



## 随机激励下Frenkel-Kontorova模型的纳米摩擦现象

李毅伟 雷佑铭 杨勇歌

## Nano-friction phenomena in driven Frenkel-Kontorova model with stochastic excitation

Li Yi-Wei Lei You-Ming Yang Yong-Ge

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 090501 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201254

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201254>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

基于人工神经网络在线学习方法优化磁屏蔽特性参数

Online learning method based on artificial neural network to optimize magnetic shielding characteristic parameters

物理学报. 2019, 68(13): 130701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190234>

有机金属卤化物钙钛矿中的离子迁移现象及其研究进展

Recent progress of ion migration in organometal halide perovskite

物理学报. 2019, 68(15): 158801 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190853>

超高斯光束抽运调Q固体激光器仿真模型研究

Simulation model of super Gaussian beam pumped Q-switched solid-state laser

物理学报. 2017, 66(18): 180204 <https://doi.org/10.7498/aps.66.180204>

基于双高斯衰减模型的超声回波处理方法

Ultrasonic echo processing method based on dual-Gaussian attenuation model

物理学报. 2019, 68(8): 084303 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182080>

基于卷积高斯混合模型的统计压缩感知

Statistical compressive sensing based on convolutional Gaussian mixture model

物理学报. 2019, 68(18): 180701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190414>

纳米尺度金属-氧化物半导体场效应晶体管沟道热噪声模型

A channel thermal noise model of nanoscaled metal-oxide-semiconductor field-effect transistor

物理学报. 2020, 69(5): 057101 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191512>

# 随机激励下 Frenkel-Kontorova 模型的 纳米摩擦现象\*

李毅伟<sup>1)†</sup> 雷佑铭<sup>2)</sup> 杨勇歌<sup>3)</sup>

1) (山西农业大学数学系, 晋中 030801)

2) (西北工业大学应用数学系, 西安 710129)

3) (广东工业大学应用数学学院, 广州 510520)

(2020年8月3日收到; 2020年12月7日收到修改稿)

基于一维 Frenkel-Kontorova (FK) 模型, 借助随机龙格库塔方法, 在非公度 (incommensurate) 和公度 (commensurate) 两种情形下, 分别研究了高斯白噪声激励下, 随机 FK 模型的纳米摩擦现象 (滞回和超滑) 随噪声强度的变化而变化的规律. 两种情形表明随着噪声强度的增大, 对减小系统滞回, 产生超滑有积极的影响. 另一方面, 当系统机动性能 (chain mobility) 未达到饱和状态 ( $B = 1$ ) 时, 噪声的引入, 能加速原子的运动, 使得原子更易脱离基底势的束缚而做运动, 但是当系统达到饱和状态后, 系统机动性能并不受噪声的影响. 另外, 两种情形的区别是, 公度情形下, 由于原子受到基底势更强烈的耦合作用, 所以噪声对公度情形影响更为明显.

**关键词:** Frenkel-Kontorova 模型, 高斯白噪声, 滞回, 超滑

**PACS:** 05.10.Gg, 68.35.Af, 81.40.Pq, 83.10.Rs

**DOI:** 10.7498/aps.70.20201254

## 1 引言

近年来, 随着精密机械和高科技设备的迅速发展<sup>[1]</sup>, 特别是纳米科技所推动的新兴学科, 如纳米电子学、微型机械的发展, 都要求开展纳米摩擦学研究. 由于这些领域使用的机械设备中, 摩擦副间隙或润滑厚度通常处于纳米范围, 此时宏观摩擦学不再适用, 其间的摩擦磨损与润滑性能必须从原子、分子的相互作用来考察. 纳米摩擦学旨在研究纳米尺度上接触界面的摩擦行为和润滑机理, 从而建立材料微观尺度和宏观特性之间的关系. 另外, 摩擦问题对于微型设备仪器而言显得十分突出和重要. 在某些方面, 摩擦作为阻力, 对于微型机械而言应减小其耗能, 尽可能达到零摩擦状态<sup>[1]</sup>. 因

此纳米摩擦学迅速成为纳米科学技术研究的前沿和热点. 另外, 随着纳米摩擦测试技术的进步和集群计算能力的提高, 推动了人们用简单的数学模型来探索复杂体系的纳米摩擦机制, 而 Frenkel-Kontorova (FK)<sup>[2]</sup> 模型便是成功地描述和解释有关复杂摩擦体系的动力学模型之一. 许多学者借助经典的 FK 模型研究纳米摩擦学的一些现象<sup>[3–27]</sup>. 如今, 它已经成为了研究纳米摩擦学领域的一种重要的理论工具. 通过对 FK 模型的研究<sup>[12–14]</sup>, 成功地描述和解释了滞回、超滑等现象的产生诱因. 这些结论很好地解释了纳米摩擦领域的一些问题, 成功地将 FK 模型和纳米摩擦联系起来.

迄今为止关于 FK 模型的研究主要集中在确定性情形<sup>[5–14]</sup>, 然而真实的系统往往受到随机因素的影响<sup>[4]</sup>, 微纳观系统更是如此. Guerra 等<sup>[24]</sup> 分

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11902081)、山西省高等学校科技创新基金 (批准号: 2020L0172) 和山西农业大学青年科技创新基金 (批准号: 2020QC04) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: math\_ywl@sxau.edu.cn

别从不同角度研究了温度的变化对系统纳米摩擦现象的影响,表明温度对系统减小滞回有积极影响; Tekić等 [15–18] 也从夏皮洛台阶 (Shapiro step) 等角度探讨了噪声激励下的 FK 模型. 目前关于随机 FK 模型的研究仍然处于探索阶段, 因此考虑随机 FK 模型的研究对于理解纳米摩擦机理更具有实际意义. 本文主要研究高斯白噪声激励下的 FK 模型的一些纳米摩擦现象 (如滞回、超滑等现象) 的变化规律. 通过改变噪声强度, 刻画噪声强度与滞回、超滑等现象之间的定量关系 [8]. 通过研究高斯白噪声激励下的 FK 模型对研究其他随机激励下的 FK 模型具有借鉴意义. 也对进一步建立适用于随机 FK 模型的新的分析方法提供依据.

## 2 理论模型

基于确定性的一维 FK 模型 [12–14], 本文进一步考虑高斯白噪声激励下由  $N$  个原子构成的随机 FK 模型, 模型中第  $i$  ( $1 \leq i \leq N$ ) 个原子满足如下运动方程:

$$m\ddot{x}_i + m\gamma\dot{x}_i + \frac{1}{2} \left( \sin \frac{2\pi}{a} x_i + \sin \frac{2\pi\beta}{a} x_i \right) + \frac{d}{dx_i} \left[ \sum_{i \neq j} V_{\text{int}}(|x_i - x_j|) \right] = F + \xi(t). \quad (1)$$

不失一般性, 本文采用无量纲化处理, 假设每个原子的质量  $m = 1$ .  $x_i$  表示第  $i$  个原子的位置 ( $1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n$ ). 系统的阻尼项用  $\gamma\dot{x}_i$  表示 [8,12], 外势周期为  $a$ , 当参数  $\beta = 89/144$  [12], 表示非公度情形下准周期基底 (quasiperiodic substrates), 当参数  $\beta = 24/30$ , 表示公度情形下多势阱周期基底 (multiple-well periodic substrates).  $\sum_{j \neq i} V_{\text{int}}(|x_i - x_j|)$  [26] 表示其他原子对第  $i$  个原子的作用势, 即对所有的  $j$  求和 ( $j \neq i$ ). 本文原子间的作用势采用 Morse 势:  $V_{\text{int}}(r) = \frac{K}{2} [1 - e^{(b-r)}]^2$ , 其中  $K$  表示弹性系数. 基底势由晶格常数 (原子链处于平衡状态时相邻原子间的距离) 为  $b = L/N$  ( $L$  为链长), 外势周期  $a$  和  $c = a/\beta$  共同决定 [12,24]. 则与 Morse 势相关的原子间的作用力  $F_{\text{int}}(x)$  可表示为

$$F_{\text{int}}(x) = -\frac{dV_{\text{int}}(x)}{dx} = -Ke^{(b-x)}[1 - e^{(b-x)}]. \quad (2)$$

(1) 式右端,  $F$  表示维持原子链运动的无量纲外力;

高斯白噪声  $\xi(t)$  与系统阻尼项  $m\gamma\dot{x}_i$  之间满足涨落耗散理论 [24]:

$$\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2m\gamma k_B T \delta(t-s). \quad (3)$$

这里  $k_B$  为玻尔兹曼常数,  $T$  为环境温度. 为简化说明, 令  $D = m\gamma k_B T$ , 则 (1) 式中的高斯白噪声满足统计性质 [28]:  $\langle \xi(t) \rangle = 0$  和  $\langle \xi(t)\xi(s) \rangle = 2D\delta(t-s)$ ,  $D$  代表噪声强度. 为处理 (1) 式中的高斯白噪声, 采用针对白噪声的随机龙格-库塔法 [28] 进行模拟.

在数值模拟过程中采用周期性边界条件 [8,12,24]:  $x_{i+N} = x_i + Nb$ . 通过引入新的变量  $v_i, u_i$  将 (1) 式进行降阶处理, 得到如下随机微分方程组:

$$\begin{cases} \dot{x} = v_i, \\ m\dot{v}_i = -m\gamma v_i - \frac{1}{2} \left( \sin \frac{2\pi}{a} u_i + \sin \frac{2\pi\beta}{a} u_i \right) \\ \quad + F_{\text{int}}(|u_i - u_j|) + F + \xi(t). \end{cases} \quad (4)$$

所有粒子在初始时刻处于静止分布. 为避免其他因素干扰, 系统处于理想的绝热状态. 记录原子链在稳定状态时的条件 (速度和位移) 作为下一时刻的初始条件. 定义系统的平均速度:

$$\langle v \rangle = \frac{1}{NT} \int_0^T \sum_{i=1}^N v_i. \quad (5)$$

另外, 当外驱动力小于某个临界值时, 系统平均速度为零, 当外驱动力大于该临界值时, 系统的平均速度不为零, 在外驱动力的作用下系统发生相对运动, 称该临界值为最大静摩擦力  $F_s$ . Vanossi 等 [12] 和 Braun 等 [13] 有关 FK 模型的研究表明, 当弹性系数  $K$  较小, 且系统处于欠阻尼状态时, 系统的滞回现象明显, 也便于本文有关问题解释说明. 因此, 如未强调,  $K = 1, \gamma = 0.7$ . 为了研究系统的运动性能, 类似于文献, 引入指标  $B = V_{\text{CM}}/F$  [24] 刻画原子链的机动性能 (chain mobility),  $V_{\text{CM}}$  表示原子链质心 (center of mass) 的平均速度.  $B_f = (m\gamma)^{-1}$  表示原子链移动的最大渐进值 [24].

由于晶格常数  $b$  和外势周期  $a$  这两个长度尺度相竞争 [2], 使得基态结构非常复杂. 当  $b/a = 1$ , 称为公度. 当  $b/a = 144/233$ , 称为黄金分割. 当  $b/a = 351/256$ , 称为螺旋分割. 黄金分割和螺旋分割属于非公度情形 [8]. 对于非公度情形, 因为相邻原子间的距离不可通约, 系统内的所有原子容易脱离基底的束缚做同步运动; 而公度情形下, 原子要被束缚在基底势的势阱中, 所以系统本身在非公度和公度情形下有所区别 [8,10]. 另外, 随着外力  $F$  绝

热增加和减小的过程中,系统发生了钉扎-脱钉 (pinning-depinning) 的转变过程,在这个过程中,出现了滞回的有趣现象,它源于原子间的相互作用. 当外驱动力绝热增加时,系统从锁定状态转变为运动状态,出现脱钉转变;当外驱动力绝热减少时,系统从运动状态转变为锁定状态,出现钉扎转变. 并且发生脱钉和钉扎转变时的驱动力往往是不同的,发生钉扎转变时的摩擦力小于发生脱钉转变时的摩擦力 (存在滞回现象),这表明发生脱钉转变和钉扎转变的机理是不同的 [12,24]. 因此本文将分别从非公度情形 (以黄金分割为例) 和公度两种情形,研究外力驱动的 FK 模型在随机激励下,系统的纳米摩擦现象 (滞回以及最大静摩擦力) 随噪声强度的变化规律.

### 3 数值结果及其分析

#### 3.1 非公度 ( $b/a = 144/233$ ) 情形

图 1 和图 2 描述了在非公度情形下,随着噪声强度  $D$  的增大,系统机动性能  $B$  随着外力绝热增加和减小而改变的规律. 此部分以黄金分割为例,在数值模拟过程中,取  $a = 1$ ,  $b/a = 144/233$ ,  $c = a/\beta = 144/89$  [8,12], 此时链长  $L = 144$ , 原子个数  $N = 233$ .

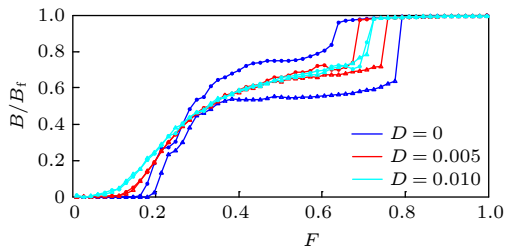


图 1  $D = 0, 0.005, 0.010$  时,非公度情形下系统机动性能  $B$  随外力  $F$  的改变的变化规律 (图中三角形和原点分别表示外力  $F$  绝热增加和减小的过程)

Fig. 1. Noise effects on static friction and hysteresis of the  $B(F)$  characteristics for the incommensurate case when  $D = 0, 0.005, 0.010$ . Triangles and circles denote, respectively, the adiabatic increasing and decreasing process of  $F$ .

如图 1 所示,当噪声强度  $D = 0$ ,即为确定性 FK 模型 [8,12],系统有明显的滞回现象.随着噪声强度  $D$  的增大,系统的滞回区域的面积有明显减小的趋势,与此同时最大静摩擦力  $F_s$  也随着噪声强度的增大有减小的趋势,表明噪声使得原子更容易脱离基底的束缚,做同步运动.

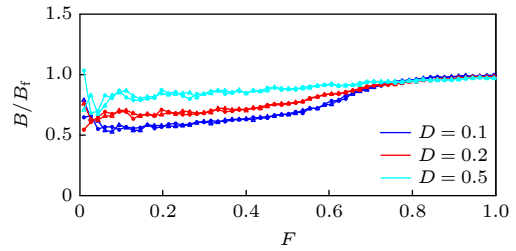


图 2  $D = 0.1, 0.2, 0.5$  时,非公度情形下系统机动性能  $B$  随外力  $F$  的改变的变化规律

Fig. 2. Noise effects on static friction and hysteresis of the  $B(F)$  characteristics for the incommensurate case when  $D = 0.1, 0.2, 0.5$ .

另外,随着外力  $F$  增大的过程中,噪声的引入会加速系统的运动 (如当外力  $F = 0.6$  时,噪声强度越大,系统机动性能越大). 进一步,对于确定性系统 ( $D = 0$ ) 时,当外力  $F \approx 0.8$ ,此后随着外力  $F$  的增大,系统的机动性能  $B$  不再随外力的增大而改变,达到饱和状态 (称机动性能为  $B = 1$  为饱和状态).

随着噪声强度的增大,加速了原子的运动,使得系统的机动性能更早的达到饱和状态 (如当噪声强度  $D = 0.005$ , 外力  $F \approx 0.75$ ; 当噪声强度  $D = 0.01$ , 外力  $F \approx 0.7$ ), 此后系统的机动性能达到饱和状态,不随噪声强度以及外力的增大而改变. 此时,随机激励下系统的机动性能与确定性系统下机动性能是一致的 ( $B = 1$ ), 表明饱和状态下的机动性能是系统固有的属性.

随着噪声强度进一步增大,如图 2 所示,系统滞回现象消失,也产生了超滑现象. 验证了噪声的引入对减小滞回,减小系统摩擦,产生超滑有积极的影响. 另外,随着噪声强度的增大,系统的平均机动性能有明显增大的趋势,更早地达到饱和状态 ( $B = 1$ ), 但当系统达到饱和状态后 (如当外力  $F \geq 0.8$  时), 系统的机动性能不受噪声的影响. 进一步验证噪声使得原子更易脱离基底的束缚,做同步运动,但噪声并不改变系统的饱和状态下的机动性能.

图 3 则从整体上考察了,系统的最大静摩擦力  $F_s$  受噪声强度  $D$  影响的变化规律. 也验证了图 1 和图 2 的结论. 结果表明,随着噪声强度的增大,最大静摩擦力有减小的趋势,当噪声强度  $D \approx 0.1$  时,系统将产生超滑现象.

综上,由图 1—3 可得,在非公度情形下,当系统的机动性能未到饱和状态时,噪声的引入加速了

原子脱离基底的束缚, 改变了系统的滞回区域的面积以及最大静摩擦力的大小, 噪声强度越大, 系统的机动性能越早地到达饱和状态. 但当系统机动性能达到饱和状态后, 随着外力的改变, 噪声强度并不改变系统的机动性能. 因此为减小摩擦, 产生超滑, 适度的噪声激励即可.

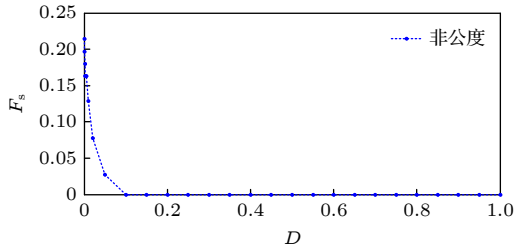


图 3 非公度情形下最大静摩擦力  $F_s$  随噪声强度  $D$  的变化规律

Fig. 3. Noise effects on maximum static friction for the incommensurate case.

### 3.2 公度 ( $b/a = 1$ ) 情形

为验证噪声对系统纳米摩擦现象的影响. 此部分将在公度情形下, 研究随机因素影响下, 系统的纳米摩擦现象随着噪声强度的增大而变化的规律. 其中  $a = 1$ ,  $c = a/\beta = 30/24$ , 此时, 链长  $L = 140$ , 原子个数  $N = 140$ <sup>[8,12]</sup>. 图 4 和图 5 描述的是系统的机动性能  $B$  随着外力  $F$  绝热增大和减小而发生变化的过程.

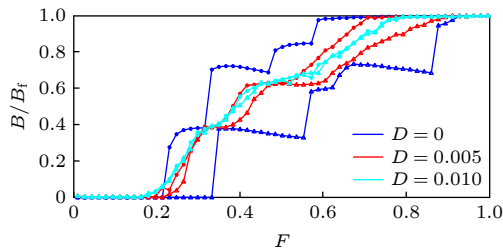


图 4  $D = 0, 0.005, 0.010$  时, 公度情形下系统机动性能  $B$  随外力  $F$  的改变的变化规律 (图中三角形和原点分别表示外力  $F$  绝热增加和减小的过程)

Fig. 4. Noise effects on static friction and hysteresis of the  $B(F)$  characteristics for the commensurate case when  $D = 0, 0.005, 0.010$ . Triangles and circles denote, respectively, the adiabatic increasing and decreasing process of  $F$ .

如图 4 所示, 当无随机激励 ( $D = 0$ ) 时, 系统有明显的滞回现象, 随着噪声强度的增大, 滞回区域的面积有明显减小的趋势直至消失. 此过程系统的最大静摩擦力  $F_s$  也随着噪声强度的增大而减小. 印证了非公度的相关结论.

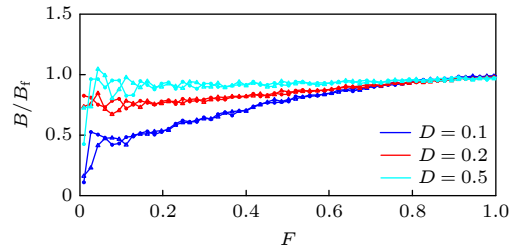


图 5  $D = 0.1, 0.2, 0.5$  时公度情形下系统机动性能  $B$  随外力  $F$  的改变的变化规律

Fig. 5. Noise effects on static friction and hysteresis of the  $B(F)$  characteristics for the commensurate case when  $D = 0.1, 0.2, 0.5$ .

另一方面, 当系统机动性能未达到饱和状态时, 随着外力  $F$  的增大, 噪声加速了原子的运动, 使得系统的机动性能更早地达到饱和状态 ( $D = 0, F \approx 0.93$ ;  $D = 0.005, F \approx 0.90$ ;  $D = 0.01, F \approx 0.79$ ). 之后, 系统的机动性能  $B$  不受外力以及随机因素的影响.

对比图 1 和图 4. 非公度情形下, 链长  $L = 144$ , 原子个数为  $N = 233$ . 公度情形下, 链长  $L = 140$ , 而原子个数为  $N = 140$ . 当链长相差不多的情况下, 公度情形下, 原子个数相对较少, 但当噪声强度  $D = 0$  时 (此时为确定性 FK 系统), 公度情形下的滞回区域却明显大于非公度情形下的滞回区域<sup>[12]</sup>. 公度情形下, 最大静摩擦力也大于非公度情形. 与非公度相比 (如图 1 所示), 公度情形下, 系统滞回受随机因素的影响变化更为明显, 系统的最大静摩擦力改变也更为明显 (如图 6 所示). 公度和非公度的区别在于: 公度情形下, 要移动原子链, 就必须使原子爬上并越过外势的顶部, 从而克服一个势垒<sup>[29]</sup>. 噪声的引入, 使得这种束缚变得极不稳定, 此时原子也会逃离势阱做同步运动. 因此, 公度情形下, 系统受到的耦合作用更为强烈. 从而噪声对公度情形的影响也更为明显.

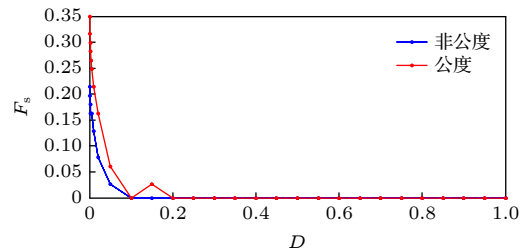


图 6 公度与非公度情形下最大静摩擦力  $F_s$  随噪声强度  $D$  的改变的变化规律

Fig. 6. Noise effects on maximum static friction for the incommensurate case (blue) and the commensurate case (red).

如图 5 所示, 进一步增大噪声强度, 系统的滞回消失, 产生超滑现象. 当外力  $F < 0.8$  时, 随着噪声强度的增大, 系统的机动性能  $B$  随着噪声强度的增大而增大, 表明噪声的引入, 使得原子更容易脱离基底势的束缚而运动. 但当外力  $F \geq 0.8$ , 系统的机动性能不受噪声强度以及外力的影响. 验证了噪声容易使得原子脱离束缚, 但并不改变系统饱和状态时的机动性能.

进一步, 图 6 从总体上描述了最大静摩擦力  $F_s$  随噪声强度  $D$  的改变的变化规律. 在非公度和公度状态下, 随着噪声强度的增大, 最大静摩擦力都有减小的趋势, 当噪声强度  $D \approx 0.1$ , 系统将产生超滑现象. 不同之处在于, 由于公度情形下, 原子受到基底势更强的耦合作用, 所以噪声的引入, 使得这种束缚变得极不稳定, 此时原子也会逃离势阱做同步运动, 所以对公度情形下 (如滞回, 最大静摩擦力) 的影响更为明显.

## 4 结 论

本文从非公度和公度两方面, 研究了高斯白噪声激励下的一维随机 FK 模型. 讨论了系统纳米摩擦现象受噪声强度影响的变化规律. 结果表明: 在非公度和公度情形下, 随着噪声强度的增大, 对减小系统的滞回和减小摩擦有积极影响, 当噪声强度选择恰当, 系统将产生超滑. 另一方面, 噪声的引入, 加速原子运动, 使得系统更快地进入饱和状态, 但当系统达到饱和状态后, 系统的机动性能并不受噪声的影响. 因此, 为减小滞回, 产生超滑, 适当的噪声强度即可.

非公度和公度的区别在于: 受噪声影响, 公度情形影响更为明显. 表明相同前提下, 公度情形由于受到基底势更为强烈的耦合作用 [8,29] 从而具有更为复杂的动力学行为. 通过对高斯白噪声激励下的 FK 模型的研究, 对其他有色噪声激励下的 FK 模型有更好的借鉴意义. 对于人们设计出超润滑材料, 以及制造出具有工程应用价值的新材料有一定的借鉴作用.

## 参考文献

- [1] Wen S Z 2007 *Chin. J. Mech. Eng.* **43** 1 (in Chinese) [温诗铸 2007 *机械工程学报* **43** 1]
- [2] Braun O M, Kivshar Y S 2004 *The Frenkel-Kontorova model: Concepts, Methods, and Applications* (Berlin: Springer) pp2-20
- [3] Wolfgang Q, Josep M B 2019 *Eur. Phys. J. B* **92** 1
- [4] Lei Y M, Zheng F, Shao X Z 2017 *Int. J. Bifurcation Chaos* **27** 1750052
- [5] Zhang Z J, Tang C M, Tong P Q 2016 *Phys. Rev. E* **93** 022216
- [6] Vanossi A, Benassi A, Varini N, Tosatti E 2013 *Phys. Rev. B* **87** 045412
- [7] Zhang J Q, Nie L R, Zhang X Y, Chen R Y 2014 *Eur. Phys. J. B* **87** 1
- [8] Lei Y M, Li Y W, Zhao Y P 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 220502 (in Chinese) [雷佑铭, 李毅伟, 赵云平 2014 *物理学报* **63** 220502]
- [9] Yung K L, Lei Y M, Xu Y 2010 *Chin. Phys. B* **19** 010503
- [10] Yang Y, Wang C L, Duan W S, Shi Y R, Chen J M 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 130501 (in Chinese) [杨阳, 王苍龙, 段文山, 石玉仁, 陈建敏 2012 *物理学报* **61** 130501]
- [11] Yang Y, Duan W S, Yang L, Chen J M, Lin M M 2011 *Europhys. Lett.* **93** 16001
- [12] Vanossi A, Santoro G, Bortolani V 2004 *J. Phys. Condens. Matter* **16** 2895
- [13] Braun O M, Bishop A, Röder J 1997 *Phys. Rev. Lett* **79** 3692
- [14] Vanossi A, Röder J, Bishop A, Bortolani V 2003 *Phys. Rev. E* **67** 016605
- [15] Tekić J, Hu B 2008 *Phys. Rev. B* **78** 104305
- [16] Tekić J, He D, Hu B 2009 *Phys. Rev. E* **79** 036604
- [17] Tekić J, Hu B 2010 *Phys. Rev. E* **81** 036604
- [18] Hu B, Tekić J 2007 *Phys. Rev. E* **75** 056608
- [19] Capozza R, Vanossi A, Vezzani A, Zapperi S 2012 *Tribol. Lett.* **48** 95
- [20] Braun O M, Zhang H, Hu B, Tekić J 2003 *Phys. Rev. E* **67** 066602
- [21] Capozza R, Vanossi A, Vezzani A, Zapperi S 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 085502
- [22] Lin M M, Duan W S, Chen J M 2010 *Chin. Phys. B* **19** 026201
- [23] Vanossi A, Braun O M 2007 *J. Phys. Condens. Matter* **19** 305017
- [24] Guerra R, Vanossi A, Ferrario M 2007 *Surf. Sci.* **601** 3676
- [25] Braun O M, Dauxois T, Paliy M V, Peyrard M 1997 *Phys. Rev. E* **55** 3598
- [26] Li X L, Liu F, Lin M M, Chen J M, Duan W S 2010 *Acta Phys. Sin.* **59** 2589 (in Chinese) [李晓礼, 刘锋, 林麦麦, 陈建敏, 段文山 2010 *物理学报* **59** 2589]
- [27] Qin W X 2017 *Sci. Sin. Math.* **47** 1853 (in Chinese) [秦文新 2017 *中国科学: 数学* **47** 1853]
- [28] Honeycutt R 1992 *Phys. Rev. A* **45** 600
- [29] Xu A G, Wang G R, Chen S G, Yang Z R 1999 *Prog. Phys.* **19** 109 (in Chinese) [许爱国, 王光瑞, 陈式刚, 杨展如 1999 *物理学进展* **19** 109]

# Nano-friction phenomena in driven Frenkel-Kontorova model with stochastic excitation\*

Li Yi-Wei<sup>1)†</sup> Lei You-Ming<sup>2)</sup> Yang Yong-Ge<sup>3)</sup>

1) (*Department of Mathematics, Shanxi Agricultural University, Jinzhong 030801, China*)

2) (*Department of Applied Mathematics, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710129, China*)

3) (*School of Applied Mathematics, Guangdong University of Technology, Guangzhou 510520, China*)

( Received 3 August 2020; revised manuscript received 7 December 2020 )

## Abstract

In this paper, the effects of a Gaussian white noise excitation on the one-dimensional Frenkel-Kontorova (FK) model are studied by the stochastic Runge-Kutta method under two different types of substrate cases, i.e. incommensurate case and commensurate case. The noise excitation is considered through the inclusion of a stochastic force via a Langevin molecular dynamics approach, and we uncover the mechanism of nano-friction phenomenon in the FK model driven by the stochastic force. The relationship between the noise intensity and the nano-friction phenomenon, such as hysteresis, maximum static friction force, and the super-lubricity, is investigated by using the stochastic Runge-Kutta algorithm. It is shown that with the increase of noise intensity, the area of the hysteresis becomes smaller and the maximum static friction force tends to decrease, which can promote the generation of super-lubricity. Similar results are obtained from the two cases, in which the ratios of the atomic distance to the period of the substrate potential field are incommensurate and commensurate, respectively. In particular, a suitable noise density gives rise to super-lubricity where the maximum static friction force vanishes. Hence, the noise excitation in this sense is beneficial to the decrease of the hysteresis and the maximum static friction force. Meanwhile, with the appropriate external driving force, the introduction of a noise excitation can accelerate the motion of the system, making the atoms escape from the substrate potential well more easily. But when the chain mobility reaches a saturation state ( $B = 1$ ), it is no longer affected by the stochastic excitation. Furthermore, the difference between the two circumstances lies in the fact that for the commensurate interface, the influence of the noise is much stronger and more beneficial to triggering the motion of the FK model than for the incommensurate interface since the atoms in the former case are coupled and entrapped more strongly by the substrate potential.

**Keywords:** Frenkel-Kontorova model, Gaussian white noise, hysteresis, super-lubricity

**PACS:** 05.10.Gg, 68.35.Af, 81.40.Pq, 83.10.Rs

**DOI:** 10.7498/aps.70.20201254

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11902081), the Science and Technology Innovation Foundation of Higher Education Institutions of Shanxi Province, China (Grant No. 2020L0172), and the Science and Technology Innovation Foundation for Young Scientists of Shanxi Agricultural University, China (Grant No. 2020QC04).

† Corresponding author. E-mail: [math\\_ywl@sxau.edu.cn](mailto:math_ywl@sxau.edu.cn)