



磁场中拓扑物态的量子输运

强晓斌 卢海舟

Quantum transport in topological matters under magnetic fields

Qiang Xiao-Bin Lu Hai-Zhou

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 027201 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20200914

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200914>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

拓扑半金属ZrSiSe器件中面内霍尔效应的观测

Observation of planar Hall effect in topological semimetal ZrSiSe device

物理学报. 2019, 68(22): 227203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191501>

拓扑半金属材料角分辨光电子能谱研究进展

Progress of ARPES study on topological semimetals

物理学报. 2019, 68(22): 227102 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191544>

三重简并拓扑半金属磷化钼的时间分辨超快动力学

Time-resolved ultrafast dynamics in triple degenerate topological semimetal molybdenum phosphide

物理学报. 2020, 69(7): 077801 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191816>

拓扑材料中的超导

Superconductivity in topological materials

物理学报. 2020, 69(2): 020301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191627>

基于金刚石氮-空位色心的精密磁测量

High-resolution magnetometry based on nitrogen-vacancy centers in diamond

物理学报. 2018, 67(16): 167601 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181084>

拓扑半金属材料的单晶生长研究进展

Research progress of single crystal growth for topological semimetals

物理学报. 2018, 67(12): 128102 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180796>

特邀综述

磁场中拓扑物态的量子输运*

强晓斌¹⁾²⁾ 卢海舟^{1)2)†}

1) (南方科技大学物理系, 深圳量子科学与工程研究院, 深圳 518055)

2) (深圳市量子科学与工程重点实验室, 深圳 518055)

(2020年6月15日收到; 2020年7月29日收到修改稿)

拓扑物态包括拓扑绝缘体、拓扑半金属以及拓扑超导体. 拓扑物态奇异的能带结构以及受拓扑保护的新奇表面态, 使其具有了独特的输运性质. 拓扑半金属作为物质的一种三维拓扑态具有无能隙的准粒子激发, 根据导带和价带的接触类型分为外尔半金属、狄拉克半金属和节线半金属. 本文以拓扑半金属为主回顾了在不同磁场下拓扑物态中量子输运的最新工作, 在不同的磁场范围内分别给出了描述拓扑物态输运行为的主要理论.

关键词: 拓扑半金属, 磁阻, 霍尔效应, 量子极限

PACS: 72.25.-b, 75.47.-m, 78.40.Kc

DOI: 10.7498/aps.70.20200914

1 引言

拓扑半金属的导带和价带在节点(节线)处接触^[1,2], 节点处低能激发的准粒子(外尔/狄拉克费米子)具有线性的能带色散关系, 非常类似于三维(3D)的石墨烯模型. 大量的理论^[3-13]和实验观测^[14-25]均给出了相关材料存在的证据.

拓扑物态由于具有独特的能带结构和表面态行为导致了許多新颖的输运现象^[26-68]. 本文基于在 *Front. Phys.* 发表的两篇论文^[69,70], 以拓扑半金属为主回顾了有关拓扑物态中量子输运的最新工作^[71-87], 相关的综述文章也可以参考^[88-93]. 依据磁场强度的大小本文的结构安排如下: 第2节, 介绍用于描述外尔、狄拉克、节线半金属及拓扑绝缘体的相关模型; 第3节, 介绍非线性霍尔效应的最新进展, 并给出半导体-超导体纳米线中马约拉纳振荡的理论描述; 第4节, 总结拓扑半金属和拓扑绝缘体中的弱局域化和弱反局域化理论; 第5节,

给出贝里曲率与负磁阻之间的关系, 介绍平面霍尔效应的最新工作; 第6节, 讨论拓扑半金属中量子振荡的相移规则, 给出两种实现3D量子霍尔效应的新机制; 第7节, 总结量子极限下的输运理论, 包括背散射禁止导致的电阻下降, 外尔费米子的湮灭, 外尔半金属中的不饱和磁化现象, 以及反常热电行为; 第8节给出评论和展望.

2 有效模型

2.1 外尔半金属

外尔半金属的最小模型为^[94]

$$H = A(k_x \sigma_x + k_y \sigma_y) + M(k_w^2 - k^2) \sigma_z, \quad (1)$$

其中 $\sigma_{x,y,z}$ 是泡利矩阵, $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 是波矢, A , M , k_w 是模型参数. 两个能带在 $(0, 0, \pm k_w)$ 处相交(图1).

在两个节点 $(0, 0, \pm k_w)$ 附近, H 约化为两个独立的局部模型

$$H_{\pm} = M_{\pm} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (2)$$

* 国家重点基础研究发展计划(批准号: 2016YFA0301700)、国家自然科学基金(批准号: 11925402)、广东省自然科学基金(批准号: 2016ZT06D348)和深圳市科学技术创新委员会(批准号: ZDSYS20170303165926217, JCYJ20170412152620376)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: luhz@sustech.edu.cn



卢海舟, 2007年在清华大学高等研究院获博士学位. 同年赴香港大学做博士后研究, 2012年晋升为研究助理教授. 2015年加入南方科技大学, 现为物理系和深圳量子科学与工程研究院教授. 主要从事凝聚态物理, 特别是量子输运理论的研究. 研究兴趣集中在利用量子场论方法研究拓扑和新奇材料中的量子态和量子输运. 系统地研究了二维和三维狄拉克电子的量子输运行为, 并应用于拓扑绝缘体/半金属/超导体, 二维层状材料等. 研究过的物理效应包括弱局域化、奇异负磁阻、量子振荡、强磁场量子极限、各类霍尔效应等, 在拓扑半金属中提出了三维量子霍尔效应的一种基于费米弧的新机制, 多个理论工作被实验广泛支持和应用.

其中 $M_{\pm} = (A\tilde{k}_x, A\tilde{k}_y, \mp 2Mk_w\tilde{k}_z)$, $(\tilde{k}_x, \tilde{k}_y, \tilde{k}_z)$ 为外尔点处的有效波矢. (2) 式同时定义了具有相反手性的两种外尔费米子^[94], 对于单一手性粒子, 自旋与动量严格相关. 对于无能隙的外尔费米子, 手性即螺旋度可以定义为 $h = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma} / p$, 其具有 ± 1 两个本征值.

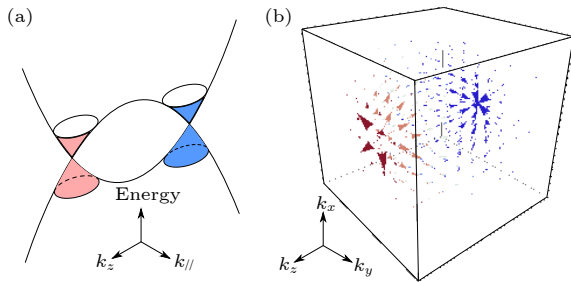


图1 拓扑半金属的能带结构和贝里曲率 (a) 拓扑半金属的能谱示意图, (k_x, k_y, k_z) 为波矢, $k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2$; (b) 贝里曲率矢量场, 拓扑半金属的导带和价带在外尔点处接触, 且在该处存在一对单极子. 转载自文献^[56]

Fig. 1. The band structure and Berry curvature of the topological semimetal: (a) The energy spectrum of a topological semimetal, (k_x, k_y, k_z) is the wave vector, $k_{\parallel}^2 = k_x^2 + k_y^2$; (b) the vector field of the Berry curvature. The conduction and valence bands of a topological semimetal touch at the Weyl nodes, and there is a pair of monopoles. Reproduced with permission from Ref. ^[56].

贝里曲率^[95] $\Omega(\mathbf{k}) = \nabla_{\mathbf{k}} \times \mathbf{A}(\mathbf{k})$ 可以给出体系的拓扑性质, 其中 $\mathbf{A}(\mathbf{k}) = i \langle u(\mathbf{k}) | \nabla_{\mathbf{k}} | u(\mathbf{k}) \rangle$ 为贝里联络. 对于外尔半金属的+能带 $|u(\mathbf{k})\rangle = [\cos(\theta/2), \sin(\theta/2)e^{i\varphi}]^T$ (其中 $\cos \theta \equiv \mathcal{M}_{\mathbf{k}}/E_+$, $\tan \varphi \equiv k_y/k_x$). 对单个外尔点做曲面积分, 结果表明在 $\pm k_w$ 处产生了符号相反的拓扑荷 $\mp \text{sgn}(M)$, 对应动量空间中的一对“磁单极子”.

在离散情况下, 陈数定义为在任意可定向闭曲面上正方格子的贝里曲率通量之和^[96]. 这里取具有轮胎面拓扑结构的连续参数空间, 原因是某些物理参数空间实际上确实具有这种拓扑结构, 且对应的陈数具有物理意义. 对于2D晶格的布里渊区, 其中晶格动量 (k_x, k_y) , $(k_x + 2\pi, k_y)$ 及 $(k_x, k_y + 2\pi)$ 是等价的. 自然地, 连续情况下对贝里曲率通量的求和被整个参数空间 \mathcal{P} 上对贝里曲率的面积分所代替

$$n_c = -\frac{1}{2\pi} \int_{\mathcal{P}} \Omega dk_x dk_y, \quad (3)$$

由于其可以解释为离散陈数的连续极限, 所以(3)式具有和离散陈数相同的性质, 即连续陈数是一个规范不变的整数.

对于外尔半金属, 若给定 k_z , 陈数可以表征 k_x - k_y 平面上的拓扑性质^[97],

$$n_c(k_z) = -\frac{1}{2} \left\{ \text{sgn}[M(k_w^2 - k_z^2)] + \text{sgn}(M) \right\}, \quad (4)$$

当 $-k_w < k_z < k_w$ 时, 陈数 $n_c(k_z) = -\text{sgn}(M)$, 否则 $n_c(k_z) = 0$ ^[4]. 根据体边对应关系, 非零陈数对应于与 k_z 相关的一组边界态(费米弧)^[4].

为了得到费米弧表面态的解, 在 $y=0$ 处应用开放边界条件, 得到表面态的色散^[76,94]

$$E_{\text{arc}}(k_x, k_z) = \text{sgn}(M) A k_x, \quad (5)$$

对应的波函数^[98,99]

$$\Psi_{k_x, k_z}^{\text{arc}}(\mathbf{r}) = C e^{ik_x x + ik_z z} \begin{bmatrix} \text{sgn}(M) \\ 1 \end{bmatrix} (e^{\lambda_1 y} - e^{\lambda_2 y}), \quad (6)$$

C 为归一化因子, $\lambda_{1,2} = \frac{A}{2|M|} \mp \sqrt{(A/2M)^2 - \Delta_k}$, $\Delta_k = k_w^2 - k_x^2 - k_z^2$. 存在费米弧时有 $\lambda_1 \lambda_2 > 0$, 因此 $\Delta_k > 0$, 所以费米弧表面态的解严格限制在一个圆内 $k_x^2 + k_z^2 < k_w^2$.

外尔半金属的单节点有效模型为

$$H = v \mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}, \quad (7)$$

该模型等价于方程(2). 价带的旋量波函数

$$|u_+(k, \theta, \varphi)\rangle = \begin{bmatrix} \sin \frac{\theta}{2} \\ -\cos \frac{\theta}{2} e^{i\varphi} \end{bmatrix}, \quad (8)$$

其中 $\cos \theta \equiv k_z/k$, $k = \sqrt{k_x^2 + k_y^2 + k_z^2}$, 得到贝里联络为 $\mathbf{A} = (0, 0, \cos^2(\theta/2)/(k \sin \theta))$. 由此得到贝里曲率为 $-1/(2k^2) \hat{e}_k$, 求得单极子荷 $\mathcal{N} = -1$. 在另一个手性相反的外尔点处, 有效哈密顿量 $H =$

$-v\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma}$, 单极子荷为 1. 因此, 对于双节点模型总单极子荷为零 [26].

在 z 方向的磁场中, 外尔半金属的能谱被量子化为一组沿 k_z 色散的一维 (1D) 朗道能带 (图 2(a)). 考虑沿 z 方向施加磁场 $\mathbf{B} = (0, 0, B)$, 选择朗道规范 $\mathbf{A} = (-yB, 0, 0)$. 得到本征能量为 [74,100–102]

$$\begin{aligned} E_{k_z}^{\nu\pm} &= \omega/2 \pm \sqrt{\mathcal{M}_\nu^2 + \nu\eta^2}, \quad \nu \geq 1, \\ E_{k_z}^0 &= \omega/2 - M_0 + M_1 k_z^2, \quad \nu = 0, \end{aligned} \quad (9)$$

其中 $\omega = 2M/l_B^2$, $\eta = \sqrt{2A}/l_B$, 磁长度定义为 $l_B = \sqrt{\hbar/(e|B|)}$. 由于色散关系不是 k_x 的显函数, 不同的 k_x 代表了单位 x - y 平面内的朗道简并度 $N_L = 1/(2\pi l_B^2) = eB/h$.

2.2 狄拉克半金属

对于狄拉克半金属, 由于时间反演和反演对称性的保护, 狄拉克点是多重简并的 [8]. 其模型可以用方程 (1) 中的 $H(\mathbf{k})$ 及其时间反演 $H^*(-\mathbf{k})$ 描述 [60,61,103–105], 其中星号表示复共轭. 一个简单的模型如下 [76]:

$$\mathbf{H} = A(k_x\boldsymbol{\alpha}_x + k_y\boldsymbol{\alpha}_y) + M(k_w^2 - k^2)\boldsymbol{\beta}, \quad (10)$$

其中狄拉克矩阵为 $\boldsymbol{\alpha}_x = \boldsymbol{\sigma}_x \otimes \boldsymbol{\sigma}_x$, $\boldsymbol{\alpha}_y = \boldsymbol{\sigma}_x \otimes \boldsymbol{\sigma}_y$, $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \boldsymbol{\sigma}_0$, $\boldsymbol{\sigma}_0$ 是 2×2 的单位矩阵. \hat{z} 方向的面态由两个具有相反自旋和相反有效速度的分支组成. 通过么正变换将模型写成对角形式

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H(\mathbf{k}) & 0 \\ 0 & H^*(-\mathbf{k}) \end{bmatrix}, \quad (11)$$

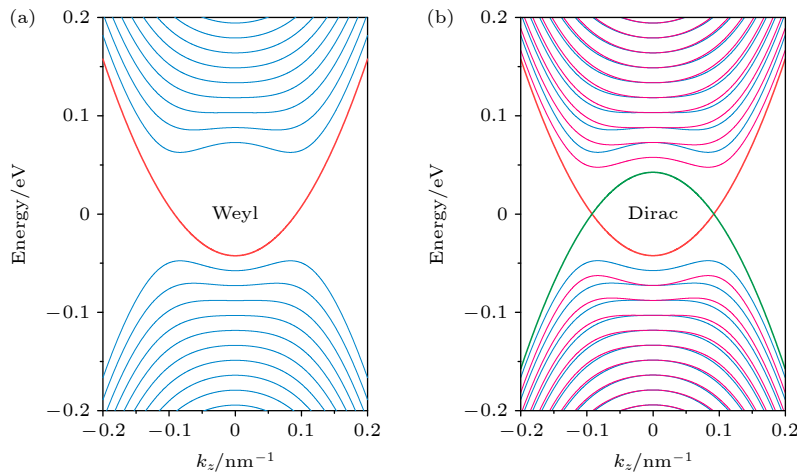


图 2 在沿 z 方向的磁场 B 下, 外尔和狄拉克半金属的最小模型中沿 k_z 色散的朗道能带. 转载自文献 [74]

Fig. 2. The Landau energy bands along the k_z dispersion in the minimum model of Weyl and Dirac semimetals under the magnetic field B along the z direction. Reproduced with permission from Ref.[74].

狄拉克点是四重简并的 [94], 对于特定的 k_z 两个狄拉克点之间存在拓扑不变量, 根据体边对应关系, 每个陈数对应一个边界态, 两个节点之间存在关于 k_z 的一组边界态. 这些边界态的色散构成了在费米面附近连接狄拉克点的费米弧, 这是拓扑狄拉克半金属的关键特征之一.

2.3 双外尔半金属

外尔半金属中的每个外尔点都具有 1 或 -1 的单极子荷. 在双外尔半金属中, 单极子荷为 2 或 -2 [6,106,107]. 对于外尔半金属或双外尔半金属的单能谷, 最小模型为

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \chi v_z \hbar k_z & v_{//} (\hbar k_+)^{\mathcal{N}} \\ v_{//} (\hbar k_-)^{\mathcal{N}} & -\chi v_z \hbar k_z \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中 $k_{\pm} = k_x \pm ik_y$, $\chi = \pm 1$ 是能谷指标, \mathbf{k} 为外尔点处的动量. $\mathcal{N} = 1, 2$ 分别对应单和双外尔半金属. 色散关系为 $E_{\mathbf{k}} = \pm \sqrt{v_z^2 \hbar^2 k_z^2 + v_{//}^2 (\hbar^2 k_x^2 + \hbar^2 k_y^2)^{\mathcal{N}}}$. 在能谷 $\chi = +1$ 处导带的本征态为

$$|\mathbf{k}\rangle = \begin{bmatrix} \cos(\theta/2) \\ \sin(\theta/2) \exp(-i\mathcal{N}\varphi) \end{bmatrix}, \quad (13)$$

其中 $\cos \theta \equiv v_z k_z / E_{\mathbf{k}}$, $\tan \varphi \equiv k_y / k_x$. 通过在包围外尔点的任意费米球 Σ 上对贝里曲率积分得到单极子荷

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\Sigma} d\mathbf{S} \cdot \boldsymbol{\Omega} = \pm \mathcal{N}, \quad (14)$$

等式右边 \pm 对应 \pm 能谷.

2.4 拓扑节线半金属

节线半金属 [108–111] 的导带和价带在动量空间交叉形成一个闭合环 [112–115], 并形成类似鼓形的表面态 [116,117]. 当对称性破缺时, 节线半金属可能变为狄拉克半金属, 拓扑绝缘体或表面陈绝缘体 [118]. 理论预测了不少存在这种奇异拓扑性质的材料 [119–139], 部分已被实验观测所证实 [140–146].

节线半金属可以用一个双能带有效模型来描述 [147],

$$\mathbf{H} = \hbar\lambda(k_x^2 + k_y^2 - k_0^2)\boldsymbol{\tau}_x + \hbar vk_z\boldsymbol{\tau}_y, \quad (15)$$

其中 $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$ 是波矢, $\boldsymbol{\tau}_{x,y}$ 对应于双带隙自旋空间的泡利矩阵, 两个带在 $k_x^2 + k_y^2 = k_0^2$ 以及 $k_z = 0$ 时相交. 如果费米能满足 $E_F \ll \hbar\lambda k_0^2$, 通过变量代换 $k_x = (k_0 + \kappa \cos \varphi)\cos\theta$, $k_y = (k_0 + \kappa \cos \varphi)\sin\theta$, $k_z = \kappa \sin \varphi / \alpha$ (其中 $v_0 = 2\lambda k_0$, $\alpha = v/v_0$, v 和 v_0 分别为沿着 z 方向和 $x-y$ 平面内的有效速度), 哈密顿量 (15) 式可以线性化为更为简单的形式:

$$\mathbf{H} = \hbar v_0 \kappa (\cos \varphi \boldsymbol{\tau}_x + \sin \varphi \boldsymbol{\tau}_y). \quad (16)$$

导带的色散为 $\varepsilon_k = \hbar v_0 \kappa$, κ 为轮胎状费米面的小圆半径, 费米能以下的态密度为 $\rho_0 = \mathcal{K} E_F / (\alpha \hbar^2 v_0^2)$, 其中 $\mathcal{K} = 2\pi k_0$ 为节线环的周长.

对于更一般的四带模型, 节线半金属的哈密顿量可以进一步写为 [124,143]

$$\mathbf{H} = \{ [\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/2m - u] \boldsymbol{\tau}_3 + \lambda k_z \boldsymbol{\tau}_1 \} \otimes \boldsymbol{\sigma}_0, \quad (17)$$

其中 λ , m , 和 u 是模型参数 [124,143]. 哈密顿量的本征值为 $E_{\pm} = \pm \sqrt{[\hbar^2(k_x^2 + k_y^2)/(2m) - u]^2 + \lambda^2 k_z^2}$. 当 u 为正时, 两个能带在零能处相交, 其半径为 $\sqrt{2mu}/\hbar$. 当 $E_F < u$ 时 (对应于载流子密度较低的情况 [140,141]), 费米面形成一个轮胎面, 当 $E_F > u$ 时, 费米面演化成鼓状结构. 模型 (17) 式具有镜面反射对称性 [124,143], 除此之外, 节线也可由其他对称性保护 [110,113,121,123,140,141,148].

2.5 拓扑绝缘体

3D 拓扑绝缘体可以用 $\mathbf{k} \cdot \mathbf{p}$ 哈密顿量来描述 [94,149,150]:

$$\mathbf{H}_0 = \mathbf{C}_k + \begin{bmatrix} M_k & 0 & iV_n k_z & -iV_{\perp} k_{-} \\ 0 & M_k & iV_{\perp} k_{+} & iV_n k_z \\ -iV_n k_z & -iV_{\perp} k_{-} & -M_k & 0 \\ iV_{\perp} k_{+} & -iV_n k_z & 0 & -M_k \end{bmatrix}, \quad (18)$$

其中 $M_k = M_0 + M_{\perp}(k_x^2 + k_y^2) + M_z k_z^2$, $C_k = C_0 + C_{\perp}(k_x^2 + k_y^2) + C_z k_z^2$, C_i , M_i 和 V_i 是模型参数. 当 $M_0 M_{\perp} < 0$, $M_0 M_z < 0$ 时该模型描述 3D 强拓扑绝缘体 [94]. 该模型能有效地描述拓扑表面态 [97,98,151] 并解释拓扑绝缘体中的负磁阻现象 [80,152–155].

对于本征磁性拓扑绝缘体, 例如 MnBi_2Te_3 , 具有面外反铁磁序, 需要额外引入 [156]

$$\mathbf{H}_X = -m_0 \sin^n \left(\frac{\pi}{d} z \right) \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \boldsymbol{\tau}_0, \quad (19)$$

其中 m_0 是层内反铁磁序的强度, d 是 MnBi_2Te_3 样品 7 元层的厚度, $\boldsymbol{\tau}_0$ 是 2×2 的单位矩阵, 这一模型可以解析求解, 为理解其他的本征磁性拓扑物态提供理论基础.

3 零磁场

3.1 非线性霍尔效应

霍尔效应由于本质上与对称和拓扑的深刻联系 [95,157] 已然成为凝聚态物理的基本研究范式. 所有已知的可测霍尔效应都需要磁场或磁性掺杂来破缺时间反演对称性 [157–159]. 最近, 通过测量霍尔电导的零频或倍频分量对低频驱动电场的响应 (图 3) 发现了一种新的霍尔效应 [160], 即非线性霍尔效应, 其特别之处在于不需要破缺时间反演对称性, 而是破缺反演对称性. 这一新现象的发现为探索新奇物态的对称性和拓扑性质开辟了新的途径. 在文献 [82] 中, 我们研究了非线性霍尔效应和二维 (2D) 系统能带特征之间的关系. 由于非线性霍尔响应与贝里偶极子相关 [160], 通过分析倾斜有质量狄拉克费米子的一般模型, 我们发现倾斜能带在反交叉和能带反转附近存在非常强的贝里偶极子, 可以给出明显的非线性霍尔信号.

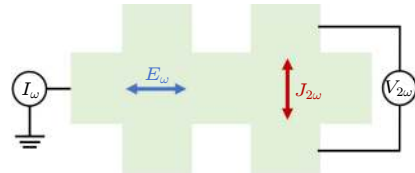


图 3 测量非线性霍尔效应的示意图. 转载自文献 [82]
Fig. 3. Schematic of how to measure the nonlinear Hall effect. Reproduced with permission from Ref. [82].

当施加一个振荡电场 $E(t) = \text{Re}\{\mathcal{E}e^{i\omega t}\}$ 时, 响应电场的电流可以分解为直流分量和倍频分量 $J_a = \text{Re}\{J_a^{(0)} + J_a^{(2)}e^{i2\omega t}\}$, 这里 $J_a^{(0)} = \chi_{abc}^{(0)}\varepsilon_b\varepsilon_c^*$ 和 $J_a^{(2)} = \chi_{abc}^{(2)}\varepsilon_b\varepsilon_c$. 对于时间反演对称的系统, 非线性

霍尔系数为^[160]

$$\chi_{abc}^{(0)} = \chi_{abc}^{(2)} = \varepsilon^{acd} D_{bd} e^3 \tau / [2\hbar^2 (1 + i\omega\tau)], \quad (20)$$

其中 e 为电子电量, τ 为动量弛豫时间, 在一般实验条件下 $\omega\tau \ll 1$ 可忽略. 贝里偶极子定义为

$$D_{bd} = - \sum_i \int \frac{d^d k}{(2\pi)^d} \frac{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^i}{\partial k_b} \Omega_{i\mathbf{k}}^d \frac{\partial f_{eq}}{\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^i}, \quad (21)$$

其中 ε_{abc} 为全反对称张量, $a, b, c, d \in \{x, y, z\}$, f_{eq} 为费米分布函数, $\Omega_{i\mathbf{k}}^a$ 为贝里曲率. 注意在时间反演下 $\Omega_i^a(-\mathbf{k}) = -\Omega_i^a(\mathbf{k})$ 以及 $\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^i / \partial (-k_b) = -\partial \epsilon_{\mathbf{k}}^i / \partial k_b$, 即 (21) 式在时间反演对称的体系中不为 0.

由 (21) 式知, 为了给出不为 0 的贝里偶极子, 需要各向异性的能带结构, 通过在 2D 有质量狄拉克模型^[94] 中引入倾斜项来实现这一点,

$$\mathbf{H}_d = tk_x + v(k_y \boldsymbol{\sigma}_x + \eta k_x \boldsymbol{\sigma}_y) + (m/2 - \alpha k^2) \boldsymbol{\sigma}_z, \quad (22)$$

其中 (k_x, k_y) 为波矢, $\boldsymbol{\sigma}_{x,y,z}$ 为泡利矩阵, $\eta = \pm 1$, m 是能隙, t 使狄拉克锥沿 x 方向倾斜即破缺了反演对称性. 如果没有倾斜 ($t = 0$), 贝里曲率将对称地集中在能带边缘, 因此没有贝里偶极子. 当狄拉克锥倾斜时, 贝里曲率不再对称分布, 贝里偶极子随着倾斜的增加而增加, 并在狄拉克锥完全倾斜 ($t > v$) 的临界点 ($t = v$) 附近达到最大值. 利用这一模型我们计算了双层 WTe_2 中的非线性霍尔响应^[82], 给出的结果与最近实验^[161,162] 中的非线性霍尔响应及其角度依赖性高度一致, 这将启发更多关于非线性霍尔效应的相关实验和理论.

除了由倾斜能带引起的贝里偶极子导致的本征非线性霍尔效应以外, 无序在其中也起着极其重要的作用. 在文献^[83] 中我们系统地计算了由无序导致的非线性霍尔效应, 并给出了霍尔电导的表达式. 不同于一般的线性霍尔效应, 由于非线性霍尔效应的机制需要费米能量切过能带, 主要的物理发生在费米面上, 这就导致即使在领头阶无序也扮演着非常重要的角色. 更重要的是, 我们提出了非线性霍尔效应的标度律, 这有助于识别不同机制的贡献, 解释未来实验中温度和厚度的依赖性. 需要指出的是, 无序是如何以一种特定的形式对非线性霍尔信号做出贡献的, 目前尚不清楚, 这也是未来研究的重点.

3.2 马约拉纳振荡

在半导体-超导体纳米线中的马约拉纳零能

模^[163–168] 总是成对出现, 并位于纳米线的两端. 由于在真实纳米线中的有限尺度效应, 马约拉纳束缚态的能量是杂化的. 杂化能量 E_0 因为是塞曼能量、化学势以及纳米线线长的函数而出现振荡^[169–171], 称为马约拉纳振荡. 然而实验中观察到 E_0 作为磁场的函数^[172–177] 其振荡与理论预测的截然相反^[170].

我们通过假设沿纳米线的自旋轨道耦合具有阶梯状分布^[84] (图 4(a)) 解释了实验中的振荡模式^[172–177] (图 4(b)—图 (d)). 这种自旋轨道耦合的阶梯状分布的假设是合理的, 因为栅极施加的是非均匀的静电势, 而自旋轨道耦合又取决于垂直于纳米线的静电场^[178–180]. 此外, 由于超导体和半导体之间的屏蔽效应以及功函数的失配, 超导体的存在可以极大地改变纳米线中的静电场^[181]. 因此, 纳米线从覆盖有超导体的部分到没有超导体的部分 (隧道

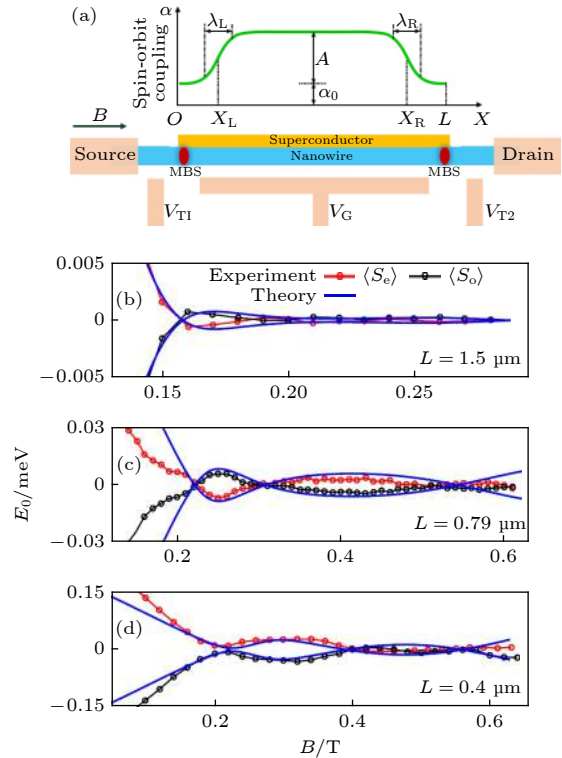


图 4 (a) 半导体-超导体纳米线结构示意图^[172–177], 两端可能存在一对马约拉纳束缚态; (b)—(d) 杂化能随着磁场变化的振荡曲线. 红色和黑色曲线为实验数据^[172], 蓝色曲线为理论曲线. 转载自文献^[84]

Fig. 4. (a) Schematic of the semiconductor-superconductor nanowire structure^[172–177], its two ends may host a pair of Majorana bound states; (b)–(d) oscillation curves of hybridization energy vary with magnetic field. The red and black curves are experimental data adapted from Ref. [172]. The blue curves are the theoretical results. Reproduced with permission from Ref. [84].

势垒区), 自旋轨道耦合的非均匀性是很好的理论假设, 但这一点被大多数理论所忽略, 导致了对马约拉纳振荡的理论理解困难.

为了验证其中的物理图像, 使用阶梯状自旋轨道耦合进行计算. 纳米线的哈密顿量为

$$H = \left[\frac{p_x^2}{2m^*} - \mu(x) - \frac{1}{2\hbar} \sigma_y \{ \alpha(x), p_x \} \right] \tau_z + V_Z \sigma_x + \Delta \tau_x, \quad (23)$$

其中 $L, m^*, p_x = -i\hbar\partial_x, \Delta$ 以及 $V_Z = g_{\text{eff}}\mu_B B/2$ 分别为纳米线的长度、有效电子质量、动量算符、有效配对能以及由 B 引起的塞曼能量. g_{eff} 和 μ_B 为有效 g 因子和玻尔磁子. 自旋轨道耦合具有如下形式 (图 1(a) 中的绿色曲线):

$$\alpha(x) = \frac{A}{2} \left[\tanh\left(\frac{x - x_L}{\lambda_L}\right) + \tanh\left(\frac{x_R - x}{\lambda_R}\right) \right] + \alpha_0, \quad (24)$$

其中 $A, \alpha_0, x_{L/R}, \lambda_{L/R}$ 为描述自旋轨道耦合随空间分布变化的参数. 在实际实验中, 当改变栅极电压时, 参数会相互影响 [181–183], 超导体的存在也会引起参数的变化 [184,185]. 通过对角化晶格上的 H , 得到能谱和波函数, 其中最低的能量即束缚态杂化能量为 E_0 .

图 4(b)—图 4(d) 中的蓝色曲线分别给出了使用三组模型参数的数值结果. 数值结果与实验保持了很高的一致性, 不仅在衰减振幅方面, 而且还包括最低能量交叉 (图 4(b) 和图 4(c))、反交叉 (图 4(d)) 以及磁场中振荡周期的增加 (图 4(c)). 注意到我们的结果是一般性的, 不依赖于具体的参数.

文献 [84] 进一步分析了这种阶梯状的自旋轨道耦合也能导致安德列夫束缚态光谱的衰减振荡. 对于由马约拉纳束缚态影响的库仑阻塞 [186–190], 预测峰间距通过 $\pi/2$ 的相移与峰高相关联, 这在最近的实验中是不明确的, 但依然可以用阶梯状自旋轨道耦合来解释. 期望这一结果将激发更多的工作来重新检验这种通常存在于真实实验装置中的非均匀自旋轨道耦合效应.

4 近零磁场

4.1 外尔半金属中的弱 (反) 局域化

弱 (反) 局域化是存在于无序金属 [191] 中由量子干涉导致的输运现象. 如果量子干涉的修正为正, 即产生弱反局域化现象, 如果为负则产生弱局

域化现象. 无论是弱局域化还是弱反局域化本质上均取决于体系的对称性 (表 1). 外尔费米子单一能谷的低能描述为 $H = \pm\hbar v_F \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{k}$, 只具有时间反演对称性. 拓扑半金属中已广泛观察到弱反局域化现象 [41–43,46,55,56,60,61]. 这一节介绍处理这一问题的基本方法 [73] 和主要结论, 最近的相关研究 [192,193] 利用相似的方法系统地研究了更一般的 3D 狄拉克材料中的弱 (反) 局域化行为, 给出了与实验非常符合的理论结果.

表 1 对称类 (正交、辛和幺正)^[194] 与弱局域化 (WL) 和弱反局域化 (WAL) 之间的关系^[195]. 转载自文献 [88] Table 1. The relation between the symmetry classes (orthogonal, symplectic and unitary) ^[194] and weak localization (WL) and anti-localization (WAL) ^[195]. Reproduced with permission from Ref. [88].

	正交	辛	幺正
时间反演	√	√	×
自旋旋转	√	×	×
WL/WAL	WL	WAL	×

图 5 总结了用于研究量子干涉和相互作用引起的弱局域化和反局域化的费曼图 [73]. 在计算中, 对电导率有贡献的主要有三项, 包括半经典的电导率 (图 5(a))、量子干涉修正 (图 5(b)) 以及电子-电子相互作用修正 (图 5(c)).

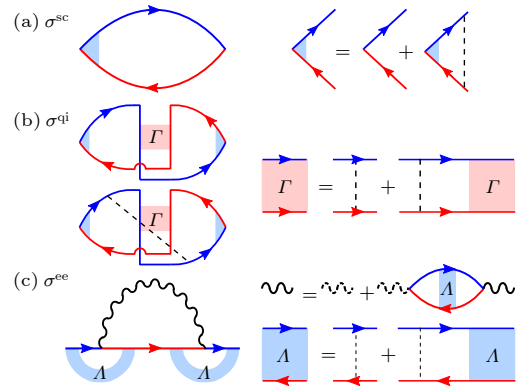


图 5 在无序 (虚线) 和电子-电子相互作用 (波浪线) 下, 计算 3D 外尔半金属电导率的费曼图 [71,72,191,196–199], 有向直线代表格林函数. 转载自文献 [73]

Fig. 5. In the disorder (dashed lines) and electron-electron interaction (wavy lines), the Feynman diagram^[71,72,191,196–199] of the conductivity of 3D Weyl semimetal, and the directed line represents the Green's function. Reproduced with permission from Ref [73].

图 6 给出了理论计算得到的主要结果. 可以看出, 在没有能谷间散射的情况下, 对于较大的 l_ϕ (相位

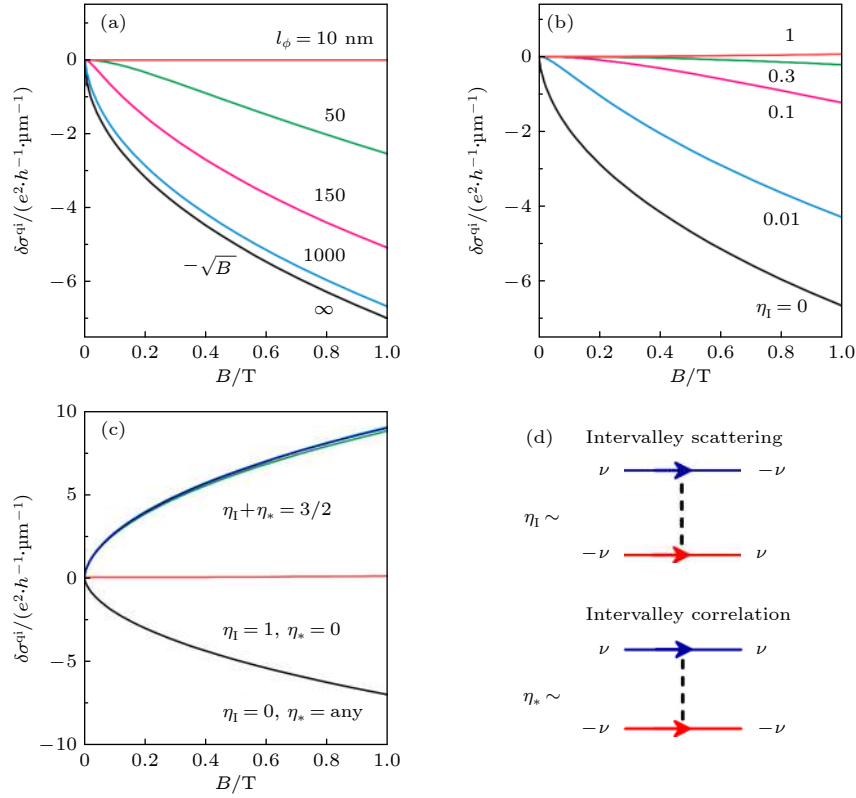


图 6 不同条件下的磁导 $\delta\sigma^{qi}(B)$ 对参数的依赖关系 (a) $\eta_l = \eta_* = 0$ 时不同的相干长度 l_ϕ ; (b) $\eta_* = 0$ 时不同的 η_l ; (c) 有限 η_* 时不同的 η_l ; (d) η_l 和 η_* 之间的差异, 其中 η_l 与能谷间散射相关, 而 η_* 与能谷内散射相关. 虚线表示两个散射过程的相关性, $\nu = \pm$ 是能谷指标. 转载自文献 [73]

Fig. 6. The dependence of magnetoconductivity $\delta\sigma^{qi}(B)$ on parameters under different conditions: (a) Different coherence length l_ϕ at $\eta_l = \eta_* = 0$; (b) different η_l at $\eta_* = 0$; (c) different η_l at finite η_* ; (d) the difference between η_l and η_* , where η_l is correlated with intervalley scattering and η_* is correlated with intravalley scattering. The dashed lines indicate the correlation between the two scattering processes. $\nu = \pm$ is the valley index. Reproduced with permission from Ref.[73].

相干长度), 磁导 $\delta\sigma^{qi}(B)$ 为负且与 \sqrt{B} 成正比, 显示了 3D 外尔费米子的弱反局域化特征. 这种 $-\sqrt{B}$ 的相关性与实验非常符合 [41,42]. 随着 l_ϕ 变短, 从 $-\sqrt{B}$ 到 $-B^2$ 的变化是很明显的, 最终 $\delta^{qi}(B)$ 在 l_ϕ 和平均自由程 l_e 相等时消失, 因为该系统不再处于量子干涉状态而进入半经典扩散状态.

4.2 双外尔半金属中的弱局域化

对于单一能谷连接费米球上从 \mathbf{k} 到 $-\mathbf{k}$ 的背散射中间态的每条路径 (在图 7(a) 中标记为 P), 均在原点处包含了单极子荷, 并且存在一个对应的时间反演 P' . 量子干涉是由两个时间反演路径 P 和 P' 之间的相位差决定的, 该相位差为沿 P 和 $\bar{P} \equiv -P'$ 形成的环路累积的贝里相位 [95,196,200–202], 即从 $-\mathbf{k}$ 到 \mathbf{k} 的对应路径:

$$\gamma = \oint_C \mathbf{dl} \cdot \mathbf{A} = \pi\mathcal{N}. \quad (25)$$

值得注意的是, 该贝里相位仅取决于单极子荷, 而不是特定的环路形状 [75] 对于双外尔半金属, 单极子荷 $\mathcal{N} = 2$, 贝里相位为 2π . 在 2π 的贝里相位下, 时间反演散射态之间产生相长干涉, 从而导致弱局域化效应. 但是, 对于单外尔半金属, 单极子荷为 $\mathcal{N} = 1$ 且贝里相位为 π , 导致弱反局域化效应. 这里对贝里相位的分析与前文提到的对称性分类得到的结果是一致的 [203]. 由于贝里相位是单极子荷产生的贝里曲率场的直接结果, 因此我们在弱 (反) 局域化效应与单极子荷 \mathcal{N} 的奇偶性之间建立了直接的联系.

通过计算最大交叉图得到对双外尔半金属电导率的修正. 最大交叉图的核心计算可以表达为粒子-粒子关联, 称为 Cooperon, 对双外尔半金属其为 [75]

$$C_{\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2} \approx \frac{\hbar}{2\pi N_F \tau^2} \frac{e^{i2(\varphi_2 - \varphi_1)}}{D_1 (q_x^2 + q_y^2) + D_2 q_z^2}, \quad (26)$$

其中 $\mathbf{q} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ 是 Cooperon 波矢, \mathbf{k}_1 和 \mathbf{k}_2 分别

为初态和末态的波矢, φ_1 和 φ_2 为相应波矢的方位角, $D_1 = 8\tau E_F v_{//} / (3\pi)$ 和 $D_2 = \tau v_z^2$ 是扩散系数, N_F 是态密度, τ 是动量弛豫时间.

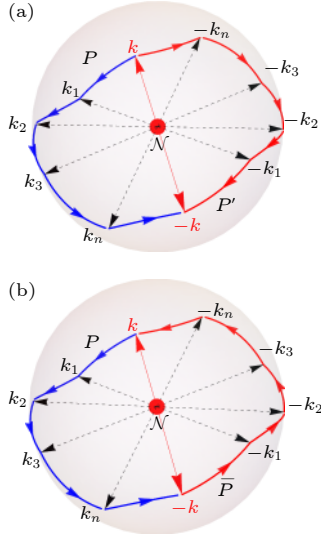


图 7 3D 拓扑半金属动量空间中的费米球, 其中位于原点的点表示单极子荷 \mathcal{N} : (a) P 表示从波矢 \mathbf{k} 到标记为 $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$ 的中间态的背散射, P' 表示 P 的时间反演; (b) P 和 P' 之间的相位差等效于在环路 $C = P + \bar{P}$ 周围累积的贝里相位. 转载自文献 [75]

Fig. 7. The Fermi sphere in 3D topological semimetal momentum space, where the dot at the origin represents monopole charge \mathcal{N} : (a) P is the backscattering from the wave vector \mathbf{k} to $-\mathbf{k}$ via intermediate states labeled as $(\mathbf{k}_1, \mathbf{k}_2, \dots, \mathbf{k}_n)$, P' represents the time-reversal of P ; (b) the phase difference between P and P' is equivalent to the Berry phase accumulated around loop $C = P + \bar{P}$. Reproduced with permission from Ref. [75].

当 $\mathbf{q} \rightarrow 0$, 即 $\mathbf{k}_1 = -\mathbf{k}_2$ 时, Cooperon 发散, 成为背散射的最主要贡献. 在此极限下, $\varphi_2 = \varphi_1 + \pi$ (其中 $\hbar k_x = \sqrt{k} \sin \theta \cos \varphi$, $\hbar k_y = \sqrt{k} \sin \theta \sin \varphi$, $2\hbar m v k_z = k \cos \theta$, 并通过设置 $\varphi \rightarrow \varphi + \pi$ 和 $\theta \rightarrow \pi - \theta$ 得到 $-\mathbf{k}$):

$$C_{\mathbf{k}, \mathbf{q}=\mathbf{k}} \approx + \frac{\hbar}{2\pi N_F \tau^2} \frac{1}{D_1 (q_x^2 + q_y^2) + D_2 q_z^2}. \quad (27)$$

注意 (27) 式前的正号, 其对应于弱局域化效应, 即产生正的磁导, 这是双外尔半金属弱局域化的另一个特征. 在低温极限下 $l_\phi \gg l_B \gg l_z$, 磁导 $\delta\sigma_{zz}^{\text{qi}}(B) \propto \sqrt{B}$, 在极限 $l_B \gg l_\phi$ 以及 $l_B \gg l_z$ 时, $\delta\sigma_{zz}^{\text{qi}}(B) \propto B^2$.

根据文献 [73, 75] 的理论结果, 我们提出了一个公式来拟合 3D 弱 (反) 局域化引起的磁导:

$$\delta\sigma_{zz}^{\text{qi}} = C_1^{\text{qi}} \frac{B^2 \sqrt{B}}{B_c^2 + B^2} + C_2^{\text{qi}} \frac{B_c^2 B^2}{B_c^2 + B^2}, \quad (28)$$

其中拟合参数 C_1^{qi} 和 C_2^{qi} 为正对应于弱局域化, 为负

则对应于弱反局域化. 临界场 B_c 与相位相干长度 l_ϕ 有关 ($B_c \sim \hbar / (e l_\phi^2)$), 相位相干长度与温度的关系近似为 $l_\phi \sim T^{-p/2}$, 即 $B_c \sim T^p$, 其中 p 由退相干机制 (如电子-电子相互作用 ($p = 3/2$) 或电子-声子相互作用 ($p = 3$)) 决定. 将该公式应用于 TaAs 的实验, 通过拟合磁导, 发现 $p \approx 1.5$ [61].

存在相互作用的情况下, 对于外尔费米子的一个能谷, 电导率随温度的变化可以概括为

$$\Delta\sigma(T) = c_{\text{ee}} T^{1/2} - c_{\text{qi}} T^{p/2}, \quad (29)$$

其中 c_{ee} 和 c_{qi} 都是正的参数. (29) 式描述了由相互作用引起的弱局域化和由于干涉引起的弱反局域化之间的竞争 (图 8). 临界温度 $T_c = (c_{\text{ee}}/p \cdot c_{\text{qi}})^{2/(p-1)}$ 因为 $c_{\text{ee}} c_{\text{qi}} > 0$, 这意味着只要 $p > 1$, 总有一个临界温度低于这个温度, 电导率就会随着温度的降低而下降. 对于 3D 中已知的退相干机制, p 总是大于 1 [191]. 通过一组典型参数的拟合, 发现 $T_c \approx 0.4 - 10^6$ K [73].

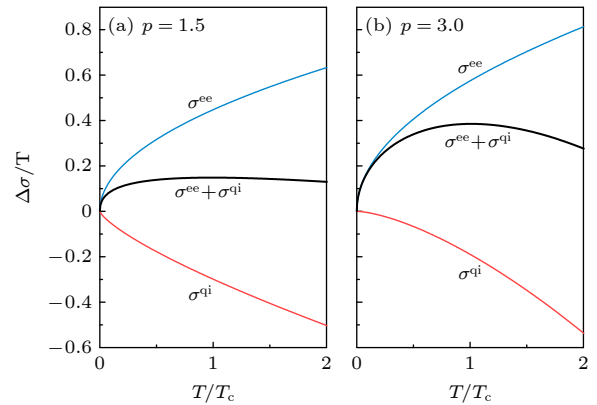


图 8 电导率 $\Delta\sigma$ 随温度 T 变化的示意图. 选择 $c_{\text{ee}} = c_{\text{qi}}$, T_c 是电导率随温度降低而下降的临界温度. 转载自文献 [73]
Fig. 8. The schematic diagram of conductivity $\Delta\sigma$ changes with temperature T . We choose $c_{\text{ee}} = c_{\text{qi}}$, T_c is the critical temperature at which the conductivity drops with temperature. Reproduced with permission from Ref. [73].

能谷间的散射和关联也会导致弱局域化, 如图 6(b) 所示, 随着 η_1 的增加, 负的 $\delta\sigma^{\text{qi}}$ 被抑制. 此外, 图 6(c) 显示, 当 $\eta_1 + \eta_* = 3/2$ 时, 磁导可以变为正, 即局域化趋势. 因此, 强的能谷间散射和关联的结合将增强无序外尔半金属的局域化倾向并可能导致金属-绝缘体相变 [39].

4.3 节线半金属中的弱 (反) 局域化

模型 (15) 具有两个基本的对称性 [147], 即 $\mathcal{T}_1 H(\mathbf{k}) \mathcal{T}_1^{-1} = H(-\mathbf{k})$ 和 $\mathcal{T}_2 H(\delta\mathbf{k}) \mathcal{T}_2^{-1} = H(-\delta\mathbf{k})$, 其中 $\mathcal{T}_1 = K$, $\mathcal{T}_2 = i\tau_y K$ 为时间反演, k 是复共轭算符,

$\delta\mathbf{k} = \kappa(\cos\varphi, \sin\varphi/\alpha)$. 由表 1 可知, \mathcal{T}_1 和 \mathcal{T}_2 分别对应于正交和辛对称类, 分别导致弱局域化和弱反局域化(图 9(b)—图 9(c)). 简单起见, 考虑低能激发即 E_F 相对较小, 费米面的主半径满足 $k_0 \gg 1/r_{sc} \gg \kappa$, r_{sc} 为散射势的范围. 此时不同的散射态 \mathbf{k} 之间可以用一个单一的参数 θ 来描述, 即 $u_{\mathbf{k}} = u(\theta) = u_0 f_{\Delta}(\theta)$, 其中 $f_{\Delta}(x) = \Theta(x + \Delta)\Theta(-x + \Delta)$, $\Theta(x)$ 为阶跃函数. 当 $\Delta = \pi$ 时为短程散射极限, $\Delta \rightarrow 0$ 时为长程散射极限.

与第 4.1 节类似, 在文献 [147] 中我们利用费曼图方法计算了电导率的量子干涉修正, 计算中主要包括了三个领头阶的图 [195,196]. 对于零温电导率, 总的量子修正为

$$\sigma_z = s\eta_z^2 \frac{e^2 \hbar}{4\pi V^2} \sum_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} v_{\mathbf{k}}^z v_{\mathbf{k}'}^z G_{\mathbf{k}}^R G_{\mathbf{k}}^A G_{\mathbf{k}'}^R G_{\mathbf{k}'}^A C_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}, \quad (30)$$

其中 $s = 2$ 为自旋简并度, $\eta_z = 2$ 是对速度 $v_{\mathbf{k}}^z$ 的顶点修正. 推迟 (R) 和超前 (A) 格林函数利用一阶波恩近似求解得到, 即 $G_{\mathbf{k}}^{R,A}(\omega) = 1/[\omega - \varepsilon_{\mathbf{k}} \pm i\hbar/(2\tau_e)]$, $\tau_e = 2\hbar/(n_i \rho_0 \bar{u}^2)$ 是弹性散射的弛豫时间, 其中 $\bar{u}^2 = \int_0^{2\pi} d\theta |u(\theta)|^2$, $C_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'}$ 是最大交叉图的 Cooperon [204].

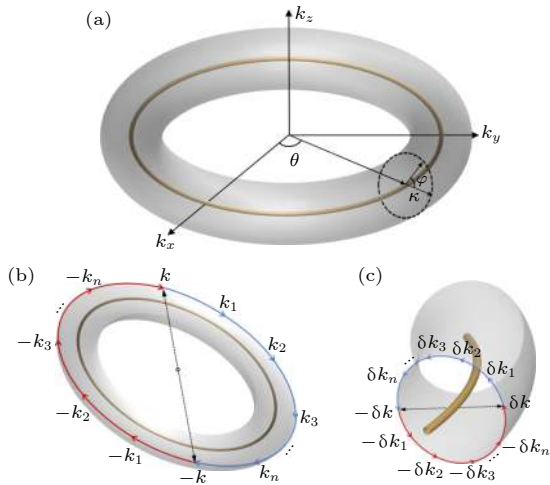


图 9 (a) 节线半金属的轮胎状费米面, 小半径 κ , 主半径 k_0 , 极角 φ , 环面角 θ ; (b) 对于短程杂质势导致在环形方向上产生从 \mathbf{k} 到 $-\mathbf{k}$ 的相干背散射; (c) 在长程杂质势作用下, 沿极向的 $\delta\mathbf{k}$ 到 $-\delta\mathbf{k}$ 的散射, 此过程积累一个大小为 π 的贝里相位. 转载自文献 [147]

Fig. 9. (a) Torus-shaped Fermi surface of nodal-line semimetals, with minor radius κ , major radius k_0 , poloidal angle φ , and toroidal angle θ ; (b) a coherent backscattering from wave vector \mathbf{k} to $-\mathbf{k}$ around the toroidal direction for short-ranged impurity potentials; (c) backscattering from wave vector $\delta\mathbf{k}$ to $-\delta\mathbf{k}$ along the poloidal direction under long-ranged impurity potentials. The process contributes a π Berry phase. Reproduced with permission from Ref. [147].

在短程散射极限下 $\Delta = \pi$, 最主要的散射路径为 (k_1, k_2, \dots, k_n) 及其时间反演 $(-k_n, \dots, -k_2, -k_1)$ (图 9(b)), 需要指出的是, 这些路径没有包围节线, 即不会积累贝里相位. 直流极限下 ($\omega \rightarrow 0$) [147]

$$C_{\mathbf{k}, \mathbf{k}'} = \frac{\gamma}{2\tau_e} \frac{1}{D_{xy} Q_{xy}^2 + D_z Q_z^2}, \quad (31)$$

其中 $Q_{xy} = \sqrt{Q_x^2 + Q_y^2}$, $D_{xy} = v_0^2 \tau_e / 4$ 和 $D_z = \alpha^2 v_0^2 \tau_e$ 分别是 x - y 平面和 z 方向的扩散系数. (31) 式说明节线半金属在短程极限下存在类似于普通各向异性金属中的 3D 弱局域化行为.

长程极限时 $\Delta \rightarrow 0$, 量子干涉修正主要由路径 $(\delta k_1, \delta k_2, \dots, \delta k_n)$ 和 $(-\delta k_n, \dots, -\delta k_2, -\delta k_1)$ 所贡献 (图 9(c)), 此路径由于包围节线会积累一个大小为 π 的贝里相位. 类似地可以得到 [147]

$$C_{\delta\mathbf{k}, \delta\mathbf{k}'} = \frac{\gamma}{2\tau_e} \frac{f_{\Delta}(\theta - \theta') e^{-i(\varphi - \varphi')}}{4D_{xy} q_{xy}^2 \cos^2(\theta_q - \theta) + D_z q_z^2}, \quad (32)$$

其中 $\mathbf{q} = \delta\mathbf{k} - \delta\mathbf{k}'$, $q_{xy} = \sqrt{q_x^2 + q_y^2}$. (32) 式包括 2 个 θ 依赖的因子, $\Delta \rightarrow 0$ 时 $f_{\Delta}(\theta - \theta')$ 项确保 $\theta = \theta'$, 同时发散项 $\cos^2(\theta_q - \theta)$ 在 $\theta_q - \theta = \pi/2$ 时为 0, 即散射只能发生在同一极向的平面上. 可见在长程极限下节线半金属表现出 2D 的量子扩散行为.

引入磁场后, 退相干机制抑制了无序诱导的电导率量子修正 [204]. 在短程极限下得到磁导率为

$$\begin{aligned} \sigma_z^S(B) = & -\frac{s\eta_z^2 \alpha e^2}{(2\pi)^2 \hbar} \left[\Psi \left(l_B^2 / l_e^2 + \frac{1}{2} \right) / l_e \right. \\ & - \Psi \left(l_B^2 / l_\phi^2 + \frac{1}{2} \right) / l_\phi \\ & \left. - \int_{1/l_\phi}^{1/l_e} dx \Psi \left(l_B^2 x^2 + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (33) \end{aligned}$$

类似地在长程极限下

$$\begin{aligned} \sigma_z^L(B) = & \frac{s\eta_z^2 \mathcal{K} \alpha e^2}{16\pi^2 \hbar} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2\pi} \left[\Psi \left(\frac{l_B^2}{l_e^2 \alpha |\sin\theta|} + \frac{1}{2} \right) \right. \\ & \left. - \Psi \left(\frac{l_B^2}{l_\phi^2 \alpha |\sin\theta|} + \frac{1}{2} \right) \right], \quad (34) \end{aligned}$$

其中 $\Psi(x)$ 为双伽马函数. 图 10 给出了 (33) 式和 (34) 式对磁导率的理论预测. 短程极限下弱局域化效应导致正的磁导 (图 10(a)), 而在长程极限下的弱反局域化效应导致了负的磁导 (图 10(b)). 实验中可以通过对温度的调节来控制相位相干长度 l_ϕ 的大小以匹配不同的曲线, 在低温及 $B \sim 0.1 - 1.0$ T 时, 由于 $l_\phi \sim 100$ nm—1 μ m, $l_B \sim 10$ nm, 即 $l_\phi \gg l_B$.

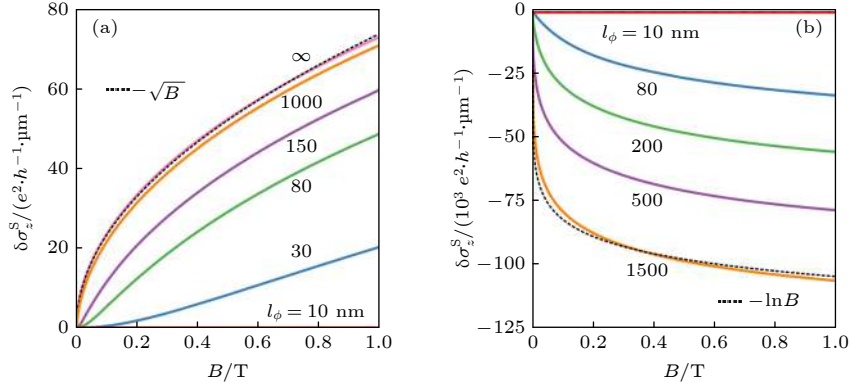


图 10 不同相位相干长度 l_ϕ 下的磁导率, 短程极限 (a) 和长程极限 (b) 分别对应 (33) 式和 (34) 式. 转载自文献 [147]

Fig. 10. The magnetoconductivity in the (a) short range limit Eq. (33) and (b) long range limit Eq.(34) for different phase coherence lengths l_ϕ . Reproduced with permission from Ref.[147].

通常, 与 3D 扩散相比, 2D 扩散会导致更大的弱局域化或弱反局域化效应. 此外, 节线半金属的 3D 扩散行为可以视为大量的 2D 有效子系统, 导致磁导率的显著提高 [205]. 实际上, 在图 10 中可以观察到, $\sigma_z^L(B)$ 比 $\sigma_z^S(B)$ 大 3 个数量级, 这表明弱反局域化效应在节线半金属的长程散射极限下是个非常强的特征.

4.4 拓扑绝缘体中的弱 (反) 局域化

基于费曼图方法我们计算了拓扑绝缘体磁掺杂表面态的磁导 [71], 磁掺杂的引入以两种方式影响了体系的性质, 首先磁性杂质导致的平均场在狄拉克点处打开能隙, 其次平均场的局部涨落以随机方式散射表面态电子. 经过计算发现, 除了无能隙狄拉克费米子产生的弱反局域化效应, 能隙的打开导致了额外的弱局域化项, 随着能隙的进一步增加将使体系展现出完全的弱局域化.

零温磁导公式为

$$\sigma(B) = \sum_{i=0,1} \frac{\alpha_i e^2}{\pi h} \left[\Psi \left(\frac{l_B^2}{l_\phi^2} + \frac{l_B^2}{l_i^2} + \frac{1}{2} \right) - \ln \left(\frac{l_B^2}{l_\phi^2} + \frac{l_B^2}{l_i^2} \right) \right], \quad (35)$$

其中 Ψ 是双伽马函数,

$$\alpha_1 = -\frac{\eta_v^2 (1 + 2\eta_H)}{2 \left(1 + \frac{1}{g_0} + \frac{1}{g_2} \right)},$$

$$l_1^{-2} = \frac{g_1}{2l^2 \sin^2 \theta \left(1 + \frac{1}{g_0} + \frac{1}{g_2} \right)}, \quad \alpha_0 = \frac{\eta_v^2 (1 + 2\eta_H)}{2 \left(\frac{1}{g_1} + 1 \right)},$$

$$l_0^{-2} = \frac{g_0}{2l^2 \sin^2 \theta \left(\frac{1}{g_1} + 1 \right)}, \quad (36)$$

其中 $1/l^2 \equiv 1/l_e^2 + 1/l_m^2$, l_e 是平均自由程, l_m 是磁性杂质的散射长度. 在没有磁性杂质的情况下 $\alpha_0 = 0, \alpha_1 = -1/2$, 即给出弱反局域化的磁导特征. 对于有限的能隙, 由于 α_0 和 α_1 的符号相反, 前者导致弱局域化, 后者导致弱反局域化, 两者呈现出竞争的行为.

对非磁性掺杂的拓扑绝缘体的电子输运实验展现出非常大的矛盾 [206–209], 磁导率随磁场的增加而下降, 即展现出反局域化的行为 (图 11(a) 红色曲线). 然而, 当温度降低时, 测得的电导率呈对数下降, 显示出普通无序金属中弱局域化的典型特征 (图 11(b) 蓝色曲线). 为了引入温度的效应, 我们考虑电子-电子相互作用对电导率的修正 [72]:

$$\sigma^{ee} = \frac{e^2}{\pi h} (1 - \eta_{\Lambda\Gamma} F) \ln \frac{2l_e^2}{l_\Gamma^2} - \frac{e^2}{\pi h} \eta_\Gamma F \psi \left(\frac{1}{2} + \frac{l_\Gamma^2}{l_{B\phi}^2} \right), \quad (37)$$

其中 $1/l_{\phi i}^2 \equiv 1/l_\phi^2 + 1/l_i^2$ 以及 $1/l_{B\phi}^2 \equiv -(1/(2l_B^2) + 1/l_{\phi 1}^2)/(2\alpha_1)$. 相位相干长度 l_ϕ 正比于 $T^{-p/2}$, T 是温度, 参数 p 可从实验中得到 [207,209]. $l_\Gamma \equiv \sqrt{D\hbar/(2\pi k_B T)}$

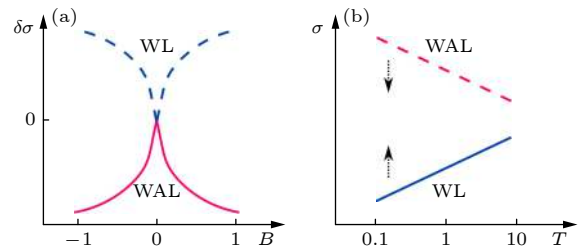


图 11 (a) 磁导率 $\delta\sigma \equiv \sigma(B) - \sigma(0)$ 与磁场 B 的关系; (b) 电导率 σ 与温度 T 的关系. 转载自文献 [72]

Fig. 11. The magnetoconductivity $\delta\sigma \equiv \sigma(B) - \sigma(0)$; (b) conductivity σ vs temperature T . Reproduced with permission from Ref. [72].

是热扩散长度, 其中 k_B 是玻尔兹曼常数, 扩散系数 $D = l_e v \sin \theta \sqrt{\frac{(1 + \cos^2 \theta)}{(1 + 3 \cos^2 \theta)}}$, $\cos \theta \equiv \frac{\Delta}{2E_F}$, v 和 Δ 是狄拉克模型的参数. 对于狄拉克模型, 相互作用的屏蔽因子

$$F = \frac{2 \arctan \sqrt{1/x^2 - 1}}{\pi \sqrt{1 - x^2}}, \quad x \equiv \frac{8\pi\epsilon_0\epsilon_r\gamma \sin \theta}{e^2}, \quad (38)$$

ϵ_0 是真空介电常数, ϵ_r 是考虑晶格离子和价电子影响的相对介电常数, $\gamma = v\hbar$. 电导率公式是温度 T 和磁场 B 的函数, 并且依赖于狄拉克模型参数 $\Delta/(2E_F)$ 和 γ , 以及与样品相关的参数 l_e, l_ϕ, F . (38) 式明确阐明了由相互作用主导的电导率的温度依赖性, 而磁导率主要由量子干涉贡献, 解决了拓扑绝缘体输运实验上的矛盾.

5 弱磁场

5.1 拓扑半金属中的负磁阻和平面霍尔效应

在拓扑半金属中非平庸的贝里曲率可以将外部磁场与电子速度耦合, 产生随着磁场的增加而增长的额外导电性 [28,29]. 由于它与成对外尔点之间的手征电荷转移相关, 负磁阻也被认为是手征反常的一个特征 [26,210,211]. 许多拓扑半金属材料中都观察到了负磁阻现象 [41–43,46,55–57,60,61,63,66,68]. 除了在纵向磁场下产生随磁场增大的手征电流以外, 最近的理论发现, 外尔半金属中可以存在平面霍尔效应 [212,213], 即磁场平行于电场时横向有电荷积累即产生霍尔电导率 σ_{yx} . 不同于经典的霍尔效应, 平面霍尔效应不是由洛伦兹力导致的, 因此吸引了很多理论和实验的关注 [214–216]. 文献 [217] 研究了普通外尔半金属和倾斜外尔半金属中的平面霍尔效应, 相比于前者, 倾斜外尔半金属的纵向电导率 σ_{xx} 和霍尔电导率 σ_{yx} 均给出了不同的磁场 B 依赖关系.

我们从电子的半经典运动方程开始 [95,218–220]:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= \mathbf{v} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}}, \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} &= -e\mathbf{E} - e\dot{\mathbf{r}} \times \mathbf{B}, \end{aligned} \quad (39)$$

其中 $\mathbf{v} = \partial \epsilon_{\mathbf{k}} / \hbar \partial \mathbf{k}$ 是费米速度. 第一个方程中的第二项表明, 存在电场时, 电子可以获得与能带的贝里曲率成正比的反常速度. 这种反常速度是许多输运现象的原因. 迭代方程 (39) 得到 [28]

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}} &= D_{\mathbf{k}}^{-1} \left[\mathbf{v} + \frac{e}{\hbar} \mathbf{E} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} + \frac{e}{\hbar} (\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}) \mathbf{B} \right], \\ \hbar \dot{\mathbf{k}} &= D_{\mathbf{k}}^{-1} \left[-e\mathbf{E} - e\mathbf{v} \times \mathbf{B} - \frac{e^2}{\hbar} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} \right], \end{aligned} \quad (40)$$

其中 $D_{\mathbf{k}} = 1 + (e/\hbar) \mathbf{B} \cdot \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}}$ 是对相空间体积的修正项, 包含 $\boldsymbol{\Omega}$ 的各项分别导致了反常霍尔效应 [221–223]、手征磁效应 [36]、以及负磁阻 [28,29].

由于电导率是流-流关联 (图 5(a)), 速度与 B 的线性相关性导致电导率的 B^2 相关性. 在 2.1 节, 已经证明贝里曲率与 $1/k^2$ 成正比. 考虑到电导率公式的 3D 积分中存在 Ω^2 以及 k^2 , 则反常电导率部分应与费米波矢成反比, 与 B^2 成正比, 即

$$\delta\sigma(B) \propto B^2/k_F^2, \quad (41)$$

(41) 式与文献 [28,29] 中得到的公式是一致的. 电导率随着 B^2 的增加而增加, 产生负磁阻. 由于非平庸的贝里曲率在外尔点处发散, 电导率随费米波矢和载流子密度的减小而增大. 3D 时, 载流子密度 n 与 k_F^3 成正比, 即

$$\delta\sigma(B) \propto B^2/n^{2/3}. \quad (42)$$

因此, 为了验证非平庸贝里曲率的负磁阻特性, 有必要对三个性质进行检验, 即角度依赖性、 B^2 的磁场依赖性以及 $n^{-2/3}$ 的载流子密度依赖性. 在实验 [61] 中, 通过比较不同样品的结果检验了磁阻对载流子密度的依赖性.

在半经典区域, 电流密度矢量为 [95]

$$\mathbf{J} = -e \int \frac{d\mathbf{k}}{(2\pi)^3} D_{\mathbf{k}}^{-1} \dot{\mathbf{r}} f_{\mathbf{k}}, \quad (43)$$

其中 $\dot{\mathbf{r}}$ 为半经典波包的群速度, $f_{\mathbf{k}}$ 是电子占据 k 态的非平衡分布函数, 载流子的输运性质主要由 $\dot{\mathbf{r}}$ 和 $f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})$ 所决定. (40) 式第一个方程括号内的第三项是与磁场有关的反常速度, 一般来说, 它可以分解成与电场平行和垂直的两个分量. 反常速度项包含 $\boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v}$, 这表明对于一个外尔锥, 它是沿着磁场方向的, 而对于手性相反的锥, 则相反.

利用弛豫时间近似 $\dot{\mathbf{k}} \cdot \partial_{\mathbf{k}} f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \frac{f_{\text{eq}}(\mathbf{r}) - f_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})}{\tau(\mathbf{k})}$, 其中 f_{eq} 为平衡态分布函数, 并由玻尔兹曼方程得到非平衡分布函数为 [217]

$$f_{\mathbf{k}} = f_{\text{eq}} + \left[eD\tau \mathbf{E} \cdot \mathbf{v} + \frac{e^2}{\hbar} D\tau (\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}) (\mathbf{v} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \right] \frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \epsilon}, \quad (44)$$

括号内第一项表示电场 \mathbf{E} 沿着 \mathbf{v} 的分量引起的载流子分布偏离, 第二项表示手征化学势导致的偏离.

对于由最小有效模型 (7) 描述的外尔半金属, 由于手征化学势的影响, 电子通过电场和磁场的共同作用从一个外尔锥转移到另一个手性相反的锥. 如 (44) 式所示, 偏离平衡分布的这部分与 $\mathbf{B} \cdot \mathbf{E}$ 成正比, 即当 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 不垂直时, 与磁场的大小成正比. 在没有倾斜的情况下, 外尔锥在空间上是均匀的, 并且速度 \mathbf{v} 的大小在费米面上没有变化, 因此 \mathbf{v} 在单个外尔锥的贡献为零. 而且由于电子分布的偏离, 与磁场 \mathbf{B} 成正比的反常速度项 $(\Omega_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$ 对两个外尔锥的影响不能相互抵消. 手征化学势和反常速度的共同作用导致了 \mathbf{B}^2 依赖的电流密度矢量 (43) 式, 其纵向分量导致了磁场平方依赖的纵向磁导率 σ_{xx} , 即手征反常. 它的横向分量产生了磁场平方依赖的霍尔电导率 σ_{yx} , 即平面霍尔效应.

对于倾斜的外尔半金属, 其中一个外尔点上的最小有效模型可以写为 [217]

$$H = v\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\sigma} + t \cdot \mathbf{k}, \quad (45)$$

其中参数 t 为描述倾斜程度的矢量, 当 $|t| < v$ 时该模型描述 I 型外尔半金属, 以下讨论主要基于此类体系.

引入倾斜项后两个具有相反手性的外尔锥沿着相反的方向发生倾斜. 假设 \mathbf{E} 沿着倾斜的方向, (44) 式括号中第一项显示了由电场 \mathbf{E} 导致的分布偏离. 因此, 两个外尔锥中占据态的反常速度的贡献不会抵消. 但这一项不依赖于磁场 \mathbf{B} , 只有反常速度项 $(\Omega_{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{v})\mathbf{B}$ 线性依赖于磁场 \mathbf{B} , 由此导致的纵向和横向电流分别产生了线性依赖于磁场的 σ_{xx} 和 σ_{yx} . 考虑到 (44) 式括号中第二项手征化学势的影响后, 不同于普通外尔半金属, 此时 \mathbf{v} 的大小在费米面上是变化的, 即 \mathbf{v} 在单个外尔锥上的贡献不会相互抵消. 只要 \mathbf{B} 和 \mathbf{E} 不垂直, 则手征化学势导致的载流子分布偏离正比于磁场的大小. 导致除了由反常速度引起的 2 次依赖于磁场的项外进一步产生了线性依赖于磁场的 σ_{xx} 和 σ_{yx} .

文献 [217] 进一步分析了磁场的角度和相空间体积的修正对电子运输的影响, 并指出该半经典理论可以推广到 II 型外尔半金属, 为未来可能的实验验证提供指导.

5.2 拓扑绝缘体中的负磁阻

拓扑半金属中的手征反常 [26,210,211] 被广泛认为是产生负磁阻的原因 [41–43,46,55,56,60,61,63,65,66,68,224]. 然

而, 在无法定义手征的拓扑绝缘体中, 也可以观察到负磁阻现象, 这导致了对负磁阻进行理论解释的巨大混乱 [152–155,225–228]. 在文献 [80] 中, 我们使用具有贝里曲率和轨道磁矩修正后的半经典玻尔兹曼方程来解释拓扑绝缘体中的负磁阻, 并与实验结果进行了定量的比较 (图 12).

实验中, 负磁阻存在于 $T = 100$ K [154] 的温度以上, 因此可以排除量子干涉机制. 此外, 由于拓扑绝缘体 Bi_2Te_3 和 Bi_2Se_3 [229] 的迁移率较差, 当磁场达到 6 T 时, 朗道能级不能很好地形成. 半经典运动方程 (39) 的速度项为

$$\dot{\mathbf{r}} = \frac{1}{\hbar} \nabla_{\mathbf{k}} \tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} - \dot{\mathbf{k}} \times \boldsymbol{\Omega}_{\mathbf{k}}, \quad (46)$$

不同于 (39) 式, 此处的 $\tilde{\varepsilon}_{\mathbf{k}} = \varepsilon_{\mathbf{k}} - \mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ 是经过轨道磁矩 \mathbf{m} 修正后的能量, $\varepsilon_{\mathbf{k}}$ 是能带色散. (41) 式

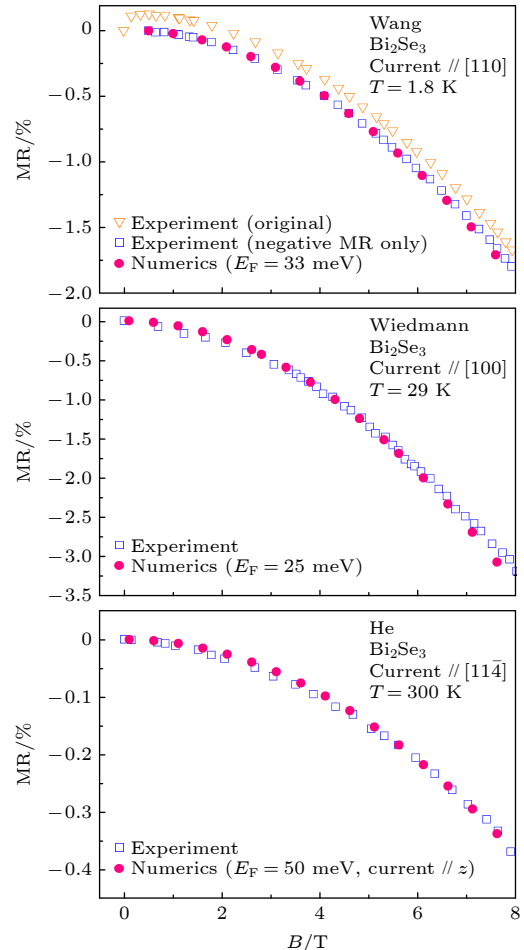


图 12 理论计算的负磁阻与实验 [152–154] 的比较. 转载自文献 [80]

Fig. 12. The comparison between the theoretical negative magnetoresistance and the experiments [152–154]. Reproduced with permission from Ref. [80].

和 (42) 式表明贝里曲率可以导致一个随磁场 B^2 增长的电导率修正. 这种机制在拓扑绝缘体中非常显著 [80], 在几个特斯拉的平行磁场中, 相对磁阻可以超过 -1% [152–155, 225–227].

在玻尔兹曼理论中, 纵向电导率 $\sigma^{\mu\mu}$ 由穿过费米能级的所有能带决定, 对于能带 n [223],

$$\sigma^{\mu\mu} = \int \frac{d^3\mathbf{k}}{(2\pi)^3} \frac{e^2\tau}{D_{\mathbf{k}}} \left(\tilde{v}_{\mathbf{k}}^{\mu} + \frac{e}{\hbar} B^{\mu} \tilde{v}_{\mathbf{k}}^{\nu} \Omega_{\mathbf{k}}^{\nu} \right)^2 \left(-\frac{\partial f_{\text{eq}}}{\partial \varepsilon} \right), \quad (47)$$

其中 f_{eq} 是平衡态的费米分布, 弛豫时间 τ 假定为常数 [29].

图 12 表明了负磁阻的实验和数值计算结果之间的一致性. 在实验 [152] 中, 温度为 1.8 K, 因此原始数据在零场附近具有正磁阻, 这是由弱反局域化导致的 [206, 208, 230–233]. 在实验 [153, 154] 中负磁阻随温度变化不大这与理论保持一致, 显示了负磁阻的半经典性质. 在大多数使用半经典输运理论研究磁阻的文献中, 轨道磁矩均被忽略 [28, 223]. 如文献 [234, 235], 轨道磁矩对于外尔半金属中磁阻的各向异性是必不可少的. 文献 [80] 表明, $\mathbf{m} \cdot \mathbf{B}$ 对 $\varepsilon(\mathbf{k})$ 的修正可以有效地增加负磁阻.

其他的一些工作 [236, 237] 发展了一般 3D 非磁性金属的具有二阶精度的半经典理论. 这些工作给出了几个令人惊讶的结果. 首先, 由于 $\delta\sigma^{\text{int}}/\sigma_0$ 与弛豫时间无关, 存在本征磁导 $\delta\sigma^{\text{int}}$. 第二, 显著的 $\delta\sigma^{\text{int}}$ 项可能导致对科勒规则的偏离. 第三, $\delta\sigma^{\text{int}}$ 可能导致正的纵向磁导. 在仅占据最低朗道能带的量子极限下, 磁阻微妙地依赖于散射机制 [74, 76, 238], 而不是贝里曲率和轨道磁矩. 最近的理论工作 [227, 239] 为理解负磁阻提供了新的观点. 值得注意的是文献 [240] 利用格林函数方法系统地计算了有质量狄拉克费米子在磁场下的输运行为, 该理论给出了负的且正比于 B^2 的纵向磁阻, 这一结论有望澄清长期以来对拓扑物态中负磁阻解释的困难.

6 强磁场

6.1 外尔和狄拉克半金属中的量子振荡

由 2.1 节可知, 在 z 方向的磁场中能谱演化为一组 1D 的朗道能带 [74, 76] (图 2), 这导致了电阻的 SdH 振荡. 一般用栗弗席兹-科塞维奇 (Lifshitz–Kosevich) 公式 [241] 来描述:

$$\rho \sim \cos[2\pi(F/B + \phi)], \quad (48)$$

式中, ϕ 为相移, F 为振荡频率, B 为磁场大小. 每个频率分量的相移为 $-1/2 + \phi_B/2\pi + \phi_{3D}$, 其中 $\phi_{3D} = \mp 1/8$ 为仅针对 3D 的修正, ϕ_B 为贝里相位 [95, 242]. 费米面沿磁场方向的曲率决定了 ϕ_{3D} 的符号 [243, 244]. 拓扑物态为探索非平庸贝里相位提供了一个新的平台 [50–52, 54, 67, 245–255]. 拓扑半金属中具有额外大小为 π 的贝里相位 [122, 242], 因此在 2D 和 3D 体系中相移分别为 0 [256] 和 $\pm 1/8$ [257]. 在文献 [77] 中, 我们发现在栗弗席兹点附近, 量子振荡的相移可以超过一般的 $\pm 1/8$ 或 $\pm 5/8$, 并且非单调地向更宽范围 $\pm 7/8$ 和 $\pm 9/8$ 之间移动. 到目前为止, 在 HfSiS [258–264], ZrSi(Se/Te) [265] 和 ZrGe(S/Se/Te) [266] 中对量子振荡都进行了实验研究, 但它们的相移并不相同. 表 2 总结了具有线性和抛物线色散的 2 维和 3 维能带的相移.

表 2 对于具有不同色散和维度的系统, (48) 式中的相移 ϕ . B_z 和 $B_{//}$ 是节线平面内外的磁场. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 对应于图 14 中费米面的截面. 转载自文献 [79]

Table 2. For systems with different dispersion and dimensions, the phase shift ϕ in Eq. (48). B_z and $B_{//}$ are magnetic fields outside and inside the nodal-line plane. α, β, γ , and δ correspond to the cross sections of Fermi surface in Fig. 14. Reproduced with permission from Ref. [79].

系统	电子载流子	空穴载流子
2D 抛物线	-1/2	1/2
3D 抛物线	-5/8	5/8
2D 线性	0	0
3D 线性	-1/8	1/8
磁场 B_z 中的节线	-5/8(α), 5/8(β)	5/8(α), -5/8(β)
磁场 $B_{//}$ 中的节线	-5/8(γ), 1/8(δ)	5/8(γ), -1/8(δ)

实验中, 在 B 轴上的峰值位置或谷值位置给出整数朗道指数 n , 进而从 n 和 $1/B$ 的图中得到相移和频率 F . 尽管如此, 对于是峰值 [50–52, 66, 67, 246, 257] 还是谷值 [54, 248, 251, 267] 应该被赋予朗道指数尚不明晰. 我们的计算结果表明, 在朗道能带边缘出现了与整数朗道指数对应的电阻率 ρ_{zz} 和 ρ_{xx} 的峰值. 利用线性响应理论 [268–271] 估算电阻率分量 [272, 273]. 对于纵向情况, 电阻率 $\rho_{zz} = 1/\sigma_{zz}$. 在带边附近, 电导率 σ_{zz} 呈现谷值, 因此 ρ_{zz} 呈现峰值. 对于横向情况, $\rho_{xx} = \sigma_{yy}/(\sigma_{yy}^2 + \sigma_{xy}^2)$, 纵向电导率和场致霍尔电导率分别为

$$\sigma_{yy} = \frac{\sigma_0(1 + \delta)}{1 + (\mu B)^2},$$

$$\sigma_{yx} = \frac{\mu B \sigma_0}{1 + (\mu B)^2} \left[1 - \frac{\delta}{(\mu B)^2} \right], \quad (49)$$

式中 $\delta \ll 1$ 为振荡部分, σ_0 为零场电导率. 通过详细分析 [74,269,274] 可知, 峰的位置遵循关系式 $\rho_{zz} \sim \sigma_{zz}^{-1} \sim \sigma_{yy} \sim \rho_{xx}$, 因此 ρ_{zz} 和 ρ_{xx} 在朗道能带边缘出现的峰及其相移是相同的.

由图 13 可见, 数值结果与理论分析预测高度一致. 定义 $E_A = Ak_w$ 和 $E_M = Mk_w^2$, 对于 $E_M \neq E_A$, 随着拍频模式的出现, $\phi-E_F$ 曲线开始出现断裂. 在图 13(c) 中, 对于 $E_A < E_M$ 相移降到 $-5/8$ 以下, 而不是在栗弗席兹点周围从 $-1/8$ 单调地移到 $-5/8$ (即 $E_F = E_M$), 这是因为没有简单的 k_z^2 依赖关系 [77]. 在栗弗席兹点, 可以解析地证明相移为 $-9/8$, 这与图 13(c) 中的相移一致. 它相当于 $-1/8$, 通常认为它起源于大小为 π 的贝里相位.

由 (11) 式描述的狄拉克半金属具有时间反演对称性 [105,275]. 对于狄拉克半金属, 总相移可以取两个值, $\alpha \in [0, 1/4]$ 和 $[3/4, 1]$ 时为 $-1/8$, $\alpha \in [1/4, 3/4]$ 为 $-5/8$. 在栗弗席兹点附近, 总相移可能在两个值之间变化.

一般情况下电子载流子应该产生负相移, 空穴载流子应该产生正相移 [257]. 然而, 在狄拉克半金属 Cd_3As_2 的实验中, 电子载流子的相移为正值 [50,51,54]. 一种可能的解释是, 对于实验中的相移 $1/8-3/8$,

由于 2π 的周期性它们的实际值应为 $-7/8-5/8$. 表 3 列出了相移实验值的对应项. 在文献 [77] 中, 除了轨道量子干涉 [276]、塞曼劈裂 [52,247,277] 和费米面嵌套 [51] 等机制, 我们还证明了由于能带反转而出现的拍频模式.

表 3 从 Cd_3As_2 的实验中得到的相移 ϕ_{exp} . 转载自文献 [77]

Table 3. The phase shift ϕ_{exp} obtained from the experiment of Cd_3As_2 . Reproduced with permission from Ref. [77].

文献	ϕ_{exp}	ϕ_{Weyl}	ϕ_{Dirac}
[50]	0.06 — 0.08	-0.94 — -0.92	-5/8
[51]	0.11 — 0.38	-0.89 — -0.62	-5/8
[54]	0.04	-0.96	-5/8

6.2 节线半金属中的量子振荡

对于节线半金属无论是面内还是面外, 轮胎状费米面都具有最大截面和最小截面. 其次, 贝里相位沿与节线平行的圆为 0, 沿包围节线的圆为 π . 根据昂萨格关系得到 $F = (\hbar/2\pi e)A$, 其中 A 是费米面上垂直于磁场的极值截面面积. 当节线平面垂直于磁场, 即磁场取 B_z 时, $k_z = 0$ 平面上有两个极值截面 (图 14(b)). 通过理论分析发现, 外圆的高频项为 $F_\alpha = m(u + E_F)/(\hbar e)$, 内圆的低频项为 $F_\beta = m(u - E_F)/(\hbar e)$. 这两个频率可能导致拍频模式的出现 [278]. 在文献 [79] 中, 通过分析电阻率的

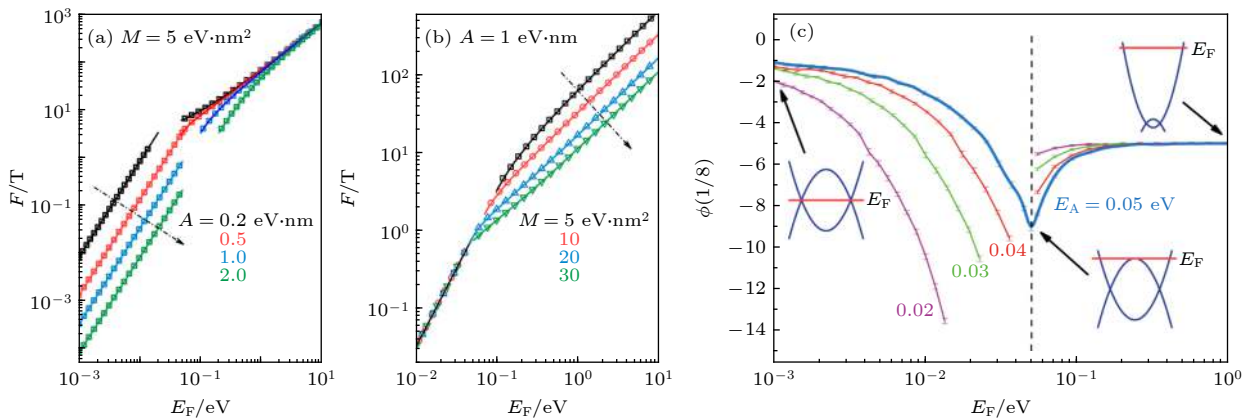


图 13 对于 (1) 式描述的外尔半金属, 数值 (散点) 和解析 (实线) 得到的频率 F 的曲线 (a) 固定 M 对应不同的 A ; (b) 固定 A 对应不同的 M . (c) 固定 E_M 不同的 E_A 对应的相移 ϕ 的曲线. 曲线断裂是因为在拍频模式出现时, F 和 ϕ 无法拟合. 垂直虚线表示栗弗席兹点. 转载自文献 [77]

Fig. 13. For the Weyl semimetal described in Eq. (1), the frequency F obtained by numerical (scatters) and analytical (solid curves): (a) Fixed M corresponds to different A ; (b) fixed A corresponds to different M . (c) Fixed E_M , for different E_A corresponds to the curve of phase shift ϕ . The curve breaks because F and ϕ can not fit when beating patterns occur. The vertical dashed lines represents the Lifshitz point. Reproduced with permission from Ref.[77].

计算结果得到了节线半金属的相移和频率. 需要指出的是, 当保护节线的对称性破缺时, 出现大小为 Δ 的能隙将导带和价带分开, 此时贝里相位为 $\phi_B = \pm\pi[1 - \delta/(2E_F)]$. 表 4 进一步总结了随机情况下相移的一般规则, 这些一般的规则可以帮助分析一些其他的材料, 例如 ZrSiS 和 Cu₃PdN^[259–264].

对于节线半金属, 大多数量子振荡实验都是针对 ZrSiS 族材料^[258–266], 其中费米能处既有电子型也有空穴型口袋^[140,141,259,264]. 文献 [79] 进一步分析了 Cu₃PdN^[120,121] 的相移.

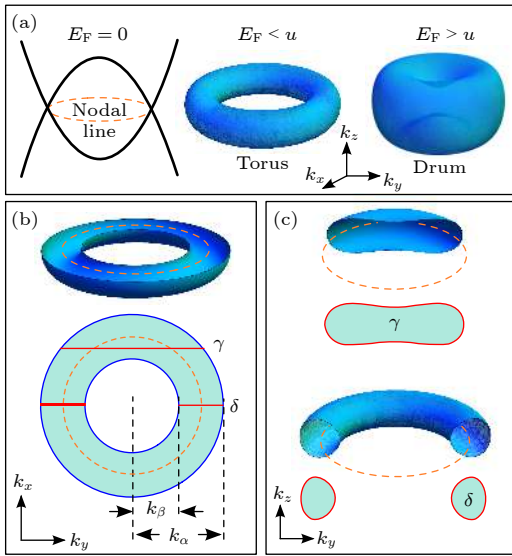


图 14 (a) (17) 式中节线半金属的节线 (虚线环), 轮胎状和鼓形费米面, E_F 是费米能, u 是模型参数; (b) 轮胎状费米面在节线平面内的最大 (α) 和最小 (β) 截面; (c) 轮胎状费米面在节线平面外的最大 (γ) 和最小 (δ) 截面. 转载自文献 [79]

Fig. 14. (a) In the model of nodal-line semimetal Eq.(17), the nodal line (dashed ring), torus and drum Fermi surface, E_F is Fermi energy, u is model parameter; (b) the maximum (α) and minimum (β) cross sections of the torus Fermi surface; (c) the maximum (γ) and minimum (δ) cross sections of the Fermi surface outside the nodal-line plane. Reproduced with permission from Ref. [79].

表 4 节线半金属的相移 ϕ . $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ 是图 14 中的极值截面. 转载自文献 [79]

Table 4. The phase shift ϕ of the nodal-line semimetal. $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ are the extremal cross sections in Fig. 14. Reproduced with permission from Ref. [79].

贝里相位	最大/最小	电子	空穴
α	最大	$-1/2 + 0 - 1/8 = -5/8$	$+5/8$
β	最小	$-1/2 + 0 + 1/8 = -3/8 \leftrightarrow 5/8$	$-5/8$
γ	最大	$-1/2 + 0 - 1/8 = -5/8$	$+5/8$
δ	最小	$-1/2 + \pi/2\pi + 1/8 = 1/8$	$-1/8$

6.3 3D 量子霍尔效应

2D 量子霍尔效应的发现打开了拓扑物态领域的大门^[157,279]. 在 3D 电子气中, 由于沿磁场方向的波矢 k 是好量子数, 量子霍尔效应通常只能在 2D 系统中观察到^[157,256,280–282]. 在文献 [78,283] 中, 我

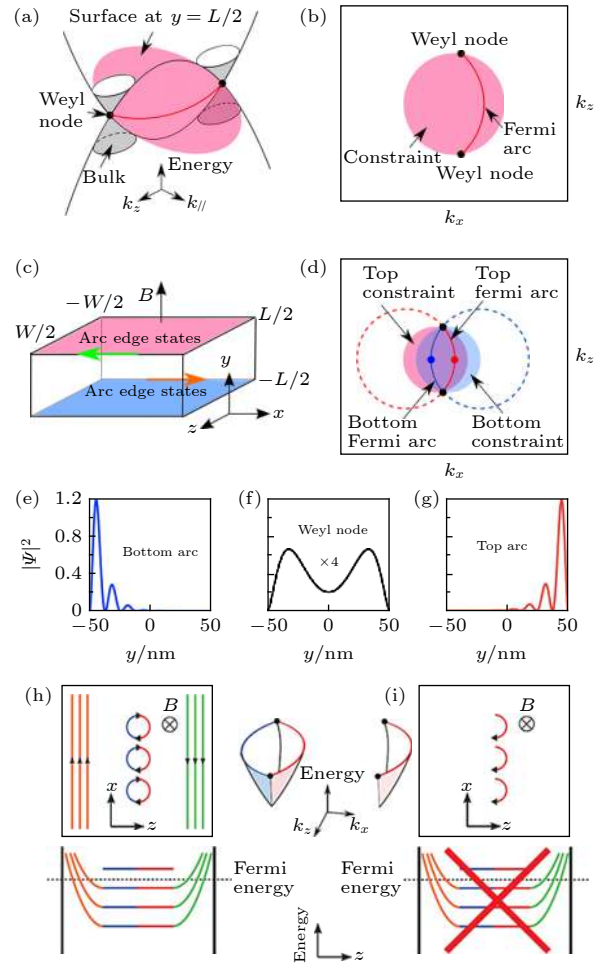


图 15 (a) 外尔半金属中的费米弧和体态的色散, $k_{//}$ 表示 (k_x, k_y) ; (b) 在 k_z-k_x 平面上 $y = L/2$, $E_F = E_w$ 处的费米弧; (c) 宽度为 W , 厚度为 L 的外尔半金属板; (d) 在 $E_F = E_w$ 处的费米弧 (实线); (e)–(g) 波函数在 $k_z = 0$ 处沿 y 轴的分布; (h) 3D 量子霍尔效应中的朗道能级和边缘态; (i) 单一表面的电子无法被 y 方向的磁场 B 驱动完成一个完整的回旋运动. 转载自文献 [78,283]

Fig. 15. (a) The energy dispersions of the Fermi arc and bulk states in a Weyl semimetal, $k_{//}$ stands for (k_x, k_y) ; (b) the Fermi arc at $y = L/2$ and $E_F = E_w$ in the k_z-k_x plane; (c) a Weyl semimetal slab with width W and thickness L ; (d) Fermi arc (solid) at $E_F = E_w$; (e)–(g) the distribution of wave function along y -axis at $k_z = 0$; (h) the Landau levels and edge states in the 3D quantum Hall effect; (i) an electron in single surface could not be driven in a y -direction magnetic field B to perform a complete cyclotron motion. Reproduced with permission from Refs. [78,283].

们描述了拓扑半金属中的 3D 量子霍尔效应. 拓扑半金属在平行于外尔点方向的表面处有拓扑保护的表面态, 即费米弧 [284,285–288] (图 15(a) 和图 15(b)).

单一表面上, 费米弧无法形成一个闭合的费米环, 而这一点对量子霍尔效应至关重要. 然而, 在外尔半金属中, 来自相反表面的费米弧 (图 15(c)) 可以形成所需的闭合费米环 (图 15(d)). 电子通过外尔点在相对表面的费米弧之间实现隧穿 (图 15(e)—图 15(g)), 通过这一机制电子可以完成完整的回路运动, 从而实现 3D 量子霍尔效应. 在实际材料中, 隧穿距离受平均自由程的限制, 在高迁移率的拓扑半金属 [60,103] 中, 平均自由程大约为 100 nm, 在一些材料中甚至可以达到 1 μm [289], 在我们的计算中块体厚度为 100 nm. 为使量子霍尔效应仅来自费米弧的贡献需将费米能级调到外尔点上来耗尽体态载流子 [290]. 外尔半金属 TaAs 家族 [291–295] 和狄拉克半金属 Cd_3As_2 和 Na_3Bi 具有量子霍尔效应所要求的极高迁移率 [46,48,50,51,54]、低载流子密度 [224] 等特性. 通过费米弧的 3D 量子霍尔效应预计可以存在于 Cd_3As_2 [224,296–298], Na_3Bi 以及 TaAs 家族的材料中 [61,290].

根据久保 (Kubo) 公式, 我们计算了霍尔电导 [78,299–303]. 当费米能远离外尔点时, 霍尔电导服从通常的 $1/B$ 依赖关系. 当费米能向外尔点移动时, 开始出现 σ_H^0 的量子化平台.

从图 15(c) 可见, 费米弧的边界态具有独特的 3D 空间分布. 具体而言, 上边界态向左传播 (绿色箭头), 下边界态向右传播 (橙色箭头). 这种费米弧边缘态的独特 3D 分布可以通过扫描隧道显微镜 [304] 或微波阻抗显微镜 [305] 来探测. 与拓扑绝缘体 [281,282] 不同, 基于费米弧的量子霍尔效应需要两个表面的共同作用. 最近的工作 [306] 系统地探讨了外尔半金属中 3D 量子霍尔效应的边缘态图像. 外尔半金属中不同手性外尔点处的速度相反, 强磁场使体态进入手征朗道能带, 这一点显著地影响了边缘态的载流子输运. 除了上下表面的费米弧通过隧穿形成一个闭环 [78] 外, 在磁场作用下拓扑半金属中还观察到其他奇异的量子霍尔现象 [296,307,308]. 在垂直磁场 \mathbf{B} 中, 基于半经典运动方程从理论上给出了边缘态的闭合 3D 轨道. 在 x 方向, 由于手征朗道能带的影响, 上 (下) 表面费米弧态的半圆轨道形成跳跃边缘态. 在 z 方向, 手征朗道能带和侧面的费米弧态共同构成闭合轨道. 此外, 由于手征朗道能带沿磁场方向色散, 边缘态的量子通道可以由

倾斜的磁场控制, 导致边缘态的分布和霍尔电导的行为发生了显著的变化. 当调整 B_z 并保持 B_y 不变时, 边缘态的位置会从一侧变化到另一侧, 霍尔电导也随之改变符号. 文献 [306] 利用数值方法进一步分析了局域态密度分布, 以及霍尔电导随磁场大小和方向的变化.

3D 量子霍尔效应也可以由电荷密度波 (CDW) 机制 [309] 实现, 最近在 ZrTe_5 [310] 的实验中观察到了这一机制, 并看到了清晰的量子化平台. 在文献 [87] 中我们详细地探讨了这一机制, 并给出了一个完备的理论可以解释实验的主要特征. 我们发现电荷密度波可以在 1D 的朗道能带上产生, 而且强烈依赖于磁场的大小. 磁场诱导了 3D 电子气向电荷密度波相的二阶相变, 导致朗道能带打开一个能隙从而使体态绝缘, 即 3D 电子气变为一系列的 2D 量子霍尔态, 从而实现 3D 量子霍尔效应 (图 16).

通过沿 z 方向的电子-电子或电子-声子相互作用, 可使 k_F 和 $-k_F$ 附近的电子之间产生耦合从而打开电荷密度波能隙 (由序参量 Δ 描述). 电子-电子相互作用为 [311,312]

$$H_{\text{e-e}} = - \sum_{\mathbf{k}} |\Delta| \left(e^{i\phi} \hat{d}_{\mathbf{k}+}^\dagger \hat{d}_{\mathbf{k}-} + \text{H.c.} \right) + \frac{2|\Delta|^2 V}{U(2k_F)},$$

其中, 序参量定义为 $\Delta = \Delta_{\text{e-e}} = [U(2k_F)/(2V)] \cdot \sum_{\mathbf{k}} \langle \hat{d}_{\mathbf{k}-2k_F}^\dagger \hat{d}_{\mathbf{k}} \rangle$, V 表示体积, $\Delta = |\Delta| e^{i\phi}$. 电子-电子相互作用势采用汤川势 $U(2k_F) = e^2 / \{ \epsilon_r \epsilon_0 \cdot [(2k_F)^2 + \kappa^2] \}$, 其中 ϵ_r (ϵ_0) 表示介电常数, $1/\kappa$ 为屏蔽长度. 在随机相位近似下 $\kappa = \sqrt{e^3 B / (4\pi^2 \epsilon \hbar^2 v_F)}$, 此处 $\epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r$. 电声相互作用的哈密顿量为 [313,314]

$$H_{\text{e-ph}} = \sum_{\mathbf{k}} |\Delta| \left(e^{i\phi} \hat{d}_{\mathbf{k}+}^\dagger \hat{d}_{\mathbf{k}-} + \text{H.c.} \right),$$

其中 $\Delta = \Delta_{\text{e-ph}} = (\alpha_q/V) \left(\langle \hat{b}_q \rangle + \langle \hat{b}_{-q}^\dagger \rangle \right)$, 电声耦合势 α_q 同样采用汤川势的形式. 在 $\pm k_F$ 附近, 0+ 朗道能带的平均场哈密顿量为

$$\mathcal{H}_{k_z}^{0+} = \begin{bmatrix} \hbar v_F (k_z \pm k_F) & \Delta \\ \Delta^* & -\hbar v_F (k_z \pm k_F) \end{bmatrix},$$

其中, 费米速度 $\hbar v_F \equiv |\partial E_{k_z}^{(0+)}/\partial k_z|_{k_z=k_F}$, 电荷密度波序参量可以通过由 $\partial E_g/\partial |\Delta|$ 定义的能隙方程自洽计算得到, 其中基态能量 $E_g \equiv \langle H \rangle$. 进一步计算发现 [87], 使用电子-电子相互作用计算的序参量仅在大于 10 T 的阈值磁场时是足够大的, 但比实验测量的值大. 另一方面, 对于具有适当耦合常数的电子-声子相互作用, 由非欧姆的 I - V 关系确定的

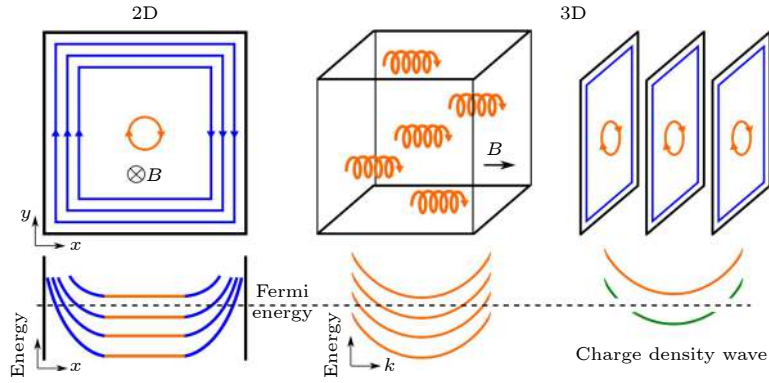


图 16 左图: 2D 电子气在磁场中形成量子霍尔态. 中间图: 3D 朗道能级变为一系列 2D 的朗道能带. 右图: 电荷密度波使朗道能带打开能隙, 使体态绝缘, 可以观察到 3D 量子霍尔效应. 转载自文献 [87]

Fig. 16. Left: the quantum Hall state in 2D electron gas under magnetic field. Center: in 3D, the Landau levels turn to one dimensional Landau bands. Right: the charge density wave gap the Landau band, so that the bulk is insulating and the 3D quantum Hall effect can be observed. Reproduced with permission from Ref. [87].

阈值磁场可以小于 1.5 T, 因此, 电子-声子相互作用可能是 ZrTe_5 实验中 [310] 导致电荷密度波的主要机制.

在实验中, 霍尔电阻率的平台覆盖了 1.7—2.1 T 的较宽范围, 以 (e^2/h) 为单位的霍尔电导率由电荷密度波的层数决定. 电荷密度波波长 λ_{cdw} 与费米波长相关:

$$\lambda_{\text{cdw}} = \lambda_{\text{F}}/2 = \pi/k_{\text{F}}.$$

在 1.7—2.1 T 之间观察到的 ρ_{xx} 平台意味着存在公度的电荷密度波, 即电荷密度波波长与晶格常数 a 的整数倍相称. 通过比较公度和非公度的电荷密度波在 2.1 T 附近的基态能量, 发现对于公度和非公度的电荷密度波在磁场分别在 [1.7, 2.1] T 以及 [2.1, 3.0] T 的区间时具有较低的能量, 因此在两种电荷密度波之间存在交叉. 在 $B \in [1.7, 2.1]$ T 范围内固定的 λ_{cdw} 表示费米能不变, 即系统属于巨正则系综载流子的数量可以改变. 相比之下, 非公度电荷密度波中的载流子数量不能改变. 因此, 电子能量的变化导致 $B \in [1.7, 2.1]$ T 范围内公度的电荷密度波基态能量降低. 进一步将磁场增加到 2.1 T 以上, 磁场将把费米能推得更低 (最终到达带底), 进一步说明由磁场诱导的电荷密度波存在从公度到非公度的交叉.

7 极强磁场

7.1 量子极限下的负磁阻

选择随机高斯势来探讨量子极限下无序散射

对磁阻的影响

$$U(\mathbf{r}) = \sum_i \frac{u_i}{(d\sqrt{2\pi})^3} e^{-|\mathbf{r}-\mathbf{R}_i|^2/(2d^2)}, \quad (50)$$

式中, u_i 表示随机分布杂质在 \mathbf{R}_i 处的散射强度, d 是确定散射势范围的参数. 杂质势范围 d 和磁长度 l_B 定义了两个区域, 长程势区域 $d \gg l_B$ 和短程势极限 $d \ll l_B$. 在强磁场极限下, 如果 $B > 10$ T, 磁长度 l_B 小于 10 nm.

通过考虑散射时间对磁场的依赖性, 我们在强场极限 ($B \rightarrow \infty$) 下, 即对于第 0 个朗道能带, 费米面上的态间散射的弛豫时间为 $\tau = \frac{\hbar^2 v_{\text{F}}^0 \pi l_B^2}{V_{\text{imp}}}$ [76], 得到强场极限下的电导率

$$\sigma_{zz,0}^{\text{sc}} = \frac{e^2}{h} \frac{(\hbar v_{\text{F}}^0)^2}{V_{\text{imp}}}. \quad (51)$$

因此 $\sigma_{zz,0}^{\text{sc}}$ 的磁场依赖性由费米速度 v_{F}^0 给出. 当忽略费米速度的磁场依赖性时, 得到与 B 无关的电导率, 这与先前工作中速度是常数的结果是一致的 [315]. 文献 [76] 中进一步探讨了费米速度的磁场依赖性可以导致正、负磁导的不同情况.

当磁场为零时, 磁长度发散, $d/l_B \rightarrow 0$, 给出最小电导率 [76]

$$\sigma_{zz}(0) = \frac{e^2}{h} \frac{4(Mk_w)^2}{V_{\text{imp}}} e^{4d^2 k_w^2}. \quad (52)$$

注意外尔点处态密度在零磁场时趋于 0, 类似的结果在没有朗道能级的情况下也曾被发现过 [316]. 通过进一步的计算得到磁导 [76]

$$\Delta\sigma_{zz}(B) \equiv \frac{\sigma_{zz}(B) - \sigma_{zz}(0)}{\sigma_{zz}(0)} = \frac{B}{B_0}, \quad (53)$$

其中 $B_0 = \hbar/(2ed^2)$. 可见, 磁导是由杂质势的范围给出的, 与模型参数无关. 这意味着对外尔半金属有 \hat{z} 方向的正线性磁导. 通过数值计算发现, 对于长程无序系统也具有正的磁导, 尽管对于弱的短程无序, 系统往往趋向于具有负的磁导^[40].

图 17 给出了不同极限下的纵向和横向磁导. 特别地, 图 17(f) 中长程势极限下的 $\sigma_{xx} \propto 1/B$. 垂直于 x - y 平面的场中, 还存在霍尔电导率 $\sigma_{yx} = \text{sgn}(M)(k_w/\pi)e^2/h + en_0/B$, 其中第一项是反常霍尔电导率, 第二项是经典电导率. 在弱场中, 经典霍尔效应占主导地位, σ_{xx} 和 σ_{yx} 都与 $1/B$ 成正比, 在磁场 B 中电阻 $\rho_{xx} = \sigma_{xx}/(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yx}^2)$ 是线性的. 注意, 这里垂直场中的线性磁阻与以前的机制并不相同^[274,317].

7.2 量子极限下的背散射禁止

拓扑绝缘体作为拓扑物态中最先被关注的体系, 为探索奇异的拓扑物态^[318–325] 提供了诸多线索. 在强磁场中, 2D 拓扑绝缘体的最低朗道能级相互交叉, 该特征可以作为量子自旋霍尔相的标志^[326,327]. 同样在 2D 情况下, 干涉效应^[328] 也可以用来探测量子自旋霍尔相. 然而在 3D 时, 如何利用最低朗道能带来识别拓扑绝缘体却很少被讨论. 在文献^[81] 中, 我们研究了 3D 拓扑绝缘体在强场

量子极限下的磁阻 (图 18(b)). 在临界磁场中, 背散射在量子极限下被完全抑制, 这一效应可以用来识别拓扑绝缘体. 不过这种禁止的背散射在拓扑半金属中是不存在的^[74,76,238]. 这一理论与最近的实验展现出惊人的一致性 (图 18(c) 和图 18(d)). 此外, 这一机制可以很好地应用于那些能隙较小的材料, 例如 ZrTe_5 ^[329,330] 和 Ag_2Te ^[331].

在沿 z 方向的强磁场 B 中, 能谱量子化为一系列 1D 的朗道能带 (图 18(a) 和图 18(b)). 最低的两个朗道能带分别表示为 $0+$ 和 $0-$, 其能量为 $E_{0\pm} = C_0 + C_z k_z^2 + C_{\perp}/l_B^2 \pm \sqrt{m^2 + V_n^2 k_z^2}$, 质量项 $m = M_0 + M_z k_z^2 + M_{\perp}/l_B^2$. 当费米能仅与 $0+$ 朗道能带相交, 其本征态为

$$|0, +, k_x, k_z\rangle = \begin{bmatrix} 0 \\ -i \sin(\theta/2) \\ 0 \\ \cos(\theta/2) \end{bmatrix} |0, k_x, k_z\rangle, \quad (54)$$

其中 $\cos \theta \equiv -m/\sqrt{m^2 + (V_n k_z)^2}$. 在固体中, 电子输运相对地受背散射的影响, 在 1D 的朗道能带上尤其显著, 因为费米能上只有两种态, 如图 18 中的 k_F 和 $-k_F$ 所示. 这两种态之间的背散射由它们之间的散射矩阵元刻画. 由 (54) 式中的旋量本征态可以发现, k_F 和 $-k_F$ 之间的散射矩阵元的模方正比于形状因子:

$$I_S = \cos^2 \theta |_{k_z=k_F}. \quad (55)$$

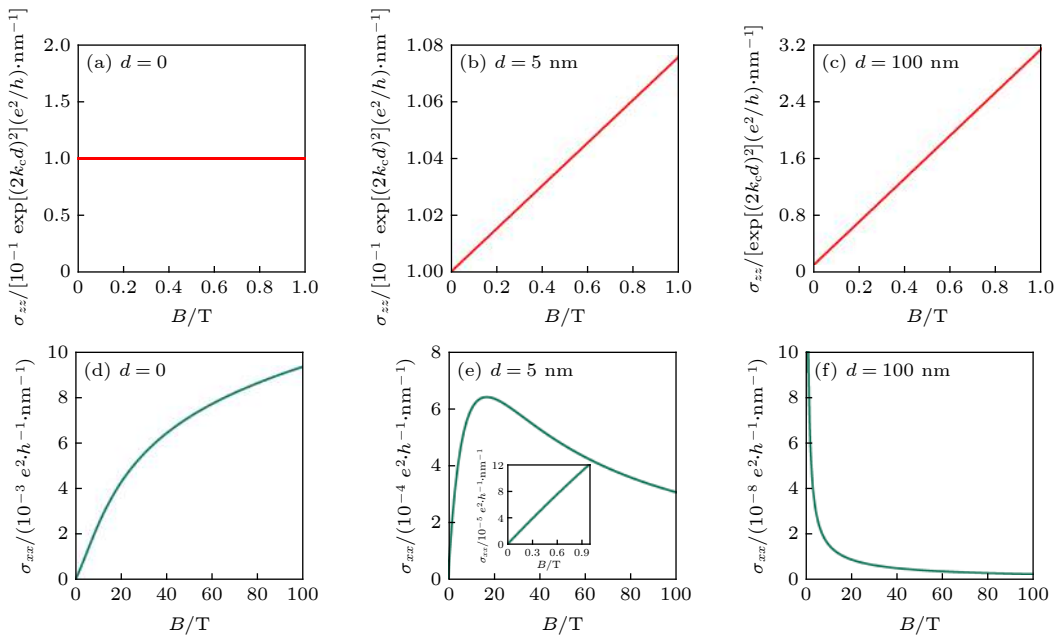


图 17 不同的势范围下, 外尔半金属在 \hat{z} 方向磁场 B 中的纵向电导率 σ_{zz} 和横向电导率 σ_{xx} . 转载自文献^[76]

Fig. 17. The longitudinal conductivity σ_{zz} and transverse conductivity σ_{xx} of the Weyl semimetal in the \hat{z} -direction magnetic field B under the different potential ranges. Reproduced with permission from Ref. ^[76].

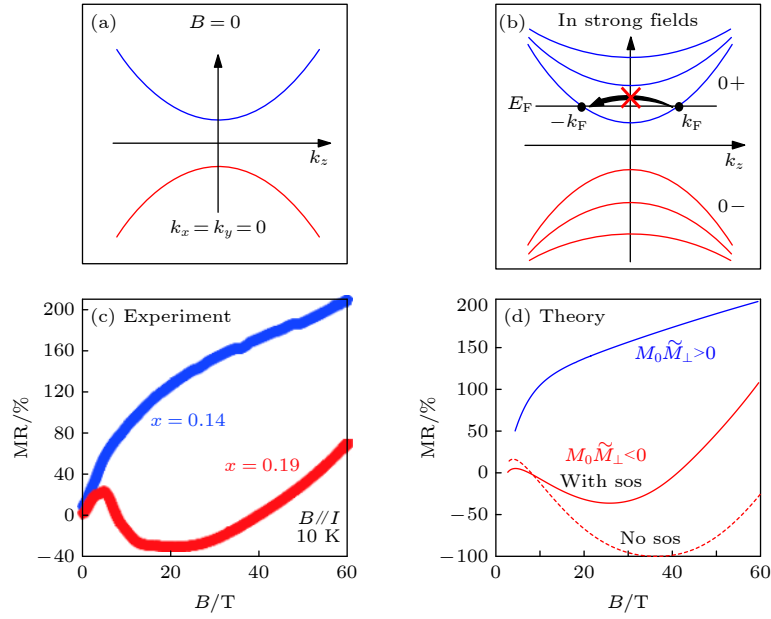


图 18 (a) 3D 拓扑绝缘体的零场能谱 ($k_x = k_y = 0$); (b) 在强磁场中, 费米能只穿过 0+ 朗道能带; (c) 实验测得 $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}$ 的磁阻 [226]; (d) 理论计算出的磁阻. 转载自文献 [81]

Fig. 18. (a) The zero field energy spectrum of 3D topological insulator ($k_x = k_y = 0$); (b) in a strong magnetic field, fermi energy E_F can only crosses the 0+ Landau energy band; (c) the magnetoresistance of $\text{Pb}_{1-x}\text{Sn}_x\text{Se}$ in experiment [226]; (d) the theoretical calculated magnetoresistance. Reproduced with permission from Ref. [81].

m 在由 $M_0 + M_z k_F^2 + M_\perp e B_c / \hbar = 0$ 决定的临界磁场 B_c 下为 0, 其中 k_z 等于费米能对应的费米波矢 k_F . 对于拓扑绝缘体, $M_0 M_z < 0$ 并且 $M_0 M_\perp < 0$, B_c 有解, 因此背散射被完全抑制. 这种被禁止的背散射将导致电阻随磁场的变化而下降, 可以作为在实验中区分拓扑绝缘体相的一个显著特征.

7.3 外尔费米子湮灭

当外界强磁场与外尔费米子耦合时其手性消失并获得质量, 而这是外尔费米子最明显的两个特征, 在这个意义上, 外尔费米子被湮灭. 在外尔半金属 TaP 中我们实现了这种磁耦合 [64].

2.1 节给出了沿 z 方向磁场中的朗道能带. 现在把这种情况推广到垂直于 y 方向 $\mathbf{B} = B(\sin \phi, 0, \cos \phi)$ 的任意场, 其中 ϕ 是 z 方向和磁场之间的夹角. 朗道规范可选为 $\mathbf{A} = (-B_z y, 0, B_x y)$, 在皮尔斯 (Pierls) 代换下

$$\mathbf{k} \rightarrow \left(k_x - \frac{y \cos \phi}{l_B^2}, -i\partial_y, k_z + \frac{y \sin \phi}{l_B} \right), \quad (56)$$

哈密顿量变为

$$H(\mathbf{k}) \rightarrow \begin{bmatrix} i\mathcal{M}_k^B & A \left(k_x - \frac{y \cos \phi}{l_B^2} - \partial_y \right) \\ A \left(k_x - \frac{y \cos \phi}{l_B^2} + \partial_y \right) & -\mathcal{M}_k^B \end{bmatrix}, \quad (57)$$

其中 $\mathcal{M}_k^B = M_1 [k_c^2 - (k_x - y \cos \phi / l_B^2) + \partial_y^2 - (k_z + y \sin \phi / l_B^2)^2]$. 在 $\phi = 0$ 即磁场沿着 z 方向时, 完全回到 2.1 节给出的结果. 如果 $\phi \neq 0$, 能谱为

$$E_k^{\nu \pm} = \pm \sqrt{\mathcal{M}_\nu^2 + (A k_{//} \sin \phi)^2}, \quad (58)$$

其中 $\mathcal{M}_\nu \equiv M_1 \left[k_c^2 - k_{//}^2 - \frac{2}{l_B^2} (\nu + 1/2) \right]$. 通过数值求解得到 x - z 平面上任意方向的能谱.

图 19 给出了外尔半金属的朗道能带. 当磁场沿 z 方向 ($\theta = 0$) 时, 最低的朗道能带 (红色) 穿过费米能 (虚线). 随着磁场从 z 方向旋转到 x 方向 ($\theta = \pi/2$), 最低朗道能带发生了移动. 当磁场沿 x 方向时, 朗道能带的能谱是粒子-空穴对称的, 并且由于外尔费米子之间的耦合存在一个能隙. 这就是为什么在外尔半金属 TaP [64] 的强场量子极限下, 霍尔电阻出现明显的符号反转. 由于能隙的存在, 外尔费米子获得质量并失去其手性. 由于具有手性和无质量是外尔费米子的两个主要特征, 因此霍尔信号表明外尔费米子被湮灭.

7.4 外尔半金属中的不饱和磁化

强磁场中外尔费米子的第 0 个朗道带是纯手征的 [27,210,211]. 然而, 量子极限下的磁阻复杂地依赖于杂质散射的性质, 不能确定地给出准粒子的能

谱信息^[74,76,77,238]. 相比之下, 电子的磁响应要简单得多, 因为它们不会与杂质散射相互作用. 事实上, 它们仅由电子的热力学势 Ω 对于磁场 H 的导数决定, 而且已被证明可以用来探测费米面的性质^[241,332,333]. 在文献^[85]中我们提出了一种在量子极限下利用磁响应探测相对论性准粒子的方法. 我们证明外尔半金属 TaAs 的有效横向磁化强度 M_T 和有效平行磁化强度 $M_{//}$ 是超越量子极限的准线性场依赖的, 这些非饱和磁响应明显不同于非相对论性准粒子. 该方法作为一种热力学探测手段, 可用于识别拓扑材料中的相对论性准粒子.

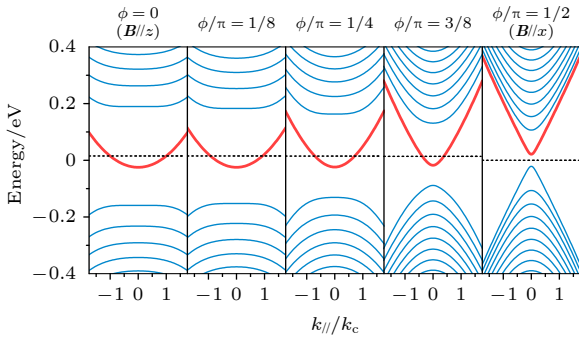


图 19 外尔半金属在垂直 y 方向的磁场 \mathbf{B} 中的朗道能带, 其中 $k_{//} \equiv k_x \sin \phi + k_z \cos \phi$ 为平行于 \mathbf{B} 的波矢, $\tan \phi = B_x / B_z$. 红色曲线是第 0 个朗道能带, 虚线是费米能. 转载自文献^[70]

Fig. 19. The Landau energy band of Weyl semimetal in the magnetic field \mathbf{B} perpendicular to the y direction, where $k_{//} \equiv k_x \sin \phi + k_z \cos \phi$ is the wave vector parallel to \mathbf{B} , $\tan \phi = B_x / B_z$. The red curve is the 0th Landau energy band, and the dashed line represents the Fermi energy. Reproduced with permission from Ref. ^[70].

磁化强度来自于导带和价带的共同贡献. 当磁场增加时, 朗道能带相继离开费米面, 在只有最低的朗道能带被占据之前 $M_{//}$ 在零附近振荡 M_T 随着磁场的增加而下降. 在磁场较弱时有很多朗道能带被占据, 费米能 E_F 几乎保持不变, 因此对于固定费米能 E_F 和固定载流子浓度 N_c 两种情况弱场的计算结果几乎相同. 然而, 当系统进入量子极限时, E_F 在强磁场中的变化将不再可以忽略. 如果 E_F 固定, 零点能将使 E_F 之上的第 0 个朗道能带继续升高以致超过临界磁场, 导致 $M_{//}$ 和 M_T 消失. 如果 N_c 固定, 则无论磁场增加多少, E_F 都将被固定在第 0 个朗道能带的边缘, 导致 $M_{//}$ 出现饱和, M_T 在一个常值上保持不变. 这种强场行为可以归结为价带和导带的贡献在强场下饱和, 换句话说, 由于非

相对论性的能带色散, $M_{//}$ 和 M_T 在量子极限下是不变的. 对于铋、硫掺杂的 Bi_2Te_3 和 InSb 这种 3D 有能隙的体系, 实验观察到了 $M_{//}$ 和 M_T 在量子极限下明显的饱和行为^[333,334].

相比之下, 由于能带反转和相对论性能谱, 无能隙的外尔费米子以一种不同的方式对磁化强度产生贡献. 在弱场中, $M_{//}$ 和 M_T 都围绕一个平均值振荡. 当除了第 0 个以外的所有朗道能带都离开 E_F 时, 两种手征模式都对磁响应有贡献, 导致强磁场中不饱和的 $M_{//}$ 和 M_T .

先前的理论^[335–337] 只针对不同类型的能带结构在全磁场范围内计算了 $M_{//}$, 这里为任意角度磁场下的 $M_{//}$, M_T 建立一个更一般的磁化理论. 详细的计算参考文献^[85], 这里给出强场极限下的主要结论. 由方程 (2) 描述的单节点 3D 无质量外尔费米子的哈密顿量可以写为

$$H = v_a p_x \sigma_x + v_b p_y \sigma_y + v_c p_z \sigma_z. \quad (59)$$

以前的研究主要集中于弱磁场下的磁化, 如文献^[338]所指出的外尔半金属的贝里顺磁性. 此外, 最近对晶格模型的理论计算表明, 轨道对磁化强度大小和符号的贡献取决于外尔/狄拉克半金属中费米能的精确值^[339]. 对于模型 (59) 量子极限下的平行磁化强度为

$$M_{//} \propto -B \ln \Gamma, \quad (60)$$

横向磁化强度为

$$M_T \propto -B \ln \Gamma \frac{\partial \Delta}{\partial \phi}, \quad (61)$$

其中 $\Gamma = 2\Delta l_B / (v_b \sqrt{2\Delta})$, $-\Delta$ 代表价带的截断能, $\delta = (v_a / v_b) \cos \alpha \cos \theta + (v_c / v_b) \sin \alpha \sin \theta$, 在这里 $\alpha = \tan^{-1} [(v_c / v_a) \tan \theta]$. 当较高外尔锥的磁化被猝灭时^[338], 非饱和磁化来自量子极限下被视为负能带的较低外尔锥. 量子极限下的磁化行为不依赖于具体的材料参数, 这是一个普遍性的特征.

图 20 给出了在强磁场中对 TaAs 样品进行测量得到的 $M_{//}$ 和 M_T . 由图可见实验数据可以很好地用 (60) 式和 (61) 式进行拟合. 我们对 3D 外尔费米子的理论计算再现了弱场中的德哈斯-范阿尔芬 (dHvA) 振荡以及量子极限下 $M_{//}$ 显著增强的行为. 需要强调的是, 不同于非相对论性电子的饱和磁化, 对于固定 E_F 和固定 N_c 两种情况 $M_{//}$ 和 M_T 在强磁场中均给出了类似的趋势.

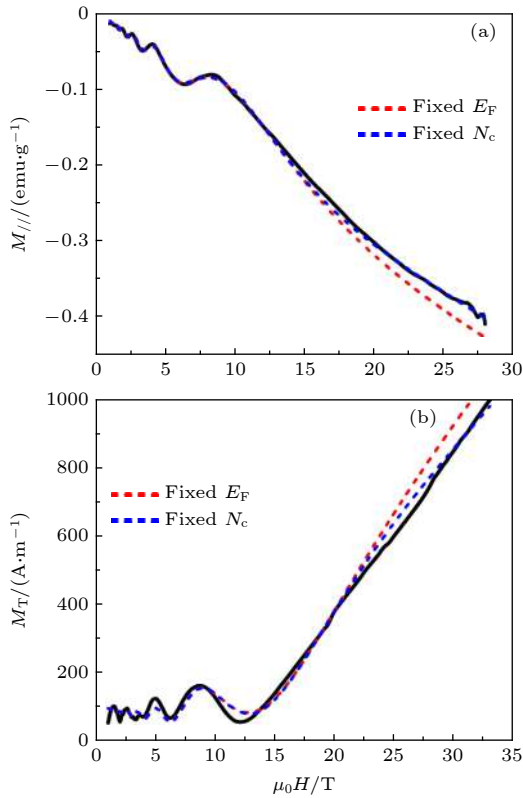


图 20 实验与理论比较 (a) $M_{//}$ (黑线); (b) M_T (黑线). 转载自文献 [85]

Fig. 20. Comparison between experiments and theory for the $M_{//}$ and M_T of TaAs: (a) $M_{//}$ (black line); (b) M_T (black line). Reproduced with permission from Ref. [85].

7.5 反常热电效应

热电效应是对材料拓扑性质更敏感的一种探测手段. 非平庸电子的存在导致拓扑材料呈现出反常的热电行为. 在较高的磁场下, 能斯特信号在热电势接近零的临界磁场处出现符号反转. 在强场量子极限下, 热电势和能斯特信号都呈现出奇异的峰值. 我们认为这些反常行为可以归因于拓扑材料中第 0 个朗道能带的能隙闭合和能带反转 [86].

过渡金属五碲化物 (ZrTe_5 , HfTe_5 等) 作为非常接近拓扑相变临界的拓扑材料引起了相当大的关注 [43–45, 340–347]. 近 40 年来, 作为热电材料的 ZrTe_5 以其巨大的热电势而闻名 [348]. 然而, 关于 ZrTe_5 在磁场中的热电性质却很少有人研究. 在存在垂直磁场和纵向热梯度的情况下, 载流子的扩散可以产生纵向电场 $E_x = -S_{xx} \cdot |\nabla T|$ (热电势) 和横向电场 $E_y = S_{xy} \cdot |\nabla T|$ (能斯特效应) [349]. 由于这些热电效应与电导率的导数成正比, 它们对异常的载流子输运尤为敏感, 并已被用于研究各种半金属和拓扑材

料 [350–359].

我们详细探讨了 ZrTe_5 在磁场下的热电效应 [86]. 图 21 给出了热电势 $-S_{xx}$ 的温度依赖性. 高温时, 负的 $-S_{xx}$ 表明主要载流子是空穴. 随着温度的降低, $-S_{xx}$ 在温度大约为 $T^* = 132$ K 时变为正, 并且电阻率达到峰值, 表明 ZrTe_5 从 p 型半导体转变为 n 型半金属, 这一点与以前的研究相一致 [346, 360]. 由于不同迁移率的电子和空穴载流子的存在, ZrTe_5 在室温下表现出巨大的磁热电势. 其热电势在 9 T 的磁场中可增加至 $370 \mu\text{V}/\text{K}$, 比大多数材料的热电势都大, 但比外尔半金属的热电势要小 [361].

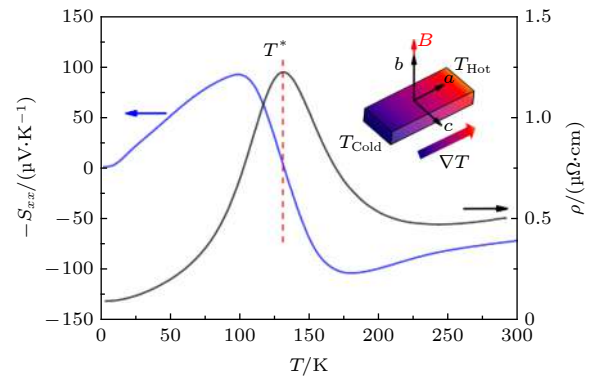


图 21 零磁场下 ZrTe_5 的电阻率 $\rho(T)$ (黑色) 和塞贝克系数 $-S_{xx}(T)$ (蓝色) 的温度依赖曲线. 插图: 实验测量示意图, B 是磁场, ∇T 是温度梯度, a , b 和 c 是晶轴. 转载自文献 [86]

Fig. 21. Temperature dependence of the electrical resistivity $\rho(T)$ (black) and Seebeck coefficient $-S_{xx}(T)$ (blue) of ZrTe_5 at zero magnetic field. Inset: the measurement setup. B is the magnetic field and ∇T is the temperature gradient. a , b and c are crystallographic axes. Reproduced with permission from Ref. [86].

在更低温度下, $-S_{xx}$ 甚至随着磁场的增加而准线性增长, 直至达到量子极限. 这种线性热电势成为 ZrTe_5 区别于其他材料的主要特征 [353, 354, 356, 357]. 在低温下实验样品中的平庸电子和非平庸电子均对热输运有贡献 [330, 360]. 为了区分常规和反常的能斯特信号, 使用经验公式来拟合弱场数据 [357]

$$S_{xy}^{\text{tot}} = S_{xy}^{\text{N}} \frac{\mu B}{1 + (\mu B)^2} + S_{xy}^{\text{A}} \tanh\left(\frac{B}{B_0}\right), \quad (62)$$

其中 μ 是载流子迁移率, B_0 是饱和磁场. S_{xy}^{N} 和 S_{xy}^{A} 分别表示常规和反常能斯特信号的幅度. 在弱场下, 这种经验表达式可以很好地拟合实验数据. 根据我们的分析, 反常的能斯特信号出现在 30 K 以下, 并且随着温度的降低, $S_{xy}^{\text{A}}/S_{xy}^{\text{N}}$ 急剧增加. 在最低温度下, 反常信号和常规能斯特信号的幅度相

当. 所有结果表明, 在 30 K 以下, 非平庸电子开始主要支配磁热电势的特性, 导致了 $-S_{xx}(B)$ 和 $S_{xy}(B)$ 的反常行为.

最近的研究表明, ZrTe_5 的整数朗道指数可以利用电阻率的峰值位置来确定^[310,330,347,362]. 当磁场达到 5.2 T 以上时, 所有电子占据最低朗道能带, 即系统处于量子极限. 此时随着磁场的增加, 狄拉克半金属或外尔半金属的热电势预期会非饱和地线性增长^[363].

为了进一步阐明量子极限下不寻常的热电响应, 继续增加磁场至 33 T (图 22(a)), 此时 $-S_{xx}$ 开始增加. 相应地, 在系统进入量子极限后, 能斯特信号出现一个峰值. 另一个反常特征是能斯特信号 S_{xy} 在 $B^* = 14$ T 附近符号发生了反转, 同时不同温度下的热电势 $-S_{xx}$ 收敛到零. 之前, 在外尔半金属 TaP 中观察到场诱导的 ρ_{yx} 符号发生变化, 其中最低朗道能带在极强磁场下移动到化学势之上, 电子载流子数量急剧减少^[64]. 载流子类型的改变可能是导致能斯特或霍尔信号的符号出现反转的原因. 然而, 对于我们的样品, 低温下的电荷载流子

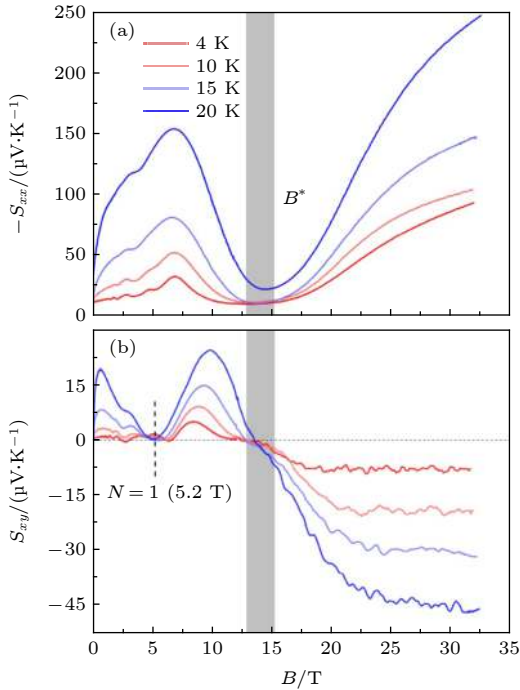


图 22 (a) 不同温度下对 $-S_{xx}$ 的强场测量; (b) 不同温度下对 S_{xy} 的强场测量. 临界场 B^* 附近 S_{xy} 改变符号, $-S_{xx}$ 收敛到零. 转载自文献^[86]

Fig. 22. (a) High-field measurements of $-S_{xx}$ at several temperatures; (b) high-field measurements of S_{xy} at several temperatures. Near the critical field B^* , S_{xy} changes its sign and $-S_{xx}$ converges to zero. Reproduced with permission from Ref. ^[86].

只是电子^[360]. 此外, 霍尔电阻 ρ_{yx} 在 B^* 附近变化平稳. 因此, 载流子类型的变化不可能解释 S_{xy} 的反常符号反转.

使用 3D 有质量狄拉克模型探讨量子极限下反常 $-S_{xx}$ 和 S_{xy} 的潜在机制^[44]. 可以得到第 0 个 ($\nu = 0$) 朗道能带为^[86]

$$E_{0s}(k_z) = s \sqrt{\left(m - \frac{g\mu_B B}{2}\right)^2 + v^2 k_z^2}, \quad (63)$$

其中 $s = \pm 1$ 代表电子和空穴带, $\lambda = \pm 1$, v 是费米速度, m 是描述 γ 点附近小能隙的狄拉克质量^[329]. 带底时

$$E_{0s}(0) = s \left| m - \frac{g\mu_B B}{2} \right|. \quad (64)$$

因此, 对于有限质量 m , 第 0 个电子和空穴的朗道能带之间的能隙随磁场先减小后增大. 到达临界磁场 $B^* = 2m/(g\mu_B)$ 时体系处于无能隙状态. 相反, 在普通材料中, 第 0 个电子和空穴的朗道能带之间的能隙随磁场单调增加. 由于 ZrTe_5 的狄拉克质量小, g 因子大, 在中强磁场下很容易观察到这种朗道能隙的闭合. 此外, 对于这种低密度系统在强磁场下载流子密度是固定的,

$$n = \frac{1}{2\pi l_B^2} \sum_{k_z} \left[f(E_{0+}) + \sum_{\nu, \lambda} f(E_{\nu+\lambda}) \right], \quad (65)$$

其中 $f(x)$ 是费米-狄拉克分布. 由于第 0 个朗道能带能隙闭合, 这个固定的 n 导致费米能级显著下降到量子极限之外. 能斯特信号中的两项 $S_{xy} = \rho_{xx}\alpha_{xy} - \rho_{yx}\alpha_{xx}$ 有相反的符号, $[\alpha_{\mu\mu'} = \left(\frac{\pi^2 k_B^2 T}{3e}\right) \cdot (\partial\sigma_{\mu\mu'}/\partial\epsilon)|_{\epsilon=E_F}]$. 当朗道能带无能隙时, 它们相互竞争并具有相同的绝对值, 导致 S_{xy} 的符号反转. 当磁场大于 B^* 后最低朗道能带的能隙增大, 导致了热电势的增长.

其他狄拉克材料也观察到了类似的行为^[226,354]. 我们对 ZrTe_5 中反常热电性质的理解为探索拓扑物态中的新奇物理开辟了一条新途径. 从这个意义上说, 磁热电研究为我们提供了一个强大、简单且有效的实验工具来探索拓扑材料中的奇异行为.

8 评论和展望

量子极限中的大多数理论都采用玻恩近似, 当磁长度比无序势的范围短得多时, 电子可能被同一

杂质多次散射. 2D 和 3D 时玻恩近似可能不再好的处理手段^[317,364,365], 超越玻恩近似将是 3D 系统在极强磁场下的一个具有挑战性的课题.

有关量子振荡的理论需要进一步完善^[366–369], 相移规则能否推广到 II 型外尔半金属^[367,370,371] 以及其他拓扑物态体系^[372,373] 将是一个值得探讨的问题.

研究几何相位时, 参数空间通常是实空间或动量空间^[95]. 但费米弧和外尔点形成的外尔轨道是一种新的物理现象, 几何相位在实空间和动量空间均有积累. 特别是, 当电子在上表面和下表面之间隧穿时, 几何相位沿路径的积累具有厚度依赖性^[291,374]. 最近, 一项新的实验利用这种厚度相关的相移来证明外尔轨道对观测到的量子化霍尔电阻的贡献^[298], 未来有望会有更多的工作来验证这些理论.

在量子极限下, 我们的理论表明, 如果体系是 3D 强拓扑绝缘体, 则可能出现最多两次电阻下降^[81]. 令人惊讶的是, 最近的实验表明在量子极限下最多可以有 5 次振荡^[375,376]. 振荡作为磁场的函数遵循标度不变性定律, 与冷原子体系中的 Efimov 束缚态非常相似, 类 Efimov 束缚态可以用来理解偶然振荡^[377,378]. 实验中电阻的直接拟合也证明了这一点^[375,376,378]. 然而, 其他可能导致标度不变性振荡的机制将是人们广泛感兴趣的话题.

固体中由空间群描述的丰富对称性保护的能节点, 可能导致在物理中没有对应粒子的无质量费米子^[379–382]. 文献^[383,384] 提出了具有三重简并的费米子. 作为介于狄拉克费米子和外尔费米子的中间费米子, 其对应的半金属体系具有新奇的运输特征^[385–387].

更多的课题也将引起广泛的兴趣, 包括磁性外尔半金属的量子输运^[388–397], 笼目 (Kagome) 铁磁体 Fe_3Sn_2 ^[398], 双外尔半金属^[6,107], II 型外尔半金属^[294,399–408], Hopf link 节线半金属^[409–412], 超越量子极限的量子振荡^[413], 拓扑半金属中的普适电导涨落^[414], 狄拉克半金属中的 AB 效应^[415], 外尔半金属的表面准粒子干涉^[416–419], Fano 效应^[420].

参考文献

- [1] Balents L 2011 *Physics* **4** 36
- [2] Volovik G E 2003 *The Universe in a Helium Droplet* (Vol. 117) (New York: Oxford University Press) pp32–41
- [3] Wan X, Turner A M, Vishwanath A, Savrasov S Y 2011 *Phys. Rev. B* **83** 205101
- [4] Yang K Y, Lu Y M, Ran Y 2011 *Phys. Rev. B* **84** 075129
- [5] Burkov A, Balents L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 127205
- [6] Xu G, Weng H, Wang Z, Dai X, Fang Z 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 186806
- [7] Jiang J H 2012 *Phys. Rev. A* **85** 033640
- [8] Young S M, Zaheer S, Teo J C, Kane C L, Mele E J, Rappe A M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 140405
- [9] Wang Z, Sun Y, Chen X Q, Franchini C, Xu G, Weng H, Dai X, Fang Z 2012 *Phys. Rev. B* **85** 195320
- [10] Singh B, Sharma A, Lin H, Hasan M, Prasad R, Bansil A 2012 *Phys. Rev. B* **86** 115208
- [11] Wang Z, Weng H, Wu Q, Dai X, Fang Z 2013 *Phys. Rev. B* **88** 125427
- [12] Liu J, Vanderbilt D 2014 *Phys. Rev. B* **90** 155316
- [13] Bulmash D, Liu C X, Qi X L 2014 *Phys. Rev. B* **89** 081106
- [14] Brahlek M, Bansal N, Koirala N, Xu S Y, Neupane M, Liu C, Hasan M Z, Oh S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 186403
- [15] Wu L, Brahlek M, Aguilar R V, Stier A, Morris C, Lubashevsky Y, Bilbro L, Bansal N, Oh S, Armitage N 2013 *Nat. Phys.* **9** 410
- [16] Liu Z, Zhou B, Zhang Y, Wang Z, Weng H, Prabhakaran D, Mo S K, Shen Z, Fang Z, Dai X 2014 *Science* **343** 864
- [17] Xu S Y, Belopolski I, Alidoust N, Neupane M, Bian G, Zhang C, Sankar R, Chang G, Yuan Z, Lee C C 2015 *Science* **349** 613
- [18] Liu Z, Jiang J, Zhou B, Wang Z, Zhang Y, Weng H, Prabhakaran D, Mo S K, Peng H, Dudin P 2014 *Nat. Mater.* **13** 677
- [19] Neupane M, Xu S Y, Sankar R, Alidoust N, Bian G, Liu C, Belopolski I, Chang T R, Jeng H T, Lin H 2014 *Nat. Commun.* **5** 3786
- [20] Yi H, Wang Z, Chen C, Shi Y, Feng Y, Liang A, Xie Z, He S, He J, Peng Y 2014 *Sci. Rep.* **4** 6106
- [21] Borisenko S, Gibson Q, Evtushinsky D, Zabolotny V, Büchner B, Cava R J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 027603
- [22] Weng H, Fang C, Fang Z, Bernevig B A, Dai X 2015 *Phys. Rev. X* **5** 011029
- [23] Huang S M, Xu S Y, Belopolski I, Lee C C, Chang G, Wang B, Alidoust N, Bian G, Neupane M, Zhang C 2015 *Nat. Commun.* **6** 7373
- [24] Lv B, Weng H, Fu B, Wang X P, Miao H, Ma J, Richard P, Huang X, Zhao L, Chen G, et al. 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031013
- [25] Borisenko S, Evtushinsky D, Gibson Q, Yaresko A, Koepnik K, Kim T, Ali M, van den Brink J, Hoesch M, Fedorov A 2019 *Nat. Commun.* **10** 3424
- [26] Nielsen H B, Ninomiya M 1981 *Nucl. Phys. B* **185** 20
- [27] Nielsen H B, Ninomiya M 1983 *Phys. Lett. B* **130** 389
- [28] Son D, Spivak B 2013 *Phys. Rev. B* **88** 104412
- [29] Burkov A 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 247203
- [30] Kharzeev D E, Yee H U 2013 *Phys. Rev. B* **88** 115119
- [31] Parameswaran S, Grover T, Abanin D, Pesin D, Vishwanath A 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031035
- [32] Zhou J, Chang H R, Xiao D 2015 *Phys. Rev. B* **91** 035114
- [33] Son D T, Yamamoto N 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 181602
- [34] Stephanov M, Yin Y 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 162001
- [35] Landsteiner K, Megias E, Pena-Benitez F 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 021601
- [36] Chang M C, Yang M F 2015 *Phys. Rev. B* **91** 115203
- [37] Jiang Q D, Jiang H, Liu H, Sun Q F, Xie X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 156602

- [38] Jiang Q D, Jiang H, Liu H, Sun Q F, Xie X 2016 *Phys. Rev. B* **93** 195165
- [39] Chen C Z, Song J, Jiang H, Sun Q f, Wang Z, Xie X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 246603
- [40] Chen C Z, Liu H, Jiang H, Xie X 2016 *Phys. Rev. B* **93** 165420
- [41] Kim H J, Kim K S, Wang J F, Sasaki M, Satoh N, Ohnishi A, Kitauro M, Yang M, Li L 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 246603
- [42] Kim K S, Kim H J, Sasaki M 2014 *Phys. Rev. B* **89** 195137
- [43] Li Q, Kharzeev D E, Zhang C, Huang Y, Pletikosić I, Fedorov A, Zhong R, Schneeloch J, Gu G, Valla T 2016 *Nat. Phys.* **12** 550
- [44] Chen R, Chen Z, Song X Y, Schneeloch J, Gu G, Wang F, Wang N 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 176404
- [45] Zheng G, Lu J, Zhu X, Ning W, Han Y, Zhang H, Zhang J, Xi C, Yang J, Du H, et al. 2016 *Phys. Rev. B* **93** 115414
- [46] Xiong J, Kushwaha S K, Liang T, Krizan J W, Hirschberger M, Wang W, Cava R J, Ong N P 2015 *Science* **350** 413
- [47] Jeon S, Zhou B B, Gyenis A, Feldman B E, Kimchi I, Potter A C, Gibson Q D, Cava R J, Vishwanath A, Yazdani A 2014 *Nat. Mater.* **13** 851
- [48] Liang T, Gibson Q, Ali M N, Liu M, Cava R, Ong N 2015 *Nat. Mater.* **14** 280
- [49] Feng J, Pang Y, Wu D, Wang Z, Weng H, Li J, Dai X, Fang Z, Shi Y, Lu L 2015 *Phys. Rev. B* **92** 081306
- [50] He L, Hong X, Dong J, Pan J, Zhang Z, Zhang J, Li S 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 246402
- [51] Zhao Y, Liu H, Zhang C, Wang H, Wang J, Lin Z, Xing Y, Lu H, Liu J, Wang Y, et al. 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031037
- [52] Cao J, Liang S, Zhang C, Liu Y, Huang J, Jin Z, Chen Z G, Wang Z, Wang Q, Zhao J 2015 *Nat. Commun.* **6** 7779
- [53] Shekhar C, Nayak A K, Sun Y, Schmidt M, Nicklas M, Leermakers I, Zeitler U, Skourski Y, Wosnitza J, Liu Z 2015 *Nat. Phys.* **11** 645
- [54] Narayanan A, Watson M, Blake S, Bruyant N, Drigo L, Chen Y, Prabhakaran D, Yan B, Felser C, Kong T 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 117201
- [55] Li C Z, Wang L X, Liu H, Wang J, Liao Z M, Yu D P 2015 *Nat. Commun.* **6** 10137
- [56] Li H, He H, Lu H Z, Zhang H, Liu H, Ma R, Fan Z, Shen S Q, Wang J 2016 *Nat. Commun.* **7** 10301
- [57] Zhang C, Zhang E, Liu Y, Chen Z G, Liang S, Cao J, Yuan X, Tang L, Li Q, Gu T, et al. 2015 arXiv: 1504.07698 [cond-mat]
- [58] Wang H, Wang H, Liu H, Lu H, Yang W, Jia S, Liu X J, Xie X, Wei J, Wang J 2016 *Nat. Mater.* **15** 38
- [59] Aggarwal L, Gaurav A, Thakur G S, Haque Z, Ganguli A K, Sheet G 2016 *Nat. Mater.* **15** 32
- [60] Huang X, Zhao L, Long Y, Wang P, Chen D, Yang Z, Liang H, Xue M, Weng H, Fang Z 2015 *Phys. Rev. X* **5** 031023
- [61] Zhang C L, Xu S Y, Belopolski I, Yuan Z, Lin Z, Tong B, Bian G, Alidoust N, Lee C C, Huang S M 2016 *Nat. Commun.* **7** 10735
- [62] Zhang C, Guo C, Lu H, Zhang X, Yuan Z, Lin Z, Wang J, Jia S 2015 *Phys. Rev. B* **92** 041203
- [63] Arnold F, Shekhar C, Wu S C, Sun Y, Dos Reis R D, Kumar N, Naumann M, Ajeesh M O, Schmidt M, Grushin A G 2016 *Nat. Commun.* **7** 11615
- [64] Zhang C L, Xu S Y, Wang C, Lin Z, Du Z, Guo C, Lee C C, Lu H, Feng Y, Huang S M 2017 *Nat. Phys.* **13** 979
- [65] Yang X, Liu Y, Wang Z, Zheng Y, Xu Z A 2015 arXiv: 1506.03190 [cond-mat]
- [66] Li Y, Wang Z, Li P, Yang X, Shen Z, Sheng F, Li X, Lu Y, Zheng Y, Xu Z A 2017 *Front. Phys.* **12** 127205
- [67] Wang Z, Zheng Y, Shen Z, Lu Y, Fang H, Sheng F, Zhou Y, Yang X, Li Y, Feng C, et al. 2016 *Phys. Rev. B* **93** 121112
- [68] Wang H, Li C K, Liu H, Yan J, Wang J, Liu J, Lin Z, Li Y, Wang Y, Li L 2016 *Phys. Rev. B* **93** 165127
- [69] Lu H Z, Shen S Q 2017 *Front. Phys.* **12** 127201
- [70] Sun H P, Lu H Z 2019 *Front. Phys.* **14** 33405
- [71] Lu H Z, Shi J, Shen S Q 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 076801
- [72] Lu H Z, Shen S Q 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 146601
- [73] Lu H Z, Shen S Q 2015 *Phys. Rev. B* **92** 035203
- [74] Lu H Z, Zhang S B, Shen S Q 2015 *Phys. Rev. B* **92** 045203
- [75] Dai X, Lu H Z, Shen S Q, Yao H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 161110
- [76] Zhang S B, Lu H Z, Shen S Q 2016 *New J. Phys.* **18** 053039
- [77] Wang C, Lu H Z, Shen S Q 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 077201
- [78] Wang C, Sun H P, Lu H Z, Xie X 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 136806
- [79] Li C, Wang C, Wan B, Wan X, Lu H Z, Xie X 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 146602
- [80] Dai X, Du Z, Lu H Z 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 166601
- [81] Chen Y, Lu H Z, Xie X 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 036602
- [82] Du Z, Wang C, Lu H Z, Xie X 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 266601
- [83] Du Z, Wang C, Li S, Lu H Z, Xie X 2019 *Nat. Commun.* **10** 3047
- [84] Cao Z, Zhang H, Lü H F, He W X, Lu H Z, Xie X 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 147701
- [85] Zhang C L, Wang C, Yuan Z, Xu X, Wang G, Lee C C, Pi L, Xi C, Lin H, Harrison N 2019 *Nat. Commun.* **10** 1028
- [86] Zhang J, Wang C, Guo C, et al. 2018 *Phys. Rev. Lett.* **123** 196602
- [87] Qin Fang, Li Shuai, Du Z Z, Wang C M, Zhang W Q, Yu D P, Lu H Z, Xie X C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 206601
- [88] Lu H Z, Shen S Q 2016 *Chin. Phys. B* **25** 117202
- [89] Hosur P, Qi X 2013 *C. R. Phys.* **14** 857
- [90] Weng H, Dai X, Fang Z 2016 *J. Phys. Condes. Matter* **28** 303001
- [91] Yan B, Felser C 2017 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **8** 337
- [92] Armitage N, Mele E, Vishwanath A 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 015001
- [93] Wang H, Wang J 2018 *Chin. Phys. B* **27** 107402
- [94] Shen S Q 2017 *Topological Insulators: Dirac Equation in Condensed Matter* (Vol. 187) (Singapore: Springer) pp207–229
- [95] Xiao D, Chang M C, Niu Q 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1959
- [96] Asbóth J K, Oroszlány L, Pályi A P 2016 *A Short Course on Topological Insulators: Band Structure and Edge States in One and Two Dimensions* (Vol. 919) (Heidelberg, New York, London: Springer) p33
- [97] Lu H Z, Shan W Y, Yao W, Niu Q, Shen S Q 2010 *Phys. Rev. B* **81** 115407
- [98] Shan W Y, Lu H Z, Shen S Q 2010 *New J. Phys.* **12** 043048
- [99] Shen S Q, Shan W Y, Lu H Z 2011 *Spin* **01** 33
- [100] Shen S Q, Ma M, Xie X, Zhang F C 2004 *Phys. Rev. Lett.* **92** 256603
- [101] Shen S Q, Bao Y J, Ma M, Xie X, Zhang F C 2005 *Phys. Rev. B* **71** 155316
- [102] Sakurai J, Napolitano J 2017 *Modern Quantum Mechanics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp105–108
- [103] Yang L, Liu Z, Sun Y, Peng H, Yang H, Zhang T, Zhou B,

- Zhang Y, Guo Y, Rahn M, et al. 2015 *Nat. Phys.* **11** 728
- [104] Xu S Y, Alidoust N, Belopolski I, Yuan Z, Bian G, Chang T R, Zheng H, Strocov V N, Sanchez D S, Chang G 2015 *Nat. Phys.* **11** 748
- [105] Xu N, Weng H, Lv B, Matt C E, Park J, Bisti F, Strocov V N, Gawryluk D, Pomjakushina E, Conder K 2016 *Nat. Commun.* **7** 11006
- [106] Guan T, Lin C, Yang C, Shi Y, Ren C, Li Y, Weng H, Dai X, Fang Z, Yan S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 087002
- [107] Huang S M, Xu S Y, Belopolski I, Lee C C, Chang G, Chang T R, Wang B, Alidoust N, Bian G, Neupane M 2016 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **113** 1180
- [108] Burkov A, Hook M, Balents L 2011 *Phys. Rev. B* **84** 235126
- [109] Chiu C K, Schnyder A P 2014 *Phys. Rev. B* **90** 205136
- [110] Fang C, Weng H, Dai X, Fang Z 2016 *Chin. Phys. B* **25** 117106
- [111] Yang B J, Bojesen T A, Morimoto T, Furusaki A 2017 *Phys. Rev. B* **95** 075135
- [112] Chen Y, Xie Y, Yang S A, Pan H, Zhang F, Cohen M L, Zhang S 2015 *Nano Lett.* **15** 6974
- [113] Bzdušek T, Wu Q, Ritegg A, Sigrist M, Soluyanov A A 2016 *Nature* **538** 75
- [114] Feng X, Yue C, Song Z, Wu Q, Wen B 2018 *Phys. Rev. Mater.* **2** 014202
- [115] Yi C J, Lv B, Wu Q, Fu B B, Gao X, Yang M, Peng X L, Li M, Huang Y B, Richard P 2018 *Phys. Rev. B* **97** 201107
- [116] Chen W, Luo K, Li L, Zilberberg O 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 166802
- [117] Zhu Z, Chang T R, Huang C Y, Pan H, Nie X A, Wang X Z, Jin Z T, Xu S Y, Huang S M, Guan D D 2018 *Nat. Commun.* **9** 4153
- [118] Chen W, Lado J L 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 016803
- [119] Weng H, Liang Y, Xu Q, Yu R, Fang Z, Dai X, Kawazoe Y 2015 *Phys. Rev. B* **92** 045108
- [120] Yu R, Weng H, Fang Z, Dai X, Hu X 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 036807
- [121] Kim Y, Wieder B J, Kane C, Rappe A M 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 036806
- [122] Fang C, Chen Y, Kee H Y, Fu L 2015 *Phys. Rev. B* **92** 081201
- [123] Chen Y, Lu Y M, Kee H Y 2015 *Nat. Commun.* **6** 6593
- [124] Bian G, Chang T R, Zheng H, Velury S, Xu S Y, Neupert T, Chiu C K, Huang S M, Sanchez D S, Belopolski I 2016 *Phys. Rev. B* **93** 121113
- [125] Xie L S, Schoop L M, Seibel E M, Gibson Q D, Xie W, Cava R J 2015 *APL Mater.* **3** 083602
- [126] Chan Y H, Chiu C K, Chou M, Schnyder A P 2016 *Phys. Rev. B* **93** 205132
- [127] Du Y, Tang F, Wang D, Sheng L, Kan E j, Duan C G, Savrasov S Y, Wan X 2017 *npj Quantum Mater.* **2** 1
- [128] Zhao J, Yu R, Weng H, Fang Z 2016 *Phys. Rev. B* **94** 195104
- [129] Yamakage A, Yamakawa Y, Tanaka Y, Okamoto Y 2016 *J. Phys. Soc. Jpn.* **85** 013708
- [130] Xu Q, Yu R, Fang Z, Dai X, Weng H 2017 *Phys. Rev. B* **95** 045136
- [131] Jin Y J, Wang R, Zhao J Z, Du Y P, Zheng C D, Gan L Y, Liu J F, Xu H, Tong S 2017 *Nanoscale* **9** 13112
- [132] Zhu Z, Li M, Li J 2016 *Phys. Rev. B* **94** 155121
- [133] Liang Q F, Zhou J, Yu R, Wang Z, Weng H 2016 *Phys. Rev. B* **93** 085427
- [134] Zeng M, Fang C, Chang G, Chen Y A, Hsieh T, Bansil A, Lin H, Fu L 2015 arXiv: 1504.03492 [cond-mat]
- [135] Hirayama M, Okugawa R, Miyake T, Murakami S 2017 *Nat. Commun.* **8** 14022
- [136] Huang H, Liu J, Vanderbilt D, Duan W 2016 *Phys. Rev. B* **93** 201114
- [137] Li R, Ma H, Cheng X, Wang S, Li D, Zhang Z, Li Y, Chen X Q 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 096401
- [138] Wang J T, Weng H, Nie S, Fang Z, Kawazoe Y, Chen C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 195501
- [139] Sun Y, Zhang Y, Liu C X, Felser C, Yan B 2017 *Phys. Rev. B* **95** 235104
- [140] Schoop L M, Ali M N, Straßer C, Topp A, Varykhalov A, Marchenko D, Duppel V, Parkin S S, Lotsch B V, Ast C R 2016 *Nat. Commun.* **7** 11696
- [141] Neupane M, Belopolski I, Hosen M M, Sanchez D S, Sankar R, Szlawska M, Xu S Y, Dimitri K, Dhakal N, Maldonado P 2016 *Phys. Rev. B* **93** 201104
- [142] Chen C, Xu X, Jiang J, Wu S C, Qi Y, Yang L, Wang M, Sun Y, Schröter N, Yang H 2017 *Phys. Rev. B* **95** 125126
- [143] Bian G, Chang T R, Sankar R, Xu S Y, Zheng H, Neupert T, Chiu C K, Huang S M, Chang G, Belopolski I 2016 *Nat. Commun.* **7** 10556
- [144] Chang T R, Chen P J, Bian G, Huang S M, Zheng H, Neupert T, Sankar R, Xu S Y, Belopolski I, Chang G 2016 *Phys. Rev. B* **93** 245130
- [145] Ekahana S A, Wu S C, Jiang J, Okawa K, Prabhakaran D, Hwang C C, Mo S K, Sasagawa T, Felser C, Yan B 2017 *New J. Phys.* **19** 065007
- [146] Wu Y, Wang L L, Mun E, Johnson D D, Mou D, Huang L, Lee Y, Bud'ko S L, Canfield P C, Kaminski A 2016 *Nat. Phys.* **12** 667
- [147] Chen W, Lu H Z, Zilberberg O 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 196603
- [148] Alexandradinata A, Glazman L 2018 *Phys. Rev. B* **97** 144422
- [149] Zhang H, Liu C X, Qi X L, Dai X, Fang Z, Zhang S C 2009 *Nat. Phys.* **5** 438
- [150] Nechaev I, Krasovskii E 2016 *Phys. Rev. B* **94** 201410
- [151] Zhang Y, He K, Chang C Z, Song C L, Wang L L, Chen X, Jia J F, Fang Z, Dai X, Shan W Y 2010 *Nat. Phys.* **6** 584
- [152] Wang J, Li H, Chang C, He K, Lee J S, Lu H, Sun Y, Ma X, Samarth N, Shen S 2012 *Nano Res.* **5** 739
- [153] He H, Liu H, Li B, Guo X, Xu Z, Xie M, Wang J 2013 *Appl. Phys. Lett.* **103** 031606
- [154] Wiedmann S, Jost A, Fauqué B, Van Dijk J, Meijer M, Khouri T, Pezzini S, Grauer S, Schreyeck S, Brüne C 2016 *Phys. Rev. B* **94** 081302
- [155] Wang L X, Yan Y, Zhang L, Liao Z M, Wu H C, Yu D P 2015 *Nanoscale* **7** 16687
- [156] Sun H P, Wang C M, Zhang S B, Chen R, Zhao Y, Liu C, Liu Q, Chen C, Lu H Z, Xie X C 2020 *Phys. Rev. B* **102** 241406
- [157] Klitzing K v, Dorda G, Pepper M 1980 *Phys. Rev. Lett.* **45** 494
- [158] Nagaosa N, Sinova J, Onoda S, MacDonald A H, Ong N P 2010 *Rev. Mod. Phys.* **82** 1539
- [159] Yasuda K, Wakatsuki R, Morimoto T, Yoshimi R, Tsukazaki A, Takahashi K, Ezawa M, Kawasaki M, Nagaosa N, Tokura Y 2016 *Nat. Phys.* **12** 555
- [160] Sodemann I, Fu L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 216806
- [161] Ma Q, Xu S Y, Shen H, MacNeill D, Fatemi V, Chang T R, Valdivia A M M, Wu S, Du Z, Hsu C H, et al. 2019 *Nature* **565** 337
- [162] Kang K, Li T, Sohn E, Shan J, Mak K F 2018 arXiv: 1809.08744 [cond-mat]

- [163] Alicea J 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 076501
- [164] Leijnse M, Flensberg K 2012 *Semicond. Sci. Technol.* **27** 124003
- [165] Beenakker C 2013 *Annu. Rev. Condens. Matter Phys.* **4** 113
- [166] Stanescu T D, Tewari S 2013 *J. Phys. Condes. Matter* **25** 233201
- [167] Lutchyn R M, Sau J D, Sarma S D 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 077001
- [168] Oreg Y, Refael G, Von Oppen F 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 177002
- [169] Prada E, San-Jose P, Aguado R 2012 *Phys. Rev. B* **86** 180503
- [170] Sarma S D, Sau J D, Stanescu T D 2012 *Phys. Rev. B* **86** 220506
- [171] Rainis D, Trifunovic L, Klinovaja J, Loss D 2013 *Phys. Rev. B* **87** 024515
- [172] Albrecht S M, Higginbotham A P, Madsen M, Kuemmeth F, Jespersen T S, Nygård J, Krogstrup P, Marcus C 2016 *Nature* **531** 206
- [173] Sherman D, Yodh J, Albrecht S M, Nygård J, Krogstrup P, Marcus C M 2017 *Nat. Nanotechnol.* **12** 212
- [174] Albrecht S, Hansen E, Higginbotham A P, Kuemmeth F, Jespersen T, Nygård J, Krogstrup P, Danon J, Flensberg K, Marcus C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 137701
- [175] Vaitiekėnas S, Whiticar A M, Deng M T, Krizek F, Sestoft J E, Palmstrøm C, Martí-Sánchez S, Arbiol J, Krogstrup P, Casparis L 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 147701
- [176] O'Farrell E, Drachmann A, Hell M, Fornieri A, Whiticar A, Hansen E, Gronin S, Gardner G, Thomas C, Manfra M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 256803
- [177] Shen J, Heedt S, Borsoi F, Van Heck B, Gazibegovic S, Veld R L O, Car D, Logan J A, Pendharkar M, Ramakers S J 2018 *Nat. Commun.* **9** 4801
- [178] Sánchez D, Serra L 2006 *Phys. Rev. B* **74** 153313
- [179] Sánchez D, Serra L, Choi M S 2008 *Phys. Rev. B* **77** 035315
- [180] Glazov M, Sherman E Y 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 156602
- [181] Bommer J D, Zhang H, Gül Ö, Nijholt B, Wimmer M, Rybakov F N, Garaud J, Rodic D, Babaev E, Troyer M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 187702
- [182] Vaitiekėnas S, Deng M T, Nygård J, Krogstrup P, Marcus C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 037703
- [183] de Moor M W, Bommer J D, Xu D, Winkler G W, Antipov A E, Bargerbos A, Wang G, Van Loo N, het Veld R L O, Gazibegovic S 2018 *New J. Phys.* **20** 103049
- [184] Stanescu T D, Lutchyn R M, Sarma S D 2011 *Phys. Rev. B* **84** 144522
- [185] Reeg C, Loss D, Klinovaja J 2018 *Phys. Rev. B* **97** 165425
- [186] Van Heck B, Lutchyn R, Glazman L 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235431
- [187] Fu L 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 056402
- [188] Hützen R, Zazumov A, Braunecker B, Yeyati A L, Egger R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 166403
- [189] Higginbotham A P, Albrecht S M, Kiršanskas G, Chang W, Kuemmeth F, Krogstrup P, Jespersen T S, Nygård J, Flensberg K, Marcus C M 2015 *Nat. Phys.* **11** 1017
- [190] Lü H F, Lu H Z, Shen S Q 2016 *Phys. Rev. B* **93** 245418
- [191] Lee P A, Ramakrishnan T 1985 *Rev. Mod. Phys.* **57** 287
- [192] Fu B, Wang H W, Shen S Q 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 246601
- [193] Wang H W, Fu B, Shen S Q 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 206603
- [194] Dyson F J 1962 *J. Math. Phys.* **3** 140
- [195] Hikami S, Larkin A I, Nagaoka Y 1980 *Prog. Theor. Phys.* **63** 707
- [196] McCann E, Kechedzhi K, Fal'ko V I, Suzuura H, Ando T, Altshuler B 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 146805
- [197] Altshuler B L, Aronov A G, Lee P 1980 *Phys. Rev. Lett.* **44** 1288
- [198] Fukuyama H 1980 *J. Phys. Soc. Jpn.* **48** 2169
- [199] Shan W Y, Lu H Z, Shen S Q 2012 *Phys. Rev. B* **86** 125303
- [200] Berry M V 1984 *Proc. R. Soc. A-Math. Phys.* **392** 45
- [201] Shon N H, Ando T 1998 *J. Phys. Soc. Jpn.* **67** 2421
- [202] Suzuura H, Ando T 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 266603
- [203] Altland A, Zirnbauer M R 1997 *Phys. Rev. B* **55** 1142
- [204] Akkermans E, Montambaux G 2007 *Mesoscopic Physics of Electrons and Photons* (Cambridge: Cambridge university press) pp97–100
- [205] Cao H, Tian J, Miotkowski I, Shen T, Hu J, Qiao S, Chen Y P 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 216803
- [206] Checkelsky J G, Hor Y S, Liu M H, Qu D X, Cava R J, Ong N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 246601
- [207] Peng H, Lai K, Kong D, Meister S, Chen Y, Qi X L, Zhang S C, Shen Z X, Cui Y 2010 *Nat. Mater.* **9** 225
- [208] Chen J, Qin H, Yang F, Liu J, Guan T, Qu F, Zhang G, Shi J, Xie X, Yang C, et al. 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 176602
- [209] Checkelsky J G, Hor Y S, Cava R J, Ong N 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 196801
- [210] Adler S L 1969 *Phys. Rev.* **177** 2426
- [211] Bell J S, Jackiw R 1969 *Il Nuovo Cimento A (1965-1970)* **60** 47
- [212] Burkov A 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041110
- [213] Nandy S, Sharma G, Taraphder A, Tewari S 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 176804
- [214] Kumar N, Guin S N, Felser C, Shekhar C 2018 *Phys. Rev. B* **98** 041103
- [215] Wu M, Zheng G, Chu W, Liu Y, Gao W, Zhang H, Lu J, Han Y, Zhou J, Ning W 2018 *Phys. Rev. B* **98** 161110
- [216] Li H, Wang H W, He H, Wang J, Shen S Q 2018 *Phys. Rev. B* **97** 201110
- [217] Ma D, Jiang H, Liu H, Xie X 2019 *Phys. Rev. B* **99** 115121
- [218] Chang M C, Niu Q 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 1348
- [219] Sundaram G, Niu Q 1999 *Phys. Rev. B* **59** 14915
- [220] Jian H Z, Hua J, Qian N, Jun R S 2013 *Chin. Phys. Lett.* **30** 027101
- [221] Goswami P, Tewari S 2013 *Phys. Rev. B* **88** 245107
- [222] Zyuzin A, Burkov A 2012 *Phys. Rev. B* **86** 115133
- [223] Yip S K 2015 arXiv: 1508.01010 [cond-mat]
- [224] Zhang C, Zhang E, Wang W, Liu Y, Chen Z G, Lu S, Liang S, Cao J, Yuan X, Tang L 2017 *Nat. Commun.* **8** 13741
- [225] Breunig O, Wang Z, Taskin A, Lux J, Rosch A, Ando Y 2017 *Nat. Commun.* **8** 15545
- [226] Assaf B, Phuphachong T, Kampert E, Volobuev V, Mandal P, Sánchez-Barriga J, Rader O, Bauer G, Springholz G, De Vaulchier L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 106602
- [227] Zhang M, Wang H, Mu K, Wang P, Niu W, Zhang S, Xiao G, Chen Y, Tong T, Fu D 2018 *ACS Nano* **12** 1537
- [228] Fleckenstein C, Ziani N T, Trauzettel B 2016 *Phys. Rev. B* **94** 241406
- [229] Culcer D 2012 *Physica E* **44** 860
- [230] Mahan G D 2013 *Many-particle Physics* (New York: Springer Science & Business Media) pp160–174
- [231] Wolos A, Szyszko S, Drabinska A, Kaminska M, Strzelecka S, Hruban A, Materna A, Piersa M, Borysiuk J, Sobczak K 2016 *Phys. Rev. B* **93** 155114
- [232] Wang J, DaSilva A M, Chang C Z, He K, Jain J K, Samarth N, Ma X C, Xue Q K, Chan M H 2011 *Phys. Rev.*

- B* **83** 245438
- [233] He H T, Wang G, Zhang T, Sou I K, Wong G K, Wang J N, Lu H Z, Shen S Q, Zhang F C 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 166805
- [234] Morimoto T, Zhong S, Orenstein J, Moore J E 2016 *Phys. Rev. B* **94** 245121
- [235] Gao Y, Yang S A, Niu Q 2017 *Phys. Rev. B* **95** 165135
- [236] Gao Y, Yang S A, Niu Q 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 166601
- [237] Gao Y, Yang S A, Niu Q 2015 *Phys. Rev. B* **91** 214405
- [238] Goswami P, Pixley J, Sarma S D 2015 *Phys. Rev. B* **92** 075205
- [239] Andreev A, Spivak B 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 026601
- [240] Fu B, Wang H W, Shen S Q 2020 *Phys. Rev. B* **101** 125203
- [241] Shoenberg D 1984 *Magnetic Oscillations in Metals* (Cambridge: Cambridge University Press) pp36–67
- [242] Mikitik G, Sharlai Y V 1999 *Phys. Rev. Lett.* **82** 2147
- [243] Shoenberg D, Stiles P 1964 *Proc. R. Soc. A-Math. Phys.* **281** 62
- [244] Luk'yanchuk I A, Kopelevich Y 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 166402
- [245] Novak M, Sasaki S, Segawa K, Ando Y 2015 *Phys. Rev. B* **91** 041203
- [246] Du J, Wang H, Chen Q, Mao Q, Khan R, Xu B, Zhou Y, Zhang Y, Yang J, Chen B 2016 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **59** 657406
- [247] Zhang C L, Yuan Z, Jiang Q D, Tong B, Zhang C, Xie X, Jia S 2017 *Phys. Rev. B* **95** 085202
- [248] Park J, Lee G, Wolff-Fabris F, Koh Y, Eom M, Kim Y K, Farhan M, Jo Y, Kim C, Shim J 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 126402
- [249] Xiang F X, Wang X L, Veldhorst M, Dou S X, Fuhrer M S 2015 *Phys. Rev. B* **92** 035123
- [250] Tafti F, Gibson Q, Kushwaha S, Haldolaarachchige N, Cava R 2016 *Nat. Phys.* **12** 272
- [251] Luo Y, Ghimire N J, Wartenbe M, Choi H, Neupane M, McDonald R, Bauer E, Zhu J, Thompson J, Ronning F 2015 *Phys. Rev. B* **92** 205134
- [252] Arnold F, Naumann M, Wu S C, Sun Y, Schmidt M, Borrmann H, Felser C, Yan B, Hassinger E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 146401
- [253] Klotz J, Wu S C, Shekhar C, Sun Y, Schmidt M, Nicklas M, Baenitz M, Uhlarz M, Wosnitza J, Felser C 2016 *Phys. Rev. B* **93** 121105
- [254] dos Reis R, Wu S, Sun Y, Ajeesh M, Shekhar C, Schmidt M, Felser C, Yan B, Nicklas M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 205102
- [255] Sergelius P, Gooth J, Bäbler S, Zierold R, Wiegand C, Niemann A, Reith H, Shekhar C, Felser C, Yan B 2016 *Sci. Rep.* **6** 33859
- [256] Zhang Y, Tan Y W, Stormer H L, Kim P 2005 *Nature* **438** 201
- [257] Murakawa H, Bahramy M, Tokunaga M, Kohama Y, Bell C, Kaneko Y, Nagaosa N, Hwang H, Tokura Y 2013 *Science* **342** 1490
- [258] Kumar N, Manna K, Qi Y, Wu S C, Wang L, Yan B, Felser C, Shekhar C 2017 *Phys. Rev. B* **95** 121109
- [259] Singha R, Pariari A K, Satpati B, Mandal P 2017 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **114** 2468
- [260] Ali M N, Schoop L M, Garg C, Lippmann J M, Lara E, Lotsch B, Parkin S S 2016 *Sci. Adv.* **2** e1601742
- [261] Wang X, Pan X, Gao M, Yu J, Jiang J, Zhang J, Zuo H, Zhang M, Wei Z, Niu W 2016 *Adv. Electron. Mater.* **2**
- [262] Lv Y Y, Zhang B B, Li X, Yao S H, Chen Y, Zhou J, Zhang S T, Lu M H, Chen Y F 2016 *Appl. Phys. Lett.* **108** 244101
- [263] Hu J, Tang Z, Liu J, Zhu Y, Wei J, Mao Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 045127
- [264] Pan H, Tong B, Yu J, Wang J, Fu D, Zhang S, Wu B, Wan X, Zhang C, Wang X 2018 *Sci. Rep.* **8** 1
- [265] Hu J, Tang Z, Liu J, Liu X, Zhu Y, Graf D, Myhro K, Tran S, Lau C N, Wei J 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 016602
- [266] Hu J, Zhu Y, Graf D, Tang Z, Liu J, Mao Z 2017 *Phys. Rev. B* **95** 205134
- [267] Qu D X, Hor Y S, Xiong J, Cava R J, Ong N P 2010 *Science* **329** 821
- [268] Charbonneau M, Van Vliet K, Vasilopoulos P 1982 *J. Math. Phys.* **23** 318
- [269] Vasilopoulos P, Van Vliet C M 1984 *J. Math. Phys.* **25** 1391
- [270] Wang C, Lei X 2012 *Phys. Rev. B* **86** 035442
- [271] Wang C, Lei X 2015 *Phys. Rev. B* **92** 125303
- [272] Datta S 1997 *Electronic Transport in Mesoscopic Systems* (Cambridge: Cambridge university press) pp23–24
- [273] Vasko F T, Raichev O E 2006 *Quantum Kinetic Theory and Applications: Electrons, Photons, Phonons* (New York: Springer Science & Business Media) pp99–147
- [274] Abrikosov A 1998 *Phys. Rev. B* **58** 2788
- [275] Liu Z, Yang L, Sun Y, Zhang T, Peng H, Yang H, Chen C, Zhang Y, Guo Y, Prabhakaran D 2016 *Nat. Mater.* **15** 27
- [276] Xiong J, Kushwaha S, Krizan J, Liang T, Cava R J, Ong N P 2016 *EPL* **114** 27002
- [277] Hu J, Liu J, Graf D, Radmanesh S, Adams D, Chuang A, Wang Y, Chiorescu I, Wei J, Spinu L 2016 *Sci. Rep.* **6** 18674
- [278] Phillips M, Aji V 2014 *Phys. Rev. B* **90** 115111
- [279] Thouless D J, Kohmoto M, Nightingale M P, den Nijs M 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 405
- [280] Novoselov K, Geim A, Morozov S, Jiang D, Katsnelson M, Grigorieva I, Dubonos S, Firsov A 2005 *Nature* **438** 197
- [281] Xu Y, Miotkowski I, Liu C, Tian J, Nam H, Alidoust N, Hu J, Shih C K, Hasan M Z, Chen Y P 2014 *Nat. Phys.* **10** 956
- [282] Yoshimi R, Yasuda K, Tsukazaki A, Takahashi K, Nagaosa N, Kawasaki M, Tokura Y 2015 *Nat. Commun.* **6** 6627
- [283] Lu H Z 2019 *Natl. Sci. Rev.* **6** 208
- [284] Hosur P 2012 *Phys. Rev. B* **86** 195102
- [285] Baum Y, Berg E, Parameswaran S, Stern A 2015 *Phys. Rev. X* **5** 041046
- [286] Gorbar E, Miransky V, Shovkovy I, Sukhachov P 2016 *Phys. Rev. B* **93** 235127
- [287] Ominato Y, Koshino M 2016 *Phys. Rev. B* **93** 245304
- [288] McCormick T M, Watzman S J, Heremans J P, Trivedi N 2018 *Phys. Rev. B* **97** 195152
- [289] Moll P J, Nair N L, Helm T, Potter A C, Kimchi I, Vishwanath A, Analytis J G 2016 *Nature* **535** 266
- [290] Ruan J, Jian S K, Yao H, Zhang H, Zhang S C, Xing D 2016 *Nat. Commun.* **7** 11136
- [291] Potter A C, Kimchi I, Vishwanath A 2014 *Nat. Commun.* **5** 5161
- [292] Xu S Y, Belopolski I, Sanchez D S, Neupane M, Chang G, Yaji K, Yuan Z, Zhang C, Kuroda K, Bian G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 096801
- [293] Belopolski I, Xu S Y, Sanchez D S, Chang G, Guo C, Neupane M, Zheng H, Lee C C, Huang S M, Bian G 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 066802
- [294] Belopolski I, Xu S Y, Ishida Y, Pan X, Yu P, Sanchez D S, Zheng H, Neupane M, Alidoust N, Chang G 2016 *Phys. Rev. B* **94** 085127
- [295] Xu S Y, Belopolski I, Sanchez D S, Zhang C, Chang G, Guo C, Bian G, Yuan Z, Lu H, Chang T R 2015 *Sci. Adv.* **1** e1501092

- [296] Uchida M, Nakazawa Y, Nishihaya S, Akiba K, Kriener M, Kozuka Y, Miyake A, Taguchi Y, Tokunaga M, Nagaosa N 2017 *Nat. Commun.* **8** 2274
- [297] Schumann T, Galletti L, Kealhofer D A, Kim H, Goyal M, Stemmer S 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 016801
- [298] Zhang C, Zhang Y, Yuan X, Lu S, Zhang J, Narayan A, Liu Y, Zhang H, Ni Z, Liu R 2019 *Nature* **565** 331
- [299] Gusynin V, Sharapov S 2005 *Phys. Rev. Lett.* **95** 146801
- [300] Zyuzin A, Burkov A 2011 *Phys. Rev. B* **83** 195413
- [301] Zhang S B, Zhang Y Y, Shen S Q 2014 *Phys. Rev. B* **90** 115305
- [302] Zhang S B, Lu H Z, Shen S Q 2015 *Sci. Rep.* **5** 13277
- [303] Pertsova A, Canali C M, MacDonald A 2016 *Phys. Rev. B* **94** 121409
- [304] Zheng H, Xu S Y, Bian G, Guo C, Chang G, Sanchez D S, Belopolski I, Lee C C, Huang S M, Zhang X 2016 *ACS Nano* **10** 1378
- [305] Ma E Y, Calvo M R, Wang J, Lian B, Mühlbauer M, Brüne C, Cui Y T, Lai K, Kundhikanjana W, Yang Y 2015 *Nat. Commun.* **6** 7252
- [306] Li H, Liu H, Jiang H, Xie X 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 036602
- [307] Zhang C, Narayan A, Lu S, Zhang J, Zhang H, Ni Z, Yuan X, Liu Y, Park J H, Zhang E 2017 *Nat. Commun.* **8** 1272
- [308] Lin B C, Wang S, Wiedmann S, Lu J M, Zheng W Z, Yu D, Liao Z M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 036602
- [309] Halperin B I 1987 *Jpn. J. Appl. Phys.* **26** 1913
- [310] Tang F, Ren Y, Wang P, Zhong R, Schneeloch J, Yang S A, Yang K, Lee P A, Gu G, Qiao Z 2019 *Nature* **569** 537
- [311] Song Z, Fang Z, Dai X 2017 *Phys. Rev. B* **96** 235104
- [312] Pan Z, Shindou R 2019 *Phys. Rev. B* **100** 165124
- [313] Roy B, Sau J D, Sarma S D 2014 *Phys. Rev. B* **89** 165119
- [314] Grüner G 1988 *Rev. Mod. Phys.* **60** 1129
- [315] Aji V 2012 *Phys. Rev. B* **85** 241101
- [316] Ominato Y, Koshino M 2014 *Phys. Rev. B* **89** 054202
- [317] Song J C, Refael G, Lee P A 2015 *Phys. Rev. B* **92** 180204
- [318] Hasan M Z, Kane C L 2010 *Rev. Mod. Phys.* **83** 3045
- [319] Qi X L, Zhang S C 2011 *Rev. Mod. Phys.* **83** 1057
- [320] Yu R, Zhang W, Zhang H J, Zhang S C, Dai X, Fang Z 2010 *Science* **329** 61
- [321] Chang C Z, Zhang J, Feng X, Shen J, Zhang Z, Guo M, Li K, Ou Y, Wei P, Wang L L 2013 *Science* **340** 167
- [322] Fu L, Kane C L 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 096407
- [323] Akhmerov A, Nilsson J, Beenakker C 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 216404
- [324] Belopolski I, Xu S Y, Koirala N, Liu C, Bian G, Strocov V N, Chang G, Neupane M, Alidoust N, Sanchez D 2017 *Sci. Adv.* **3** e1501692
- [325] Chiu C K, Bian G, Zheng H, Yin J X, Zhang S S, Sanchez D, Belopolski I, Xu S Y, Hasan M Z 2018 *EPL* **123** 47005
- [326] König M, Wiedmann S, Brüne C, Roth A, Buhmann H, Molenkamp L W, Qi X L, Zhang S C 2007 *Science* **318** 766
- [327] Büttner B, Liu C, Tkachov G, Novik E, Brüne C, Buhmann H, Hankiewicz E, Recher P, Trauzettel B, Zhang S 2011 *Nat. Phys.* **7** 418
- [328] Mani A, Benjamin C 2017 *Sci. Rep.* **7** 6954
- [329] Weng H, Dai X, Fang Z 2014 *Phys. Rev. X* **4** 011002
- [330] Liu Y, Yuan X, Zhang C, Jin Z, Narayan A, Luo C, Chen Z, Yang L, Zou J, Wu X 2016 *Nat. Commun.* **7** 12516
- [331] Zhang W, Yu R, Feng W, Yao Y, Weng H, Dai X, Fang Z 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 156808
- [332] Sebastian S E, Harrison N, Palm E, Murphy T, Mielke C, Liang R, Bonn D, Hardy W, Lonzarich G 2008 *Nature* **454** 200
- [333] Li L, Checkelsky J G, Hor Y S, Uher C, Hebard A F, Cava R J, Ong N 2008 *Science* **321** 547
- [334] Zhang Z, Wei W, Yang F, Zhu Z, Guo M, Feng Y, Yu D, Yao M, Harrison N, McDonald R 2015 *Phys. Rev. B* **92** 235402
- [335] Mikitik G, Sharlai Y V 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 106403
- [336] Mikitik G, Sharlai Y V 1996 *Low Temp. Phys.* **22** 585
- [337] Mikitik G, Sharlai Y V 2016 *Phys. Rev. B* **94** 195123
- [338] Moll P J, Potter A C, Nair N L, Ramshaw B, Modic K A, Riggs S, Zeng B, Ghimire N J, Bauer E D, Kealhofer R 2016 *Nat. Commun.* **7** 12492
- [339] Koshino M, Hizbullah I F 2016 *Phys. Rev. B* **93** 045201
- [340] Chen Z G, Chen R, Zhong R, Schneeloch J, Zhang C, Huang Y, Qu F, Yu R, Li Q, Gu G 2017 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **114** 816
- [341] Chen R, Zhang S, Schneeloch J, Zhang C, Li Q, Gu G, Wang N 2015 *Phys. Rev. B* **92** 075107
- [342] Wu R, Ma J Z, Nie S M, Zhao L X, Huang X, Yin J X, Fu B B, Richard P, Chen G F, Fang Z 2016 *Phys. Rev. X* **6** 021017
- [343] Li X B, Huang W K, Lv Y Y, Zhang K W, Yang C L, Zhang B B, Chen Y, Yao S H, Zhou J, Lu M H 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 176803
- [344] Xiong H, Sobota J, Yang S L, Soifer H, Gauthier A, Lu M H, Lv Y Y, Yao S H, Lu D, Hashimoto M 2017 *Phys. Rev. B* **95** 195119
- [345] Manzoni G, Gragnaniello L, Autès G, Kuhn T, Sterzi A, Cilento F, Zacchigna M, Enenkel V, Vobornik I, Barba L 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 237601
- [346] Xu B, Zhao L, Marsik P, Sheveleva E, Lyzwa F, Dai Y, Chen G, Qiu X, Bernhard C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 187401
- [347] Zhang J, Guo C, Zhu X, Ma L, Zheng G, Wang Y, Pi L, Chen Y, Yuan H, Tian M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 206601
- [348] Jones T, Fuller W, Wieting T, Levy F 1982 *Solid State Commun.* **42** 793
- [349] Behnia K, Aubin H 2016 *Rep. Prog. Phys.* **79** 046502
- [350] Gooth J, Niemann A C, Meng T, Grushin A G, Landsteiner K, Gotsmann B, Menges F, Schmidt M, Shekhar C, Stöß V 2017 *Nature* **547** 324
- [351] Behnia K, Méasson M A, Kopelevich Y 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 166602
- [352] Fauqué B, Zhu Z, Murphy T, Behnia K 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 246405
- [353] Fauqué B, Butch N P, Syers P, Paglione J, Wiedmann S, Collaudin A, Grena B, Zeitler U, Behnia K 2013 *Phys. Rev. B* **87** 035133
- [354] Liang T, Gibson Q, Xiong J, Hirschberger M, Koduvayur S P, Cava R J, Ong N P 2013 *Nat. Commun.* **4** 1
- [355] Zhu Z, Lin X, Liu J, Fauqué B, Tao Q, Yang C, Shi Y, Behnia K 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 176601
- [356] Jia Z, Li C, Li X, Shi J, Liao Z, Yu D, Wu X 2016 *Nat. Commun.* **7** 13013
- [357] Liang T, Lin J, Gibson Q, Gao T, Hirschberger M, Liu M, Cava R J, Ong N P 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 136601
- [358] Matusiak M, Cooper J, Kaczorowski D 2017 *Nat. Commun.* **8** 15219
- [359] Watzman S J, McCormick T M, Shekhar C, Wu S C, Sun Y, Prakash A, Felser C, Trivedi N, Heremans J P 2018 *Phys. Rev. B* **97** 161404
- [360] Zhang Y, Wang C, Yu L, Liu G, Liang A, Huang J, Nie S, Sun X, Zhang Y, Shen B, et al. 2017 *Nat. Commun.* **8** 15512

- [361] Stockert U, Dos Reis R, Ajeesh M, Watzman S, Schmidt M, Shekhar C, Heremans J, Felser C, Baenitz M, Nicklas M 2017 *J. Phys.-Condes. Matter* **29** 325701
- [362] Wang J, Niu J, Yan B, Li X, Bi R, Yao Y, Yu D, Wu X 2018 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **115** 9145
- [363] Skinner B, Fu L 2018 *Sci. Adv.* **4** eaat2621
- [364] Raikh M, Shahbazyan T 1993 *Phys. Rev. B* **47** 1522
- [365] Pesin D, Mishchenko E, Levchenko A 2015 *Phys. Rev. B* **92** 174202
- [366] Wang H W, Fu B, Shen S Q 2018 *Phys. Rev. B* **98** 081202
- [367] Alexandradinata A, Glazman L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 256601
- [368] Alexandradinata A, Wang C, Duan W, Glazman L 2018 *Phys. Rev. X* **8** 011027
- [369] Hoeller J, Alexandradinata A 2018 *Phys. Rev. B* **98** 024310
- [370] O'Brien T, Diez M, Beenakker C 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 236401
- [371] Fei F, Bo X, Wang R, Wu B, Jiang J, Fu D, Gao M, Zheng H, Chen Y, Wang X 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041201
- [372] Yang H, Moessner R, Lim L K 2018 *Phys. Rev. B* **97** 165118
- [373] Oroszlány L, Dóra B, Cserti J, Cortijo A 2018 *Phys. Rev. B* **97** 205107
- [374] Zhang Y, Bulmash D, Hosur P, Potter A C, Vishwanath A 2016 *Sci. Rep.* **6** 23741
- [375] Wang H, Liu H, Li Y, Liu Y, Wang J, Liu J, Dai J Y, Wang Y, Li L, Yan J 2018 *Sci. Adv.* **4** eaau5096
- [376] Wang H, Liu Y, Liu Y, Xi C, Wang J, Liu J, Wang Y, Li L, Lau S P, Tian M 2019 *Natl. Sci. Rev.* **6** 914
- [377] Zhang P, Zhai H 2018 *Front. Phys.* **13** 137204
- [378] Liu H, Jiang H, Wang Z, Joynt R, Xie X 2018 arXiv: 1807.02459 [cond-mat]
- [379] Weng H, Fang C, Fang Z, Dai X 2016 *Phys. Rev. B* **93** 241202
- [380] Weng H, Fang C, Fang Z, Dai X 2016 *Phys. Rev. B* **94** 165201
- [381] Bradlyn B, Cano J, Wang Z, Vergniory M, Felser C, Cava R, Bernevig B A 2016 *Science* **353**
- [382] Chang G, Xu S Y, Huang S M, Sanchez D S, Hsu C H, Bian G, Yu Z M, Belopolski I, Alidoust N, Zheng H 2017 *Sci. Rep.* **7** 1688
- [383] Lv B, Feng Z L, Xu Q N, Gao X, Ma J Z, Kong L Y, Richard P, Huang Y B, Strocov V, Fang C 2017 *Nature* **546** 627
- [384] Ma J Z, He J B, Xu Y F, Lv B, Chen D, Zhu W L, Zhang S, Kong L Y, Gao X, Rong L Y 2018 *Nat. Phys.* **14** 349
- [385] He J, Chen D, Zhu W, Zhang S, Zhao L, Ren Z, Chen G 2017 *Phys. Rev. B* **95** 195165
- [386] Zhu W, He J, Zhang S, Chen D, Shan L, Ren Z, Chen G 2017 arXiv: 1707.00942 [cond-mat]
- [387] Kumar N, Sun Y, Nicklas M, Watzman S J, Young O, Leermakers I, Hornung J, Klotz J, Gooth J, Manna K 2019 *Nat. Commun.* **10** 2475
- [388] Felser C, Yan B 2016 *Nat. Mater.* **15** 1149
- [389] Nayak A K, Fischer J E, Sun Y, Yan B, Karel J, Komarek A C, Shekhar C, Kumar N, Schnelle W, Kübler J 2016 *Sci. Adv.* **2** e1501870
- [390] Wang Z, Vergniory M, Kushwaha S, Hirschberger M, Chulkov E, Ernst A, Ong N P, Cava R J, Bernevig B A 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 236401
- [391] Chang G, Xu S Y, Zheng H, Singh B, Hsu C H, Bian G, Alidoust N, Belopolski I, Sanchez D S, Zhang S 2016 *Sci. Rep.* **6** 38839
- [392] Nie S, Xu G, Prinz F B, Zhang S C 2017 *Proc. Natl. Acad. Sci.* **114** 10596
- [393] Yang H, Sun Y, Zhang Y, Shi W J, Parkin S S, Yan B 2017 *New J. Phys.* **19** 015008
- [394] Liu E, Sun Y, Kumar N, Muechler L, Sun A, Jiao L, Yang S Y, Liu D, Liang A, Xu Q 2018 *Nat. Phys.* **14** 1125
- [395] Wang Q, Xu Y, Lou R, Liu Z, Li M, Huang Y, Shen D, Weng H, Wang S, Lei H 2018 *Nat. Commun.* **9** 3681
- [396] Guin S N, Manna K, Noky J, Watzman S J, Fu C, Kumar N, Schnelle W, Shekhar C, Sun Y, Gooth J 2019 *NPG Asia Mater.* **11** 1
- [397] Chang G, Singh B, Xu S Y, Bian G, Huang S M, Hsu C H, Belopolski I, Alidoust N, Sanchez D S, Zheng H 2018 *Phys. Rev. B* **97** 041104
- [398] Yin J X, Zhang S S, Li H, Jiang K, Chang G, Zhang B, Lian B, Xiang C, Belopolski I, Zheng H 2018 *Nature* **562** 91
- [399] Soluyanov A A, Gresch D, Wang Z, Wu Q, Troyer M, Dai X, Bernevig B A 2015 *Nature* **527** 495
- [400] Deng K, Wan G, Deng P, Zhang K, Ding S, Wang E, Yan M, Huang H, Zhang H, Xu Z 2016 *Nat. Phys.* **12** 1105
- [401] Jiang J, Liu Z, Sun Y, Yang H, Rajamathi C, Qi Y, Yang L, Chen C, Peng H, Hwang C 2017 *Nat. Commun.* **8** 13973
- [402] Wang Y, Liu E, Liu H, Pan Y, Zhang L, Zeng J, Fu Y, Wang M, Xu K, Huang Z 2016 *Nat. Commun.* **7** 13142
- [403] Zhang E, Chen R, Huang C, Yu J, Zhang K, Wang W, Liu S, Ling J, Wan X, Lu H Z 2017 *Nano Lett.* **17** 878
- [404] Chen D, Zhao L, He J, Liang H, Zhang S, Li C, Shan L, Wang S, Ren Z, Ren C 2016 *Phys. Rev. B* **94** 174411
- [405] Khim S, Koepernik K, Efremov D V, Klotz J, Förster T, Wosnitza J, Sturza M I, Wurmehl S, Hess C, van den Brink J 2016 *Phys. Rev. B* **94** 165145
- [406] Xu S Y, Alidoust N, Chang G, Lu H, Singh B, Belopolski I, Sanchez D S, Zhang X, Bian G, Zheng H 2017 *Sci. Adv.* **3** e1603266
- [407] Belopolski I, Sanchez D S, Ishida Y, Pan X, Yu P, Xu S Y, Chang G, Chang T R, Zheng H, Alidoust N 2016 *Nat. Commun.* **7** 13643
- [408] Chang G, Xu S Y, Sanchez D S, Huang S M, Lee C C, Chang T R, Bian G, Zheng H, Belopolski I, Alidoust N 2016 *Sci. Adv.* **2** e1600295
- [409] Zhong C, Chen Y, Yu Z M, Xie Y, Wang H, Yang S A, Zhang S 2017 *Nat. Commun.* **8** 15641
- [410] Chen W, Lu H Z, Hou J M 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041102
- [411] Yan Z, Bi R, Shen H, Lu L, Zhang S C, Wang Z 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041103
- [412] Ezawa M 2017 *Phys. Rev. B* **96** 041202
- [413] Wang C, Lu H Z, Xie X 2020 *Phys. Rev. B* **102** 041204
- [414] Hu Y, Liu H, Jiang H, Xie X 2017 *Phys. Rev. B* **96** 134201
- [415] Wang L X, Li C Z, Yu D P, Liao Z M 2016 *Nat. Commun.* **7** 10769
- [416] Zheng H, Bian G, Chang G, Lu H, Xu S Y, Wang G, Chang T R, Zhang S, Belopolski I, Alidoust N 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 266804
- [417] Zheng H, Zahid Hasan M 2018 *Adv. Phys. X* **3** 1466661
- [418] Zheng H, Chang G, Huang S M, Guo C, Zhang X, Zhang S, Yin J, Xu S Y, Belopolski I, Alidoust N 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 196403
- [419] Chang G, Xu S Y, Zheng H, Lee C C, Huang S M, Belopolski I, Sanchez D S, Bian G, Alidoust N, Chang T R 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 066601
- [420] Wang S, Lin B C, Zheng W Z, Yu D, Liao Z M 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 257701

INVITED REVIEW

Quantum transport in topological matters under magnetic fields^{*}

Qiang Xiao-Bin¹⁾²⁾ Lu Hai-Zhou^{1)2)†}

1) (*Shenzhen Institute for Quantum Science and Engineering, Department of Physics,
Southern University of Science and Technology, Shenzhen 518055, China*)

2) (*Shenzhen Key Laboratory of Quantum Science and Engineering, Shenzhen 518055, China*)

(Received 15 June 2020; revised manuscript received 29 July 2020)

Abstract

Topological matters include topological insulator, topological semimetal and topological superconductor. The topological semimetals are three-dimensional topological states of matter with gapless electronic excitations. They are simply divided into Weyl, Dirac, and nodal-line semimetals according to the touch type of the conduction band and the valence band. Their characteristic electronic structures lead to topologically protected surface states at certain surfaces, corresponding to the novel transport properties. We review our recent works on quantum transport mainly in topological semimetals. The main theories describing the transport behavior of topological matters are given in different magnetic regions.

Keywords: topological semimetal, magnetoresistance, Hall effect, quantum limit

PACS: 72.25.-b, 75.47.-m, 78.40.Kc

DOI: [10.7498/aps.70.20200914](https://doi.org/10.7498/aps.70.20200914)

^{*} Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2016YFA0301700), the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11925402), the Natural Science Foundation of Guangdong Province, China (Grant No. 2016ZT06D348), and the Science and Technology Innovation Commission of Shenzhen, China (Grant Nos. ZDSYS20170303165926217, JCYJ20170412152620376).

[†] Corresponding author. E-mail: luhz@sustech.edu.cn