \gamma_{rz} &= \frac{\partial U}{\partial r} + \frac{\partial U_r}{\partial z}. \end{aligned} \quad (2)$$

由于这是一维问题, 杆的横向边界的牵引力应该为零. 因此可以得出 $\sigma_r = 0$, $\tau_{rz} = 0$, $\tau_{r\theta} = 0$, $D_r = 0$, 从中可以得到如下关系:

$$D_\theta = 0, \quad \gamma_{rz} = \gamma_{\theta z} = 0, \quad E_r = E_\theta = 0, \quad (3)$$

$$\varepsilon_r = \frac{e_{31}E_z + \lambda_{11}\Theta - c_{12}\varepsilon_\theta - c_{13}\varepsilon_z}{c_{11}}. \quad (4)$$

根据广义 Hamilton 变分原理可得

$$\delta \int_{t_0}^t \int_{z_0}^z L dz dt = \delta \int_{t_0}^t \int_{z_0}^z (T - E_P + W_e) dz dt = 0, \quad (5)$$

式中 L 为 Lagrange 密度函数, T 为系统的动能, E_P 为系统的势能, W_e 为系统的电能, 具体表达式分别为

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho dV \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} \int_V \rho dV \left(\frac{\partial U_r}{\partial t} \right)^2, \quad (6)$$

$$E_P = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{S}^T \mathbf{Q} dV, \quad (7)$$

$$W_e = \frac{1}{2} \int_V \mathbf{E}^T \mathbf{D} dV, \quad (8)$$

这里 ρ 为压电材料的密度, V 为压电材料的体积, $\mathbf{S} = \{\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \gamma_{r\theta}\}^T$ 和 $\mathbf{Q} = \{\sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{\theta z}\}^T$ 分别表示材料的应变向量和应力向量, $\mathbf{E} = \{0, 0, E_z\}^T$ 表示电场向量, $\mathbf{D} = \{0, 0, D_z\}^T$ 表示电位移向量.

根据 Euler 方程, 若 $L = L(U, U_z, U_t, U_{zz}, U_{tt}, U_{zt}, \dots)$, 则

$$\frac{\partial L}{\partial U} - \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial U_z} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial U_t} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial U_{zz}} + \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial U_{tt}} + \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \frac{\partial L}{\partial U_{zt}} - \dots = 0, \quad (9)$$

此处, $U_z = \frac{\partial U}{\partial z}, U_t = \frac{\partial U}{\partial t}, U_{zt} = \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t}, \dots$, 其余类同.

根据以上关系可以得到如下表达式:

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial L}{\partial U} = 0, \\ & \frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial L}{\partial U_z} \\ & = -\frac{1}{2}V \left[(2k_1 v_{\text{eff}}^2 + 2k_2 v_{\text{eff}}^2 + 2k_3 + k_4 + k_5) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right) \right. \\ & \quad \left. + 3 \left(\frac{1}{2}k_2 v_{\text{eff}} + k_5 \right) \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 + k_5 \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^3 \right], \\ & \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial U_t} = \rho V \frac{\partial^2 U}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial z^2} \frac{\partial L}{\partial U_{zz}} = 0, \\ & \frac{\partial^2}{\partial t^2} \frac{\partial L}{\partial U_{tt}} = \rho V \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right), \\ & \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \frac{\partial L}{\partial U_{zt}} = \rho V v_{\text{eff}}^2 \frac{\partial^2}{\partial z \partial t} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial z \partial t} \right), \end{aligned} \right. \quad (10)$$

其中

$$\begin{aligned} k_1 &= \left(c_{11} - \frac{c_{12}^2}{c_{11}} \right), \quad k_2 = 2 \left(c_{13} - \frac{c_{12}c_{13}}{c_{11}} \right), \\ k_3 &= \left(\frac{c_{13}e_{31}}{c_{11}} - e_{33} \right) E_z, \\ k_4 &= \left(\frac{c_{13}}{c_{11}} \lambda_{11} - \lambda_{33} \right) \Theta, \quad k_5 = \left(c_{33} - \frac{c_{13}^2}{c_{11}} \right). \end{aligned} \quad (11)$$

令位移梯度 $u = \frac{\partial U}{\partial z}$, 由方程 (9) 可得出压电圆杆波导的纵波运动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left(\alpha u^2 + \beta \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right), \quad (12)$$

$$\begin{aligned} c_0^2 &= \frac{k_1 v_{\text{eff}}^2 + k_3 + \frac{1}{2}k_4 + k_5}{\rho}, \\ \alpha &= \frac{3k_2 v_{\text{eff}} + 6k_5}{4\rho}, \quad \beta = v_{\text{eff}}^2 r^2, \end{aligned} \quad (13)$$

其中, c_0 是压电圆杆的线性纵向波速; α 为耗散系数, β 为弥散系数, 两者都由材料的性质和几何参数决定. 值得说明的是, 如果忽略电场、热-电耦合, 考虑纯弹性杆, 结果与文献 [16] 一致.

在推导方程 (12) 时, 使用了有效泊松比 v_{eff} [28]. 可以得到

$$\begin{aligned} v_{\text{eff}} &= -\varepsilon_r / \varepsilon_z \\ &= \frac{\varepsilon_{33} (c_{12}c_{13} + c_{11}c_{13}) - e_{31}e_{33}(c_{11} + c_{12})}{2c_{12}^2\varepsilon_{33} - 2c_{11}e_{31}^2 + c_{12}e_{31}^2 - c_{11}^2\varepsilon_{33}}. \end{aligned} \quad (14)$$

3 纵波方程的孤波解

假设方程 (12) 的行波解为

$$u = u(\xi), \quad \xi = k(z - ct), \quad (15)$$

将方程 (15) 代入方程 (12) 可以转化为一个常微分方程:

$$\beta c^2 k^2 \frac{d^4 u}{d\xi^4} - (c^2 - c_0^2) \frac{d^2 u}{d\xi^2} + \alpha \frac{d^2 u^2}{d\xi^2} = 0, \quad (16)$$

其中 k 和 c 分别是波数和波速. 用下列 Jacobi 椭圆函数表示方程 (16) 的解:

$$u(\xi) = \sum_{j=0}^n a_j \text{cn}^j \xi. \quad (17)$$

可以看出 $u(\xi)$ 的最高阶数是 n , 即

$$O(u(\xi)) = n. \quad (18)$$

为了讨论方便, 列出三种 Jacobi 椭圆函数之间的关系以及渐近值

$$\text{sn}^2 \xi + \text{cn}^2 \xi = 1, \quad \text{dn}^2 \xi + m^2 \text{sn}^2 \xi = 1, \quad (19)$$

其中 $\text{cn}\xi$ 为 Jacobi 椭圆余弦函数, $\text{dn}\xi$ 为第三类 Jacobi 椭圆函数, m 为模数 ($0 \leq m \leq 1$).

$$\frac{d}{d\xi} \text{sn}\xi = \text{cn}\xi \text{dn}\xi, \quad \frac{d}{d\xi} \text{cn}\xi = -\text{sn}\xi \text{dn}\xi,$$

$$\frac{d}{d\xi} \text{dn}\xi = -m^2 \text{sn}\xi \text{dn}\xi. \quad (20)$$

根据上述微分关系, 很容易有

$$O\left(\frac{du}{d\xi}\right) = n + 1. \quad (21)$$

类似地, 可以推出:

$$O(u^2) = 2n, \quad O\left(\frac{d^2 u}{d\xi^2}\right) = n + 2. \quad (22)$$

因此, 将方程 (16) 进一步化为

$$k^2 \frac{d^4 u}{d\xi^4} - N_1 \frac{d^2 u}{d\xi^2} + N_2 \frac{d^2 u^2}{d\xi^2} = 0, \quad (23)$$

其中

$$N_1 = \frac{c^2 - c_0^2}{\beta c^2}, \quad N_2 = \frac{\alpha}{\beta c^2}. \quad (24)$$

对 ξ 积分两次, 为计算方便, 令积分常数为零. 可以得到

$$k^2 u_{\xi\xi} - N_1 u + N_2 (u^2) = 0. \quad (25)$$

通过谐波平衡法, 使方程 (25) 中的非线性项次数和微分项最高阶数相等, 结合方程 (22) 可以确定方程 (18) 中的最高阶数 $n = 2$.

根据 Jacobi 椭圆余弦函数展开法, 方程 (17) 的解有如下表达式:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \text{cn}\xi + a_2 \text{cn}^2\xi. \quad (26)$$

方程 (26) 对 ξ 微分两次可求得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= 2a_2(1 - m^2) - a_1(1 - 2m^2)\text{cn}\xi \\ &+ 4a_2(2m^2 - 1)\text{cn}^2\xi - 2a_1 m^2 \text{cn}^3\xi \\ &- 6a_2 m^2 \text{cn}^4\xi. \end{aligned} \quad (27)$$

将方程 (26) 和方程 (27) 代入方程 (25), 并比较 $\text{cn}\xi$ 同次幂的系数, 可得

$$a_0 = \frac{N_1 - 4k^2(2m^2 - 1)}{2N_2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = \frac{6k^2 m^2}{N_2}. \quad (28)$$

因此方程 (23) 的精确周期解为

$$u(\xi) = \frac{N_1 - 4k^2(2m^2 - 1)}{2N_2} + \frac{6k^2 m^2}{N_2} \text{cn}^2(\xi, m), \quad (29)$$

其中 m 为模数 ($0 < m < 1$). 应该指出, 当 $m \rightarrow 1$ 时, $\text{cn}\xi \rightarrow \text{sech}\xi$, 于是非线性波动方程 (29) 的孤波解可以写成:

$$u(\xi) = \frac{N_1 - 4k^2}{2N_2} + \frac{6k^2}{N_2} \text{sech}^2\xi. \quad (30)$$

由于此处只讨论波的特性, 令常数项为零. 即

$$k^2 = \frac{c^2 - c_0^2}{4\beta c^2}. \quad (31)$$

将方程 (31) 代入方程 (30), 得到方程 (25) 的一个标准孤波解:

$$u(\xi) = A \text{sech}^2 \frac{z - ct}{\Lambda}, \quad (32)$$

式中 A 为波幅, Λ 是波长,

$$A = \frac{3(c^2 - c_0^2)}{2\alpha}, \quad \Lambda = \frac{2\pi}{k} = 4\pi \sqrt{\frac{c^2\beta}{c^2 - c_0^2}}, \quad (33)$$

其中 $c > c_0$ 是孤立波存在的条件.

利用 Jacobi 椭圆正弦函数展开法, 方程 (17) 的解有如下表达式:

$$u(\xi) = a_0 + a_1 \text{sn}\xi + a_2 \text{sn}^2\xi. \quad (34)$$

将方程 (34) 对 ξ 微分两次求得

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{d\xi^2} &= 2a_2 - a_1(1 + 2m^2)\text{sn}\xi - 4a_2(1 + m^2)\text{sn}^2\xi \\ &+ 2a_2 m^2 \text{sn}^3\xi + 6a_2 m^2 \text{sn}^4\xi. \end{aligned} \quad (35)$$

将方程 (34) 和方程 (35) 代入方程 (25), 并比较 $\text{sn}\xi$ 同次幂的系数, 可得

$$a_0 = \frac{4k^2(1 + m^2) + N_1}{2N_2}, \quad a_1 = 0, \quad a_2 = -\frac{6k^2 m^2}{N_2}. \quad (36)$$

因此方程 (23) 的精确周期解为

$$u(\xi) = \frac{4k^2(1 + m^2) + N_1}{2N_2} + \frac{-6k^2 m^2}{N_2} \text{sn}^2(\xi, m). \quad (37)$$

将方程 (19) 代入到方程 (37) 求得

$$u(\xi) = \frac{4k^2(1 - 2m^2) + N_1}{2N_2} + \frac{6k^2 m^2}{N_2} \text{cn}^2(\xi, m), \quad (38)$$

这就是方程 (23) 的另一个精确周期解, 可以观察到取 $m = 1$ 时, 方程 (38) 退化为与方程 (29) 同样的形式.

4 数值计算和讨论

本文通过 Matlab 软件, 对如图 1 所示的模型进行数值模拟, 取无限长压电圆杆为 BaTiO₃ 材料, 初始温度为 $T_0 = 20$ °C, 杆的半径分别为 $R_1 = 0.025$ m, $R_2 = 0.05$ m 和 $R_3 = 0.075$ m. 将这些参数代入相关方程进行计算, 通过改变温度及波速比值, 得到相应的模拟结果.

根据表 1 所列参数, 通过改变温差 Θ 的大小, 可以计算出不同温度下波速 c_0 的大小. 如表 2 所列, 可以看出, 当温差 $\Theta = 10$ °C 时, 波速 c_0 最大, 随着温度的升高, 波速 c_0 逐渐减小, 但也可以看出波速 c_0 并没有存在大幅度的衰减.

通过改变波速比 c/c_0 的大小, 可求得在不同比值下的波幅 A 、波长 Λ 和波数 k . 如表 3 所列, 可以看出, 随着波速比的增大, 波幅 A 和波数 k 增大, 而波长 Λ 随之减小. 同样地, 如表 4 所列, 固定波速比 $c/c_0 = 1.1$, 改变压电圆杆的半径, 分别取

$R_1 = 0.025$ m, $R_2 = 0.05$ m 和 $R_3 = 0.075$ m. 能够发现随着压电圆杆半径 R 的增大, 波长 λ 随之增大, 而波数 k 随之减小.

图 2 给出了在不考虑温度影响时不同波速比 c/c_0 下, 孤波波速 u 和变量 ξ 的关系. 可以看出, 当 $\xi = 0$ 时, u 达到最大值, 并且幅值关于 $\xi = 0$ 对称, 同时可以观察到, 随着 c/c_0 的增大, 孤波幅值增大, 波长减小. 简而言之, 孤波振幅越大, 波长越小, 这体现了非线性孤波的弥散特性.

表 1 钛酸钡材料参数^[29]

Table 1. Material parameters of BaTiO₃^[29].

参数	参数值	参数	参数值
$c_{11}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	166×10^9	$e_{15}/(\text{C}\cdot\text{m}^{-2})$	11.6
$c_{12}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	77×10^9	$\varepsilon_{11}/(\text{C}^2\cdot\text{N}^{-2}\cdot\text{m}^{-1})$	11.2×10^{-9}
$c_{13}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	78×10^9	$\varepsilon_{33}/(\text{C}^2\cdot\text{N}^{-2}\cdot\text{m}^{-1})$	12.9×10^{-9}
$c_{33}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	162×10^9	$d_1/(\text{C}\cdot\text{km}^{-2})$	-5.4831×10^{-6}
$c_{44}/(\text{N}\cdot\text{m}^{-2})$	43×10^9	$d_3/(\text{C}\cdot\text{km}^{-2})$	-5.4831×10^{-6}
$e_{31}/(\text{C}\cdot\text{m}^{-2})$	-4.4	$\alpha_1 = 0.5\alpha_3$	10×10^{-6}
$e_{33}/(\text{C}\cdot\text{m}^{-2})$	18.6	β_1/m^2	0.5278×10^{-4}
β_2/m^2	2.112×10^{-4}	β_3/m^2	4.7502×10^{-4}
$\alpha/(\text{N}\cdot\text{m}\cdot\text{kg}^{-1})$	3.5561×10^7	v_{eff}	0.2906
$\rho/(\text{kg}\cdot\text{m}^{-3})$	5.8×10^3		

表 2 不同温度下波速比较

Table 2. Comparison of the wave velocities at different temperature.

$\Theta/^\circ\text{C}$	$c_0/(10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1})$
10	5.4482
50	5.4367
90	5.4251

表 3 $R = 0.05$ m 时不同波速比下参数比较

Table 3. Comparison of parameters under different wave velocity ratios when $R = 0.05$ m.

c/c_0	A/m	λ/m	k
1.1	0.2567	0.5429	11.5675
1.2	0.5378	0.4092	15.3470
1.3	0.8434	0.3540	17.740

表 4 波速比 $c/c_0 = 1.1$ 时不同半径下参数比较
Table 4. Comparison of parameters under different radii when $c/c_0 = 1.1$.

R/m	A/m	k
0.025	0.2705	23.2162
0.050	0.5429	11.5675
0.075	0.8116	7.7375

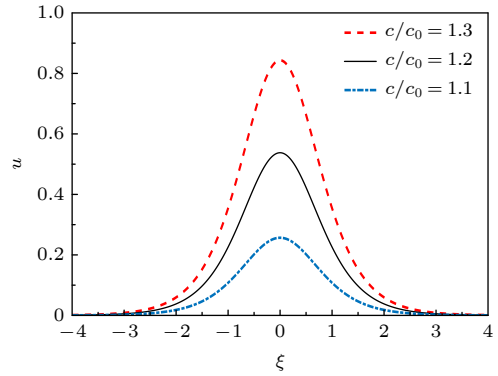


图 2 不同波速比 c/c_0 下孤波波速 u 与变量 ξ 的关系

Fig. 2. Relationship between solitary wave u and variable ξ under different wave velocity ratio c/c_0 values.

图 3 给出了在波速比 $c/c_0 = 1.3$, 时间固定在 $t = 0.01$ s 时, 当 Θ 分别取 10, 50, 90 °C 三种不同温度下的波形^[30], 观察到随着温度 Θ 的改变, 孤立波在传播过程中波形并没有发生改变, 体现了其稳定性. 同时可以看出, 当波速比 c/c_0 一定时它们的波幅非常接近, 温度的改变对波幅的影响并不是很明显, 但是随着温度的逐渐升高, 波速却逐渐降低, 这一点也与表 2 的数据相符合.

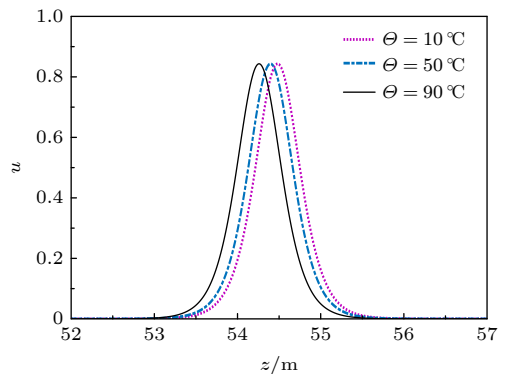


图 3 波速比 $c/c_0 = 1.3$ 时三种不同温度下的波形

Fig. 3. Three waveforms at different temperatures when the velocity ratio of $c/c_0 = 1.3$.

图 4 给出了当温差 $\Theta = 50$ °C 时, 波速比 c/c_0 分别取为 1.1, 1.2 和 1.3 时的波形, 可知, 孤立波的能量主要集中在中间有效区域, 并且没有因为波速比的改变而扩散, 体现了孤立波的稳定性. 而当温度一定时, 随着波速比 c/c_0 的升高, 波幅增大, 波长减小. 这一点与图 2 表示的孤波特性和表 3 一致.

图 5 给出了孤立波的三维曲面, 图 6 给出了压电圆杆的孤波特性和图 7 给出了压电圆杆的孤波特性. 可以看出, 当给定某一时间 t 和 z 之后, 孤立子就会出现, 这说明了孤立波不是单独关于时间或空间的单一变量, 而是以时间和空

间为组合的变量, 随着时间的变化, 波在传播. 并且相同的波形在给定 t 和 z 的组合后会重复出现, 且能量比较集中, 这与孤波的稳定性相符合. 因此它在当代通信技术、缺陷检测等许多方面有很大的研究意义和应用潜力.

图 7 给出了在三种不同温度下, 压电圆杆的波速 c 和波数 k 的关系图. 可以看出, 当温度一定时, 随着波数 k 的增加, 波速 c 也呈增加趋势, 同样地, 当波数 k 一定时, 随着温度的升高波速 c 反而呈减小趋势, 这与表 2 以及图 3 和图 4 的模拟结果相符合.

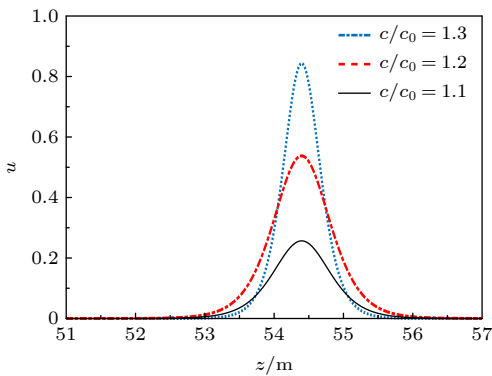


图 4 当 $\theta = 50\text{ }^\circ\text{C}$ 时不同波速比 c/c_0 下的波形
Fig. 4. Waveforms under different wave velocity ratio c/c_0 values when $\theta = 50\text{ }^\circ\text{C}$.

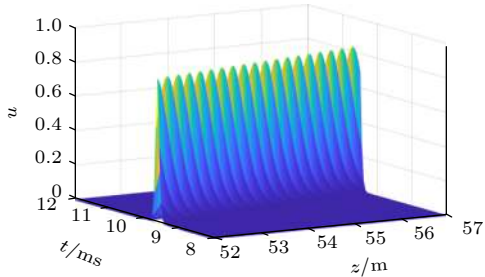


图 5 当波速比 $c/c_0 = 1.3$, $\theta = 50\text{ }^\circ\text{C}$ 时三维曲面图
Fig. 5. Three-dimensional surface figure when the wave ratio $c/c_0 = 1.3$, $\theta = 50\text{ }^\circ\text{C}$.

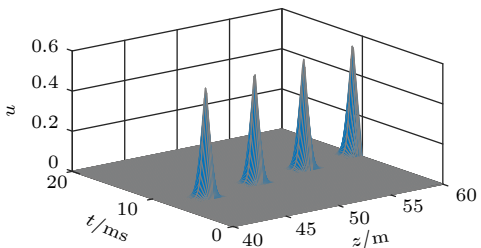


图 6 压电圆杆的孤波特性
Fig. 6. Solitariness of piezoelectric rod.

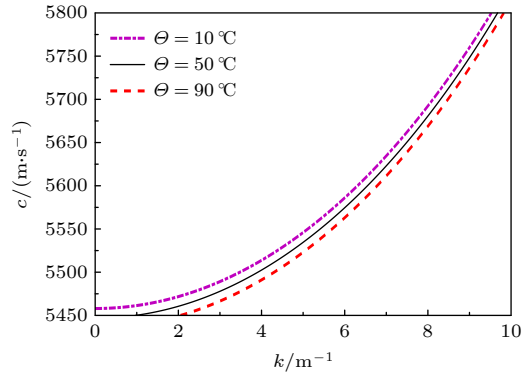


图 7 三种不同温度下波速 c 和波数 k 的关系图
Fig. 7. Graph of wave velocity c and wave number k at three different temperatures.

5 结 论

孤立波在数学上是一类非线性偏微分方程的局部行波解, 这类方程可表示为运动项+色散项+非线性项+(耗散项) = 0. 从物理本质上讲, 非线性效应使得波形在传播过程中出现陡突(能量聚集). 孤立子就是由非线性场激发的、能量不弥散的、形态上稳定的粒子. 本文研究了温度效应下无限长压电圆杆的孤波问题, 由于结构的有限变形(如轴向压缩等)可引起非线性效应, 而二次运动和变形(如横向泊松效应等)可分散这些效应. 相互作用在非线性和色散效应之间, 在一定条件下就产生了孤波这一稳定传播的行波. 利用 Hamilton 变分及 Euler 方程推导出圆杆的波动方程, 并采用 Jacobi 椭圆余弦函数展开法和椭圆正弦函数展开法对推导出的波动方程进行求解. 通过 Matlab 软件进行数值模拟, 发现压电圆杆中不仅有孤波存在, 而且在不同温度下具有不同的性质. 可以得到如下结论:

1) 由计算结果可分析得到, 当固定波速比时, 温度的改变对波速的影响比较明显, 随着温度的升高, 波速逐渐降低.

2) 当固定温度时, 波速比的改变对孤波的幅值影响比较明显, 随着波速比的增大, 波幅逐渐升高, 这也是孤波的特点之一.

3) 温度的改变虽然对孤立波有一定的影响, 但在传播的过程中, 孤立波仍然是关于 ξ 对称的钟型波, 这也体现了非线性和色散效应共同作用下孤立波的稳定特性. 另外, 利用 Jacobi 椭圆函数求解得到压电圆杆的精确周期解, 周期解可退化为孤波解, 从理论上也证明了压电圆杆中可能有稳定传播

的孤波. 目前, 波动理论在结构的无损检测和提高信息传输质量等方面得到了较为广泛的应用. 因此, 将波动理论运用到压电材料中具有现实工程意义和理论研究价值.

参考文献

- [1] Janshoff A, Steinem C, Galla H J 2000 *Angew. Chem. Int. Ed.* **39** 4004
- [2] Liu Y Z, Xue Y, Chen L Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **53** 2424 (in Chinese) [刘延柱, 薛纭, 陈立群 2004 物理学报 **53** 2424]
- [3] He T H, Tian X G, Shen Y P 2002 *Int. J. Eng. Sci.* **40** 1081
- [4] Fan E G 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1409 (in Chinese) [范恩贵 2000 物理学报 **49** 1409]
- [5] Li X Z, Zhang W G, Yuan S L 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 744 (in Chinese) [李向正, 张卫国, 原三领 2010 物理学报 **59** 744]
- [6] Feng Y H 2019 *Appl. Math. Mech.* **40** 1 (in Chinese) [冯依虎 2019 应用力学与数学 **40** 1]
- [7] Guo J G, Zhou L J, Zhang S Y 2005 *Appl. Math. Mech.* **26** 667
- [8] Li M, Wang B T, Xu T, Shui J J 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 010502 (in Chinese) [李敏, 王博婷, 许韬, 水涓涓 2020 物理学报 **69** 010502]
- [9] Li Z B, Pan S Q 2004 *Acta Phys. Sin.* **50** 402 (in Chinese) [李志斌, 潘素起 2004 物理学报 **50** 402]
- [10] Xia T C, Li B, Zhang H Q 2001 *Appl. Math. E-Notes* **1** 139
- [11] Qian C, Wang L L, Zhang J F 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064214 (in Chinese) [钱存, 王亮亮, 张解放 2011 物理学报 **60** 064214]
- [12] Liu S D, Fu Z T, Liu S K, Zhao Q 2002 *Acta Phys. Sin.* **51** 718 (in Chinese) [刘式达, 傅遵涛, 刘式适, 赵强 2002 物理学报 **51** 718]
- [13] Zhang S Y, Zhang W 1987 *Acta Mech. Sin.* **3** 64
- [14] Liu Z F, Zhang S Y 2007 *Acta Mech. Solid. Sin.* **28** 55 (in Chinese) [刘志芳, 张善元 2007 固体力学学报 **28** 55]
- [15] Liu Z F, Zhang S Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 628 (in Chinese) [刘志芳, 张善元 2006 物理学报 **55** 628]
- [16] Liu Z F, Zhang S Y 2006 *Appl. Math. Mech.* **27** 1431
- [17] Deng Q T, Luo S N, Peng L 2009 *Chin. J. Appl. Mech.* **26** 519 (in Chinese) [邓庆田, 罗松南, 彭亮 2009 应用力学学报 **26** 519]
- [18] Seadawy A R, Manafian J 2018 *Results Phys.* **8** 1158
- [19] Baskonus H M, Bulut H, Atangana A 2016 *Smart Mater. Struct.* **25** 035022
- [20] Bulut H, Sulaiman T A, Baskonus H M 2018 *Opt. Quantum. Electron.* **50** 2
- [21] Wang Q 2001 *Int. J. Solids. Struct.* **38** 8207
- [22] Xue C X, Pan E 2013 *Int. J. Eng. Sci.* **62** 48
- [23] Samsonov A M 2001 *Strain Solitons in Solids and How to Construct Them* (New York: Chapman and Hall/CRC) p111
- [24] Toffoli T, Fernandez L, Monbaliu J, Benoit M, Gagnaire-Renou E, Lefèvre J M, Cavaleri L, Proment D, Pakozdi C, Stansberg C T, Waseda T, Onorato M 2013 *Phys. Fluids* **25** 091701
- [25] Ansari R, Oskouie F M, Gholami R, Sadeghi F 2016 *Compos. Part B-Eng.* **89** 316
- [26] Ootao Y, Tanigawa Y 2000 *Int. J. Eng. Sci.* **38** 47
- [27] Shiv P J 1992 *Smart Mater. Struct.* **1** 80
- [28] Xue C X, Pan E, Zhang S Y 2011 *Smart Mater. Struct.* **20** 105010
- [29] Chang R D 2014 *M. S. Thesis* (Hunan: Xiangtan University) (in Chinese) [常瑞鼎 2014 硕士学位论文 (湘潭: 湘潭大学)]
- [30] Jaffe B (translated by Lin S H) 1976 *Piezoelectric Ceramics* (Beijing: Science Press) pp125–145 (in Chinese) [贾菲B 著 (林声和 译) 1976 压电陶瓷 (北京: 科学出版社)第125—145页]

Longitudinal wave analysis of infinite length piezoelectric circular rod based on temperature effect*

Chen Qiong Xue Chun-Xia[†] Wang Xun

(*Department of Engineering Mechanics, School of Science, North University of China, Taiyuan 030051, China*)

(Received 21 May 2020; revised manuscript received 14 September 2020)

Abstract

Piezoelectric elements have been commonly used because of their wide applications in sensors, transducers, and some micro intelligent structures. However, in the fields of aviation, aerospace, and automation, some relevant equipment works in a harsh environment and is susceptible to the temperature change, thereby leading its performances to be greatly affected. Therefore, the problem of nonlinear wave relating to piezoelectric circular rods in different temperature fields is studied by modeling and numerical analysis. Firstly, based on the theory of finite deformation, we take infinite piezoelectric circular rod as a research object and consider the effects of transverse inertia and equivalent Poisson's ratio under the thermoelectric coupling action. Using the Hamilton principle and introducing the Euler equation, the longitudinal wave equation of piezoelectric circular rod is obtained. Secondly, Jacobi elliptic cosine function and Jacobi elliptic sine function expansion method are used to solve the wave equation of the piezoelectric circular rod, and the solitary wave solution and the exact periodic solution of the wave equation are obtained. It is found that the periodic solution can be reduced into a solitary wave solution under certain conditions, and it is proved theoretically that there may be solitary wave stably propagating in a piezoelectric circular rod. Finally, the dispersion curves of different wave velocity ratios and the curves about influences of temperature field on the waveform, amplitude and wave number of the piezoelectric rod are obtained by Matlab. The numerical results show that the wave velocity decreases with the increase of temperature when the wave velocity ratio is constant. Given the temperature is constant, it can be found that with the increase of the ratio, the amplitude of solitary wave gradually increases while the wavelength gradually decreases. In addition, the images obtained show that although temperature change can cause the characteristics of solitary waves to change, the solitary waves are always symmetrical bell shaped waves in the propagation process, reflecting the stability characteristics under the combined action of nonlinear and dispersion effects. Therefore, the variation of temperature field can influence and control some propagation characteristics of solitary waves. Moreover, the wave theory has been widely used in the nondestructive testing of structures and the improving of information transmission quality due to its special stability.

Keywords: piezoelectric rod, Hamilton principle, temperature effect, solitary wave

PACS: 52.35.Mw, 77.84.-s

DOI: [10.7498/aps.70.20200774](https://doi.org/10.7498/aps.70.20200774)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11202190).

[†] Corresponding author. E-mail: xuechunxia@nuc.edu.cn