



利用特殊函数和类比法有序化排列正负指数幂算符

王磊 李洪奇 徐兴磊 徐世民 王继锁

Ordering positive and negative exponential power operators by virtue of special functions and analogy method

Wang Lei Li Hong-Qi Xu Xing-Lei Xu Shi-Min Wang Ji-Suo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 040302 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201652

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201652>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多种有序钙钛矿结构的高压制备与特殊物性

High-pressure synthesis and special physical properties of several ordered perovskite structures

物理学报. 2017, 66(3): 030201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.030201>

蓝相液晶指向有序的定域化及微结构制备

Localization of blue phase liquid crystal with ordered crystallographic direction and well-defined micro-patterning

物理学报. 2018, 67(6): 066101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172517>

图形化蓝宝石衬底上有序微米半球形SnO₂的生长、结构和光学特性研究

Growth, structural and optical properties of orderly SnO₂ microhemispheres on patterned sapphire substrates

物理学报. 2017, 66(3): 038101 <https://doi.org/10.7498/aps.66.038101>

量子扩散通道中Wigner算符的演化规律

Time evolution law of Wigner operator in diffusion channel

物理学报. 2020, 69(9): 090301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200106>

石墨烯纳米片磁有序和自旋逻辑器件第一原理研究

First-principles study of magnetic order in graphene nanoflakes as spin logic devices

物理学报. 2018, 67(21): 217101 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181297>

斯格明子相关的螺旋磁有序体系的临界行为

Critical behaviors of helimagnetic ordering systems relating to skyrmion

物理学报. 2018, 67(13): 137501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180137>

利用特殊函数和类比法有序化排列正负指数幂算符*

王磊¹⁾²⁾ 李洪奇^{1)†} 徐兴磊^{1)‡} 徐世民¹⁾ 王继锁²⁾

1) (菏泽学院物理与电子工程学院, 菏泽 274015)

2) (曲阜师范大学物理工程学院, 曲阜 273165)

(2020 年 10 月 7 日收到; 2020 年 10 月 26 日收到修改稿)

研究算符函数的有序化排列是一项重要的数理任务. 本文利用特殊函数和正规乘积排序与反正规乘积排序间的互换法则法导出了幂算符 $(aa^\dagger)^{\pm n}$ 和 $(a^\dagger a)^{\pm n}$ 的正规与反正规乘积排序. 进一步, 利用类比法得到了算符 $(XP)^{\pm n}$ 和 $(PX)^{\pm n}$ 的坐标-动量排序与动量-坐标排序式. 最后, 对新得到的这些算符结果的应用进行一些讨论.

关键词: 算符的有序排列, 特殊函数, 互换法则, 类比法

PACS: 03.65.-w, 03.67.-a, 89.70.-a

DOI: 10.7498/aps.70.20201652

1 引言

在量子物理中算符是一个重要的基本概念. 一般来说, 由于算符的不可对易性, 譬如玻色湮灭算符与产生算符的对易关系为 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$, 使得涉及算符的计算颇为棘手. 如果能够把算符转化为有序排列形式, 则相应的计算就方便得多. 例如一个正规乘积排序的算符: $f(a, a^\dagger) :$, 其在相干态表象 $|z\rangle = \exp\left(-\frac{1}{2}zz^* + za^\dagger\right)|0\rangle$ 中的矩阵元^[1,2]为

$$\langle z| : f(a, a^\dagger) : |z'\rangle = f(z', z^*) e^{-\frac{1}{2}zz^* - \frac{1}{2}z'z'^* + z^*z'} \quad (1)$$

又如, 密度算符 ρ 的 Glauber-Sudarshan P 表示可由其反正规乘积排序形式直接得到^[3,4], 即

$$\rho = \int \frac{d^2z}{\pi} P(z, z^*) |z\rangle \langle z| = :P(a, a^\dagger): \quad (2)$$

(1) 式中记号 $::$ 表示正规乘积排序 (即所有的产生算符位于所有的湮灭算符的左侧), (2) 式中记号 $::$ 表示反正规乘积排序 (即所有的湮灭算符位于所有的产生算符的左侧). 除了算符的这两种有序化排列形式外, 还有一些其他的有序化排列方式, 如坐标-动量排序和动量-坐标排序^[5-12]. 坐标-动量排序算符和动量-坐标排序算符在 x - p 相空间的矩阵元可方便地得到, 即

$$\begin{aligned} \langle x| Qg(X, P) Q|p\rangle &= g(x, p) \langle x|p\rangle, \\ \langle p| Ph(X, P) P|x\rangle &= h(x, p) \langle p|x\rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

这里记号 $Q \cdots Q$ 表示坐标-动量排序 (即所有的坐标算符 X 位于所有的动量算符 P 的左侧), 记号 $P \cdots P$ 表示动量-坐标排序 (即所有的动量算符 P 位于所有的坐标算符 X 的左侧). 因此, 尽可能直接地得到算符的有序化排列形式就是一项重要的数理任务.

* 国家自然科学基金 (批准号: 11347026)、山东省自然科学基金 (批准号: ZR2020MA085, ZR2020MF113) 和菏泽学院科学研究基金 (批准号: XY17KJ09, XY18PY13) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wlxhq1963@163.com

‡ 通信作者. E-mail: xxlwlx@126.com

在量子力学和量子光学中,人们经常会遇到形如 $(XP)^n$ 和 $(XP)^{-n}$ 的正负指数幂算符($n=0, 1, 2, 3, \dots$).对于低次正指数幂算符,可以利用对易关系将其转换为有序化排列形式.而对于负指数幂算符和高次正指数幂算符,其处理是非常棘手的.本文将利用特殊函数和算符的正规与反正规乘积排序间的互换法则^[4,13]导出幂算符 $(aa^\dagger)^{\pm n}$ 和 $(a^\dagger a)^{\pm n}$ 的正规与反正规乘积排序式.进一步,利用类比法得到算符 $(XP)^{\pm n}$ 和 $(PX)^{\pm n}$ 的坐标-动量排序与动量-坐标排序式.最后,将对新得到的这些结果的应用进行一些讨论.

2 指数算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 和 $e^{\lambda aa^\dagger}$ 的正规排序和反正规排序展开式

这一节来讨论指数算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 和 $e^{\lambda aa^\dagger}$ 的正规乘积排序与反正规乘积排序.将充分利用有序算符内的积分技术和正规乘积排序与反正规乘积排序间的互换法则^[4,13].

首先来导出真空投影子 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积排序形式.令 $|0\rangle\langle 0| = f(a, a^\dagger)$,并用相干态左矢 $\langle z|$ 和右矢 $|z\rangle$ 夹乘之,得 $f(z, z^*) = \langle z|0\rangle\langle 0|z\rangle = e^{-zz^*}$.于是得到

$$|0\rangle\langle 0| = e^{-aa^\dagger}, \quad (4)$$

这就是真空投影子 $|0\rangle\langle 0|$ 的正规乘积排序形式.利用福克空间的完备性关系式 $\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle\langle n| = 1$, $a^\dagger a |n\rangle = n |n\rangle$ 以及真空投影子的正规乘积排序形式,便得到

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda a^\dagger a} |n\rangle\langle n| = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle\langle 0| \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} : e^{-aa^\dagger} : \frac{a^n}{\sqrt{n!}} \\ &= : \sum_{n=0}^{\infty} e^{\lambda n} \frac{(aa^\dagger)^n}{n!} e^{-aa^\dagger} : \\ &= : \exp [aa^\dagger(e^\lambda - 1)] :, \end{aligned} \quad (5)$$

这就是指数算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的正规乘积排序式.作参数变换 $e^\lambda - 1 = \mu$,则有

$$\begin{aligned} : \exp (\mu aa^\dagger) &:= \exp [a^\dagger a \ln(1 + \mu)] \\ &= \frac{1}{1 + \mu} \exp [aa^\dagger \ln(1 + \mu)], \end{aligned} \quad (6)$$

这就是脱掉正规乘积排序指数算符 $\exp (\mu aa^\dagger)$ 的正规乘积排序记号 $:$ 的公式.

进一步利用对易关系式 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ 和(5)式可得

$$e^{\lambda aa^\dagger} = e^\lambda e^{\lambda a^\dagger a} = e^\lambda : \exp [aa^\dagger(e^\lambda - 1)] :, \quad (7)$$

这就是指数算符 $e^{\lambda aa^\dagger}$ 的正规乘积排序式.

利用(5)式和算符的正规乘积排序与反正规乘积排序间的互换法则

$$: f(a, a^\dagger) := \exp \left(-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger} \right) f(a, a^\dagger) :, \quad (8)$$

可得到指数算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的反正规乘积排序,即

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= : \exp [aa^\dagger(e^\lambda - 1)] : \\ &= : \exp \left(-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger} \right) \exp [aa^\dagger(e^\lambda - 1)] : \\ &= : \exp \left(-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger} \right) \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp \left(-zz^* \right. \\ &\quad \left. + za\sqrt{e^\lambda - 1} + z^* a^\dagger \sqrt{e^\lambda - 1} \right) : \\ &= : \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp \left(-e^\lambda zz^* + za\sqrt{e^\lambda - 1} \right. \\ &\quad \left. + z^* a^\dagger \sqrt{e^\lambda - 1} \right) :. \end{aligned} \quad (9)$$

在(9)式的计算中为了方便约化掉微分算子 $\exp \left(-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger} \right)$,对反正规乘积排序算符

$$: \exp [aa^\dagger(e^\lambda - 1)] :$$

中指数上的函数采用了积分降次法,也就是将湮灭算符与产生算符的“乘积”形式通过积分法降成了“和”的形式,并且用到了积分公式

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp (-\zeta zz^* + \eta z + \xi z^*) = \frac{1}{\zeta} \exp \left(\frac{\eta \xi}{\zeta} \right), \quad (10)$$

其收敛条件为 $\text{Re}(\zeta) > 0$,否则该积分是发散的.

如果 $\text{Re}(e^\lambda) > 0$,利用积分公式(10)式完成(9)式中的积分,得

$$e^{\lambda a^\dagger a} = e^{-\lambda} : \exp [aa^\dagger(1 - e^{-\lambda})] :, \quad (11)$$

这就是在 $\text{Re}(e^\lambda) > 0$ 的条件下指数算符 $e^{\lambda a^\dagger a}$ 的反正规乘积排序式.若作参数替换 $1 - e^{-\lambda} = \mu$,则可

得到

$$\begin{aligned} \vdots \exp(\mu aa^\dagger) \vdots &= \frac{1}{1-\mu} \exp[-a^\dagger a \ln(1-\mu)] \\ &= \exp[-aa^\dagger \ln(1-\mu)], \end{aligned} \quad (12)$$

这就是脱掉反正规乘积排序指数算符 $\vdots \exp(\mu aa^\dagger) \vdots$ 的反正规乘积排序记号 $\vdots$ 的公式, 它要求

$$\operatorname{Re}(\mu) < 1. \quad (13)$$

如果 $e^\lambda = -1$, 也就是 $\lambda = i(2n+1)\pi$, $n = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \dots$, 则 (9) 式化为

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(z z^* + z a \sqrt{-2} + z^* i z a^\dagger \sqrt{-2}) \vdots = \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(z z^* + i z a \sqrt{2} + i z^* i z a^\dagger \sqrt{2}) \vdots \\ &= \vdots \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}\right) \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(i z a \sqrt{2} + i z^* i z a^\dagger \sqrt{2}) \vdots = \frac{\pi}{2} \vdots \exp\left(-\frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}\right) \delta(a) \delta(a^\dagger) \vdots. \end{aligned} \quad (14)$$

如果 $\operatorname{Re}(e^\lambda) < 0$ 且 $e^\lambda \neq -1$, 则 (9) 式化为

$$\begin{aligned} e^{\lambda a^\dagger a} &= \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp\left(-e^\lambda z z^* + z a \sqrt{e^\lambda - 1} + z^* a^\dagger \sqrt{e^\lambda - 1}\right) \vdots \\ &= \vdots \int \frac{d^2 z}{\pi} \exp[(1 - e^\lambda) z z^*] \exp\left(-z z^* + z a \sqrt{e^\lambda - 1} + z^* a^\dagger \sqrt{e^\lambda - 1}\right) \vdots \\ &= \vdots \exp\left(-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}\right) \exp[aa^\dagger(e^\lambda - 1)] \vdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{\partial^n}{\partial a^{\dagger n}} \exp[-aa^\dagger(1 - e^\lambda)] \vdots \\ &= \vdots \exp[-aa^\dagger(1 - e^\lambda)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \exp[aa^\dagger(1 - e^\lambda)] \frac{\partial^n}{\partial a^n} \frac{\partial^n}{\partial a^{\dagger n}} \exp[-aa^\dagger(1 - e^\lambda)] \vdots \\ &= \vdots \exp[-aa^\dagger(1 - e^\lambda)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(e^\lambda - 1)^n}{n!} H_{n,n}(a \sqrt{1 - e^\lambda}, a^\dagger \sqrt{1 - e^\lambda}) \vdots \\ &= \vdots \exp[aa^\dagger(e^\lambda - 1)] \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(1 - e^\lambda)^n}{n!} L_n[aa^\dagger(1 - e^\lambda)] \vdots. \end{aligned} \quad (15)$$

(15) 式的最后一步计算中用到了同下标双变量厄米多项式与拉盖尔多项式的关系, 即

$$H_{n,n}(x, y) = (-1)^n L_n(xy). \quad (16)$$

在 $\operatorname{Re}(e^\lambda) > 0$ 时, 利用对易关系式 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$ 和 (11) 式可得

$$e^{\lambda aa^\dagger} = e^\lambda e^{\lambda a^\dagger a} = \vdots \exp[aa^\dagger(1 - e^{-\lambda})] \vdots, \quad (17)$$

3 幂算符 $(aa^\dagger)^n$ 和 $(a^\dagger a)^n$ 的正规排序和反正规排序展开式

这一节来导出幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 和 $(aa^\dagger)^n$ 的正规乘积排序和反正规乘积排序, 其中 n 是正整数.

3.1 幂算符 $(aa^\dagger)^n$ 的正规乘积排序和反正规乘积排序

设 t 是一个参数, 利用 (7) 式可得

$$\begin{aligned} (aa^\dagger)^n &= \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{t aa^\dagger} \right|_{t=0} \\ &= \vdots \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} \exp[t + aa^\dagger(e^t - 1)] \right|_{t=0} \vdots, \end{aligned} \quad (18)$$

这是幂算符 $(aa^\dagger)^n$ 正规乘积排序的基本形式. 为了简化上述表达式, 可以依据 (18) 式引入一个新的多项式, 定义为

$$x_n(\xi) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{t + \xi(e^t - 1)} \right|_{t=0}, \quad (19)$$

亦即在 $t = 0$ 的邻域上, 有

$$e^{t + \xi(e^t - 1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!} x_n(\xi). \quad (20)$$

据此定义可依次得到

$$\begin{aligned} x_0(\xi) &= 1, x_1(\xi) = \xi + 1, \\ x_2(\xi) &= \xi^2 + 3\xi + 1, \\ x_3(\xi) &= \xi^3 + 6\xi^2 + 7\xi + 1, \dots \end{aligned}$$

那么, (18) 式就可以表示为

$$(aa^\dagger)^n =: x_n(aa^\dagger) :. \quad (21)$$

由 (19) 式可导出

$$x_n(\xi) = e^{-\xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^\xi. \quad (22)$$

该多项式的更多性质详见附录 A. 若对 (19) 式进行如下处理

$$\begin{aligned} (aa^\dagger)^n &= : \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^t e^{aa^\dagger(e^t-1)} \Big|_{t=0} : \\ &= : \frac{\partial^n}{\partial t^n} \left[\frac{\partial}{\partial(aa^\dagger)} + 1 \right] e^{aa^\dagger(e^t-1)} \Big|_{t=0} : \\ &= : \left[\frac{\partial}{\partial(aa^\dagger)} + 1 \right] \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{aa^\dagger(e^t-1)} \Big|_{t=0} : \\ &= : \left[\frac{\partial}{\partial(aa^\dagger)} + 1 \right] T_n(aa^\dagger) \Big|_{t=0} :, \end{aligned} \quad (23)$$

式中 $T_n(\xi)$ 是 Touchard 多项式, 其定义为

$$T_n(\xi) = \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{\xi(e^t-1)} \Big|_{t=0}, \quad (24)$$

它是 Bell 多项式的一个特例^[14,15]. 也就是说, $T_n(\xi)$ 的生成函数是 $\exp[\xi(e^t-1)]$, 在 $t=0$ 的邻域上有

$$e^{\xi(e^t-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{T_n(\xi)}{n!} t^n. \quad (25)$$

Touchard 多项式 $T_n(\xi)$ 的微分式可表示为 (详见附录 B)

$$T_n(\xi) = e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^\xi. \quad (26)$$

另外, 比较 (21) 式和 (23) 式还可得到

$$x_n(\xi) = T'_n(\xi) + T_n(\xi), \quad (27)$$

这就是多项式 $x_n(\xi)$ 和 $T_n(\xi)$ 的关系, 因此多项式 $x_n(\xi)$ 可视为 Bell 多项式家族的又一个特例.

为得到幂算符 $(aa^\dagger)^n$ 的反正规乘积排序式, 利用 (18) 式和算符的正规乘积排序与反正规乘积排序互换法则 (8) 式可得

$$\begin{aligned} (aa^\dagger)^n &= : e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^t e^{aa^\dagger(e^t-1)} \Big|_{t=0} : \\ &= : \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^t e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-zz^* + za + z^* a^\dagger(e^t-1)} \Big|_{t=0} : \\ &= : \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^t \int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-e^t zz^* + za + z^* a^\dagger(e^t-1)} \Big|_{t=0} : \end{aligned}$$

因为在 $t=0$ 的邻域上 $\text{Re}(e^t) \approx 1 > 0$, 上述积分是

收敛的, 所以有

$$\begin{aligned} (aa^\dagger)^n &= : \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{aa^\dagger(1-e^{-t})} \Big|_{t=0} : \\ &= (-)^n : \frac{\partial^n}{\partial(-t)^n} e^{(-aa^\dagger)(e^{-t}-1)} \Big|_{t=0} : \\ &= (-)^n : T_n(-aa^\dagger) :, \end{aligned} \quad (28)$$

这就是幂算符 $(aa^\dagger)^n$ 的反正规乘积排序式, 也是用 Touchard 多项式表示的. 在上面的计算中再次用到了积分公式 $\int \frac{d^2 z}{\pi} e^{-\zeta zz^* + \eta z + \xi z^*} = \frac{1}{\zeta} e^{\eta \xi / \zeta}$, 其收敛条件为 $\text{Re}(\zeta) > 0$.

3.2 幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的正规乘积排序和反正规乘积排序

现在来导出幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的正规与反正规乘积排序式. 可以用不同的方法得到幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的正规与反正规乘积排序式, 譬如完全可以采用得到幂算符 $(aa^\dagger)^n$ 的正规与反正规乘积排序式 (21) 式和 (28) 式的方法, 也可采用类比法. 下面采用类比法导出幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的正规与反正规乘积排序式.

鉴于 $[a^\dagger, -a] = 1 = [a, a^\dagger]$, 若与 (28) 式类比可得

$$\begin{aligned} (a^\dagger a)^n &= (-)^n [a^\dagger(-a)]^n = (-)^n (-)^n : \\ &T_n[-(-aa^\dagger)] := T_n(aa^\dagger) :, \end{aligned} \quad (29)$$

这就是幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的正规乘积排序式. 若与 (21) 式类比可得

$$\begin{aligned} (a^\dagger a)^n &= (-)^n [a^\dagger(-a)]^n \\ &= (-)^n : x_n(-aa^\dagger) :, \end{aligned} \quad (30)$$

这就是幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的反正规乘积排序式.

另外, 利用 $[a, a^\dagger] = aa^\dagger - a^\dagger a = 1$, 牛顿二项式定理以及 (29) 式还可得到

$$\begin{aligned} (aa^\dagger)^n &= (a^\dagger a + 1)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (a^\dagger a)^k \\ &= \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} : T_k(aa^\dagger) :. \end{aligned} \quad (31)$$

比较 (21) 式和 (31) 式可得

$$x_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} T_k(\xi).$$

这就是多项式 $x_n(\xi)$ 和 Touchard 多项式 $T_n(\xi)$ 的另一种关系.

4 $(XP)^n$ 和 $(PX)^n$ 的坐标-动量排序和动量-坐标排序

基于上一节的结果, 利用类比法可导出幂算符 $(XP)^n$ 和 $(PX)^n$ 的坐标-动量排序和动量-坐标排序式. 鉴于 $[X, -\frac{i}{\hbar}P] = 1 = [a, a^\dagger]$, 通过与 (28) 式类比可得

$$\begin{aligned}(XP)^n &= (i\hbar)^n \left[X \left(-\frac{i}{\hbar}P \right) \right]^n \\ &= (-i\hbar)^n \mathcal{Q} T_n \left(\frac{i}{\hbar}XP \right) \mathcal{Q},\end{aligned}\quad (32)$$

此即幂算符 $(XP)^n$ 的坐标-动量排序展开式. 通过与 (30) 式类比, 能得到幂算符 $(XP)^n$ 的动量-坐标排序展开式, 即

$$\begin{aligned}(XP)^n &= (-i\hbar)^n \left[X \left(\frac{i}{\hbar}P \right) \right]^n \\ &= (i\hbar)^n \mathcal{P} x_n \left(-\frac{i}{\hbar}XP \right) \mathcal{P}.\end{aligned}\quad (33)$$

同样道理, 基于 $[\frac{1}{i\hbar}P, X] = -1 = [a^\dagger, a]$, 与 (30) 式作类比可得

$$\begin{aligned}(PX)^n &= (i\hbar)^n \left[\left(\frac{1}{i\hbar}P \right) X \right]^n \\ &= (-i\hbar)^n \mathcal{Q} x_n \left(\frac{i}{\hbar}XP \right) \mathcal{Q},\end{aligned}\quad (34)$$

以及与 (29) 式作类比得

$$(PX)^n = (i\hbar)^n \left[\left(\frac{1}{i\hbar}P \right) X \right]^n = (i\hbar)^n \mathcal{P} T_n \left(\frac{1}{i\hbar}QP \right) \mathcal{P}.\quad (35)$$

进一步利用指数函数的 Taylor 展开式和 (32) 式—(35) 式可得到

$$\begin{aligned}e^{\lambda XP} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (XP)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar\lambda)^n}{n!} \mathcal{Q} T_n \left(\frac{i}{\hbar}XP \right) \mathcal{Q}, \\ e^{\lambda XP} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (XP)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar\lambda)^n}{n!} \mathcal{P} x_n \left(-\frac{i}{\hbar}XP \right) \mathcal{P}, \\ e^{\lambda PX} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (PX)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-i\hbar\lambda)^n}{n!} \mathcal{Q} x_n \left(\frac{i}{\hbar}XP \right) \mathcal{Q}, \\ e^{\lambda PX} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda^n}{n!} (PX)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\hbar\lambda)^n}{n!} \mathcal{P} T_n \left(\frac{1}{i\hbar}QP \right) \mathcal{P},\end{aligned}\quad (36)$$

这就是指数算符 $e^{\lambda XP}$ 和 $e^{\lambda PX}$ 的坐标-动量排序及

动量-坐标排序的基本形式. 由于在 $\lambda = 0$ 的邻域上以上各级数是收敛的, 所以根据 (20) 式和 (25) 式便可得到

$$\begin{aligned}e^{\lambda XP} &= \mathcal{Q} \exp \left[\frac{i}{\hbar}XP(e^{-i\hbar\lambda} - 1) \right] \mathcal{Q} \\ &= \mathcal{P} \exp \left[i\hbar\lambda + \frac{i}{\hbar}XP(1 - e^{i\hbar\lambda}) \right] \mathcal{P},\end{aligned}\quad (37)$$

$$\begin{aligned}e^{\lambda PX} &= \mathcal{P} \exp \left[-\frac{i}{\hbar}XP(e^{i\hbar\lambda} - 1) \right] \mathcal{P} \\ &= \mathcal{Q} \exp \left[-i\hbar\lambda + \frac{i}{\hbar}XP(e^{-i\hbar\lambda} - 1) \right] \mathcal{Q}.\end{aligned}\quad (38)$$

令 $\frac{i}{\hbar}(e^{-i\hbar\lambda} - 1) = \mu$, 也就是作参数替换 $\lambda = \frac{i}{\hbar}\ln(1 - i\hbar\mu)$, 从 (37) 式可得

$$\begin{aligned}\mathcal{Q} \exp(\mu XP) \mathcal{Q} &= \exp \left[\frac{i}{\hbar}XP \ln(1 - i\hbar\mu) \right] \\ &= \frac{1}{1 - i\hbar\mu} \exp \left[\frac{i}{\hbar}PX \ln(1 - i\hbar\mu) \right],\end{aligned}\quad (39)$$

这是脱掉坐标-动量排序算符 $\mathcal{Q} \exp(\mu XP) \mathcal{Q}$ 的坐标-动量排序记号的公式. 若令 $-\frac{i}{\hbar}(e^{i\hbar\lambda} - 1) = \sigma$, 亦即 $\lambda = -\frac{i}{\hbar}\ln(1 + i\hbar\sigma)$, 则从 (38) 式可得到

$$\begin{aligned}\mathcal{P} \exp(\sigma XP) \mathcal{P} &= \exp \left[-\frac{i}{\hbar}PX \ln(1 + i\hbar\sigma) \right] \\ &= \frac{1}{1 + i\hbar\sigma} \exp \left[-\frac{i}{\hbar}XP \ln(1 + i\hbar\sigma) \right],\end{aligned}\quad (40)$$

这是脱掉动量-坐标排序算符 $\mathcal{P} \exp(\sigma XP) \mathcal{P}$ 的动量-坐标排序记号的公式.

5 负指数幂算符 $(AB)^{-1}$ 的有序排列展开式

这一节来导出形如 $(AB)^{-1}$ 的负指数幂算符的有序排列式. 由于

$$(a^\dagger a) |n\rangle = n |n\rangle, \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots$$

其中 $|n\rangle = \frac{a^{\dagger n}}{\sqrt{n!}} |0\rangle$ 是粒子数算符 $(a^\dagger a)$ 的本征矢. 也就是说, 粒子数算符 $(a^\dagger a)$ 的本征值是离散的且包括零, 可知数算符 $(a^\dagger a)$ 不可逆, 或者说 $(a^\dagger a)^{-1}$ 不存在.

5.1 算符 $(aa^\dagger)^{-1}$ 的正规乘积排序和反正规乘积排序

从 $(a^\dagger a)|n\rangle = n|n\rangle$ 可得 $(aa^\dagger)|n\rangle = (a^\dagger a + 1)|n\rangle = (n+1)|n\rangle$, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$. 由此可知 $(aa^\dagger)$ 是可逆的, 记其逆为 $(aa^\dagger)^{-1} \equiv 1/aa^\dagger$. 利用福克表象的完备性关系以及真空投影算符的正规乘积形式 $|0\rangle\langle 0| = e^{-aa^\dagger}$, 可得

$$\begin{aligned} \frac{1}{aa^\dagger} &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{aa^\dagger} |n\rangle\langle n| \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} |n\rangle\langle n| = e^{-aa^\dagger} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aa^\dagger)^n}{(n+1)!}, \end{aligned}$$

这可视为算符 $(aa^\dagger)^{-1}$ 的一种基本的正规乘积形式. 为了简化这一表示, 利用指数函数的幂级数展开式

$$\begin{aligned} e^{-x} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} x^l \text{ 可以得到} \\ \frac{1}{aa^\dagger} &= \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l}{l!} (aa^\dagger)^l \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(aa^\dagger)^n}{(n+1)!} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-1)^l (aa^\dagger)^{n+l}}{l!(n+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} (aa^\dagger)^m \sum_{l=0}^m \frac{(-1)^l}{l!(m+1-l)!}. \quad (41) \end{aligned}$$

在 (41) 式的计算中, 最后一步使用了双求和重置公式

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} A_n B_l = \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{l=0}^m A_{m-l} B_l. \quad (42)$$

事实上, (41) 式还可进一步简化, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{aa^\dagger} &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(aa^\dagger)^m}{(m+1)!} \sum_{l=0}^m \frac{(m+1)!(-1)^l}{l!(m+1-l)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(aa^\dagger)^m}{(m+1)!} \left[-(-1)^{m+1} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=0}^{m+1} \frac{(m+1)!}{l!(m+1-l)!} 1^{m+1-l} \cdot (-1)^l \right] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(aa^\dagger)^m}{(m+1)!} [(-1)^m + (1-1)^{m+1}] \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} (-aa^\dagger)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} a^{\dagger m} a^m. \quad (43) \end{aligned}$$

基于 (43) 式, 利用算符的正规乘积排序与反正规乘积排序的互换法则 (8) 式可进一步得到

$(aa^\dagger)^{-1}$ 的反正规乘积排序, 即

$$\begin{aligned} \frac{1}{aa^\dagger} &= e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} a^m a^{\dagger m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} a^m a^{\dagger m} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(m+1)!} H_{m,m}(a, a^\dagger) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} L_m(aa^\dagger). \quad (44) \end{aligned}$$

式中 $H_{m,n}(x, y)$ 是双变量 Hermite 多项式 [4,16,17], 其定义为

$$H_{m,n}(x, y) = e^{xy} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^n e^{-xy} = e^{-\frac{\partial^2}{\partial x \partial y}} x^m y^n.$$

$L_m(\xi) = e^\xi \frac{\partial^m}{\partial \xi^m} (\xi^m e^{-\xi})$ 是 Laguerre 多项式, 它与同下标双变量 Hermite 多项式 $H_{m,m}(x, y)$ 的关系为

$$\begin{aligned} H_{m,m}(x, y) &= e^{xy} \left(-\frac{\partial}{\partial y} \right)^m \left(-\frac{\partial}{\partial x} \right)^m e^{-xy} \\ &= (-1)^m e^{xy} \frac{\partial^m}{\partial y^m} y^m e^{-xy} = (-1)^m L_m(\xi)|_{\xi=xy}. \end{aligned}$$

5.2 负指数幂算符 $(XP)^{-1}$ 和 $(PX)^{-1}$ 的坐标-动量排序及动量-坐标排序

由于 $(XP + PX)$ 是厄米算符, 故知其本征值必为实数. 鉴于 $(XP) = (XP + PX)/2 + i\hbar/2$, 所以算符 (XP) 的本征值不会包含零. 那么算符 (XP) 一定是可逆的, 记其逆算符 $(XP)^{-1} \equiv 1/XP$.

基于 $[X, \frac{1}{i\hbar}P] = 1 = [a, a^\dagger]$, 类比 (44) 式, 便得到

$$\begin{aligned} \frac{1}{XP} &= \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{X \left(\frac{1}{i\hbar}P \right)} \\ &= \frac{1}{i\hbar} \mathcal{Q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} L_m \left(\frac{1}{i\hbar}XP \right) \mathcal{Q}, \quad (45) \end{aligned}$$

这就是算符 $(XP)^{-1}$ 的坐标-动量排序展开式. 同样道理, 类比 (43) 式便得到算符 $(XP)^{-1}$ 的动量-坐标排序展开式, 即

$$\frac{1}{XP} = \frac{1}{i\hbar} \frac{1}{X \left(\frac{1}{i\hbar}P \right)} = \frac{1}{i\hbar} \mathcal{P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left(\frac{i}{\hbar}XP \right)^m \mathcal{P}. \quad (46)$$

基于 $\left[\frac{i}{\hbar}P, X \right] = 1 = [a, a^\dagger]$, 类比 (43) 式和

(44) 式可得

$$\frac{1}{PX} = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{\left(\frac{i}{\hbar}P\right)_X} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{Q} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} \left(-\frac{i}{\hbar}XP\right)^m \mathcal{Q},$$

$$\frac{1}{PX} = \frac{i}{\hbar} \frac{1}{\left(\frac{i}{\hbar}P\right)_X} = \frac{i}{\hbar} \mathcal{P} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+1)!} L_m \left(\frac{i}{\hbar}XP\right) \mathcal{P}, \quad (47)$$

这就是负指数幂算符 $(PX)^{-1}$ 的坐标-动量排序和动量-坐标排序展开式。

6 应用举例

由 (2) 式可知, 一旦得到了密度算符 ρ 的反正规乘积排序就是相当于得到了其 Glauber-Sudarshan P 表示^[18], 而密度算符满足的海森堡方程 (算符方程) 就可转化为相应的 c 数方程, 这给某些问题的求解带来一定的方便. 同时, 有序算符方法可应用于量子统计.

作为第一个例子, 下面讨论处于热平衡的辐射场 (混沌光场). 按照统计物理理论, 表示该辐射光场的密度算符为

$$\rho = \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle p_n \langle n|, \quad (48)$$

式中 $p_n = \frac{1}{\mathcal{Z}} \exp\left(-\frac{\hbar\omega n}{kT}\right)$ 是处于 $|n\rangle\langle n|$ 态的概率, $\mathcal{Z} = \sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{\hbar\omega n}{kT}\right) = \frac{1}{1 - \exp(-\hbar\omega/kT)}$ 是配分函数, k 是玻尔兹曼常数, T 是热力学温度. 利用 $(a^\dagger a) |n\rangle = n |n\rangle$ 可得

$$\rho = \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right] \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT} a^\dagger a\right)$$

$$= \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-\hbar\omega/kT)^k}{k!} (a^\dagger a)^k.$$

式中幂算符 $(a^\dagger a)^k$ 的反正规乘积排序已被求出, 也就是 (30) 式. 把 (30) 式代入并注意到 (20) 式, 可得

$$\rho = \left[1 - \exp\left(-\frac{\hbar\omega}{kT}\right)\right] \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\hbar\omega/kT)^k}{k!} :x_k(-aa^\dagger):$$

$$= \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right] : \exp\left\{-aa^\dagger \left[\exp\left(\frac{\hbar\omega}{kT}\right) - 1\right]\right\} :$$

$$= \frac{1}{\bar{n}} : \exp\left(-aa^\dagger \frac{1}{\bar{n}}\right) :, \quad (49)$$

这就是混沌光场密度算符的反正规乘积排序形式,

式中

$$\bar{n} \equiv \sum_{n=0}^{\infty} n p_n = \frac{1}{\exp(\hbar\omega/kT) - 1}.$$

基于 (2) 式和 (49) 式, 便得到

$$P(z, z^*) = \frac{1}{\bar{n}} \exp\left(-zz^* \frac{1}{\bar{n}}\right), \quad (50)$$

此即混沌光场的 Glauber-Sudarshan P 表示. 混沌光场存在 P 表示, 意味着存在相应的“经典”光场. 而对于相干态 $|\zeta\rangle$, 密度算符 $|\zeta\rangle\langle\zeta|$ 的 Glauber-Sudarshan P 表示则为

$$P(z, z^*) = \pi \delta(z - \zeta) \delta(z^* - \zeta^*). \quad (51)$$

现在来计算混沌光的能量涨落, 能量算符为 $H = \hbar\omega a^\dagger a$, 能量的均方涨落定义为

$$\langle(\Delta H)^2\rangle \equiv \langle(H - \langle H\rangle)^2\rangle = [\langle H^2\rangle - \langle H\rangle^2] g(\omega), \quad (52)$$

其中 $g(\omega)$ 为能级密度因子. 因为

$$\langle H^2\rangle = \text{tr}(\rho H^2)$$

$$= \int \frac{d^2z}{\pi} \frac{1}{\bar{n}} \exp\left(-zz^* \frac{1}{\bar{n}}\right) \langle z | H^2 | z \rangle$$

$$= \frac{\hbar^2 \omega^2}{\bar{n}} \int \frac{d^2z}{\pi} (zz^* + z^2 z^{*2}) \exp\left(-zz^* \frac{1}{\bar{n}}\right)$$

$$= (\hbar\omega)^2 [\bar{n} + 2\bar{n}^2].$$

以及 $\langle H\rangle = \text{tr}(\rho H) = \hbar\omega \bar{n}$, 故有

$$\langle(\Delta H)^2\rangle = (\hbar\omega)^2 [\bar{n} + \bar{n}^2] g(\omega). \quad (53)$$

另一方面, 由 (51) 式可得到相干光场的能量涨落, 即 $\langle(\Delta H)^2\rangle_{\text{相干态}} = (\hbar\omega)^2 \zeta \zeta^* g(\omega)$. 比较可知, 若把 $\bar{n}$ 视同为 $\sqrt{\zeta \zeta^*}$ 时, 混沌光的能量涨落大于相干光.

作为第二个例子, 下面讨论互换法则 (8) 式的应用. 考虑正规排序算符 $e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2}$, 利用该互换法则可得其反正规排序式为

$$e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} = :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2}:$$

$$= :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} a^{\dagger 2m} a^{2n}:$$

$$= : \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} a^{\dagger 2m} a^{2n}:$$

$$= : \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} H_{2m,2n}(a^\dagger, a) :, \quad (54)$$

这里再一次用到了双变量 Hermite 多项式. 另一方面, 也可以采用积分降次法进行计算, 即

$$\begin{aligned}
 e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} &= :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2}: = :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{-z_1 z_1^* + z_1 \sqrt{\lambda} a^\dagger + z_1^* \sqrt{\lambda} a^\dagger - z_2 z_2^* + z_2 \sqrt{v} a + z_2^* \sqrt{v} a}: \\
 &= : \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{-z_1 z_1^* + z_1 \sqrt{\lambda} a^\dagger + z_1^* \sqrt{\lambda} a^\dagger - z_2 z_2^* + z_2 \sqrt{v} a + z_2^* \sqrt{v} a - \sqrt{\lambda} \sqrt{v} (z_1 + z_1^*) (z_2 + z_2^*)}: \\
 &= :e^{\lambda a^{\dagger 2}} \int \frac{d^2 z_2}{\pi} e^{-(1-2\lambda v) z_2 z_2^* + z_2 \sqrt{v} (a-2\lambda a^\dagger) + z_2^* \sqrt{v} (a-2\lambda a^\dagger) + \lambda v z_2^2 + \lambda v z_2^{*2}}: \\
 &= \frac{1}{\sqrt{1-4\lambda v}} : \exp \left(\frac{\lambda a^{\dagger 2} - 4\lambda v a a^\dagger + v a^2}{1-4\lambda v} \right) :, \quad (55)
 \end{aligned}$$

这是算符 $e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2}$ 反正规乘积排序的另一种形式, 是指数形式的, 它要求 $\text{Re}(1-4\lambda v) > 0$. 在上面的计算中用到了如下积分公式:

$$\int \frac{d^2 z}{\pi} \exp(-\zeta z z^* + \eta z + \xi z^* + t z^2 + \tau z^{*2}) = \frac{1}{\sqrt{\zeta^2 - 4t\tau}} \exp\left(\frac{\zeta \eta \xi + t \xi^2 + \tau \eta^2}{\zeta^2 - 4t\tau}\right),$$

其收敛条件为 $\text{Re}(\zeta + t + \tau) > 0$, $\text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4t\tau}{\zeta + t + \tau}\right) > 0$ 或 $\text{Re}(\zeta - t - \tau) > 0$, $\text{Re}\left(\frac{\zeta^2 - 4t\tau}{\zeta - t - \tau}\right) > 0$. 比较 (49) 式和 (50) 式, 并做替换 $a^\dagger \rightarrow x$, $a \rightarrow y$, 便得到偶次双变量 Hermite 多项式 $H_{2m,2n}(x,y)$ 的生成函数如下

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} H_{2m,2n}(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1-4\lambda v}} \exp\left[\frac{1}{1-4\lambda v} (\lambda x^2 - 4\lambda v xy + v y^2)\right]. \quad (56)$$

同样方法, 正规乘积排序算符 $(a^\dagger e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} a)$ 的反正规乘积排序为

$$\begin{aligned}
 a^\dagger e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} a &= :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} a^\dagger e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} a: = :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} a^{\dagger 2m+1} a^{2n+1}: \\
 &= : \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} a^{\dagger 2m+1} a^{2n+1}: = : \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} H_{2m+1,2n+1}(a^\dagger, a):. \quad (57)
 \end{aligned}$$

另一方面, 利用互换法则 (8) 式可得

$$\begin{aligned}
 a^\dagger e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} a &= :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} a^\dagger e^{\lambda a^{\dagger 2}} e^{va^2} a: \\
 &= :e^{-\frac{\partial^2}{\partial a \partial a^\dagger}} \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{-z_1 z_1^* + z_1 \sqrt{\lambda} a^\dagger + z_1^* \sqrt{\lambda} a^\dagger + t a^\dagger - z_2 z_2^* + z_2 \sqrt{v} a + z_2^* \sqrt{v} a + \tau a}: \Big|_{t=\tau=0} \\
 &= : \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{-(z_1 \sqrt{\lambda} + z_1^* \sqrt{\lambda} + t)(z_2 \sqrt{v} + z_2^* \sqrt{v} + \tau)} \\
 &\quad \times e^{-z_1 z_1^* + z_1 \sqrt{\lambda} a^\dagger + z_1^* \sqrt{\lambda} a^\dagger + t a^\dagger - z_2 z_2^* + z_2 \sqrt{v} a + z_2^* \sqrt{v} a + \tau a}: \Big|_{t=\tau=0} \\
 &= : \frac{\partial^2}{\partial t \partial \tau} e^{t a^\dagger + \tau a - t \tau} \int \frac{d^2 z_1 d^2 z_2}{\pi^2} e^{-z_1 z_1^* + z_1 \sqrt{\lambda} (a^\dagger - z_2 \sqrt{v} - z_2^* \sqrt{v} - \tau) + z_1^* \sqrt{\lambda} (a^\dagger - z_2 \sqrt{v} - z_2^* \sqrt{v} - \tau)} \\
 &\quad \times e^{-z_2 z_2^* + z_2 \sqrt{v} (a-t) + z_2^* \sqrt{v} (a-t)}: \Big|_{t=\tau=0} \\
 &= : \left[\frac{(a-2\lambda a^\dagger)(a^\dagger - 2va)}{(1-4\lambda v)^{5/2}} - \frac{1}{(1-4\lambda v)^{3/2}} \right] \exp\left(\frac{\lambda a^{\dagger 2} - 4\lambda v a a^\dagger + v a^2}{1-4\lambda v}\right):, \quad (58)
 \end{aligned}$$

这要求 $\text{Re}(1-4\lambda v) > 0$. 比较 (57) 式和 (58) 式, 并做替换 $a^\dagger \rightarrow x$, $a \rightarrow y$, 便得到

$$\sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} H_{2m+1,2n+1}(x,y) = \left[\frac{(x-2vy)(y-2\lambda x)}{(1-4\lambda v)^{5/2}} - \frac{1}{(1-4\lambda v)^{3/2}} \right] \exp\left(\frac{\lambda x^2 - 4\lambda v xy + v y^2}{1-4\lambda v}\right), \quad (59)$$

这就是奇次双变量 Hermite 多项式 $H_{2m+1,2n+1}(x, y)$ 的生成函数. 同样可得到奇偶次和偶奇次双变量 Hermite 多项式的生成函数, 即

$$\begin{aligned} & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} H_{2m+1,2n}(x, y) \\ &= \frac{x - 2vy}{(1 - 4\lambda v)^{3/2}} \exp\left(\frac{\lambda x^2 - 4\lambda vxy + vy^2}{1 - 4\lambda v}\right), \\ & \sum_{m,n=0}^{\infty} \frac{\lambda^m v^n}{m!n!} H_{2m,2n+1}(x, y) \\ &= \frac{y - 2\lambda x}{(1 - 4\lambda v)^{3/2}} \exp\left(\frac{\lambda x^2 - 4\lambda vxy + vy^2}{1 - 4\lambda v}\right). \quad (60) \end{aligned}$$

这一些关于双变量 Hermite 多项式的生成函数都将在数学物理中有着各自的应用.

7 结 论

利用特殊函数和正规乘积排序与反正规乘积排序间的一般互换法则将幂算符 $(aa^\dagger)^n$, $(a^\dagger a)^n$ 及 $(aa^\dagger)^{-1}$ 化为了正规乘积排序和反正规乘积排序形式. 进一步利用类比法得到了幂算符 $(XP)^n$, $(PX)^n$ 及 $(XP)^{-1}$ 的坐标-动量排序和动量-坐标排序式. 最后, 利用幂算符 $(a^\dagger a)^n$ 的有序排列结果讨论了混沌光场, 并通过正规乘积与反正规乘积排序间的一般互换法则得到了在数学物理中有着应用价值的偶次及奇次双变量 Hermite 多项式的生成函数.

附录A 多项式 $x_n(\xi)$

从多项式 $x_n(\xi)$ 的定义 (19) 式可得

$$x_n(\xi) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{t+\xi(e^t-1)} \right|_{t=0} = e^{-\xi} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^t e^{\xi e^t} \right|_{t=0} = e^{-\xi} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{\xi e^t} \right|_{t=0}. \quad (A1)$$

做参数替换 $e^t = \tau$, 则 $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} = \tau \frac{\partial}{\partial \tau}$, 于是有

$$\begin{aligned} x_n(\xi) &= e^{-\xi} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^n e^{\xi \tau} \right|_{\tau=1} = e^{-\xi} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \cdots \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)}_{n\text{次}} \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) e^{\xi \tau} \right|_{\tau=1} \\ &= e^{-\xi} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \cdots \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)}_{n-1\text{次}} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{\xi \tau} \right|_{\tau=1} = e^{-\xi} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \underbrace{\left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right) \cdots \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)}_{n-1\text{次}} e^{\xi \tau} \right|_{\tau=1} \\ &= e^{-\xi} \left. \frac{\partial}{\partial \xi} \underbrace{\left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \cdots \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)}_{n\text{次}} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{\xi \tau} \right|_{\tau=1} = e^{-\xi} \left. \underbrace{\left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \right) \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \right) \cdots \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \right)}_{n\text{次}} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \right) \frac{\partial}{\partial \xi} e^{\xi \tau} \right|_{\tau=1} = e^{-\xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \xi \right)^n e^{\xi}. \quad (A2) \end{aligned}$$

易见, $x_n(\xi)$ 不同于 Touchard 多项式 $T_n(\xi) = e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^{\xi}$, 亦不同于 Laguerre 多项式 $L_n(\xi) = e^{\xi} \left(\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n \xi^n e^{-\xi}$. 从 (A2) 式可得

$$\begin{aligned} n=0, x_0(\xi) &= 1, \\ n=1, x_1(\xi) &= \xi + 1, \\ n=2, x_2(\xi) &= \xi^2 + 3\xi + 1, \\ n=3, x_3(\xi) &= \xi^3 + 6\xi^2 + 7\xi + 1, \\ n=4, x_4(\xi) &= \xi^4 + 10\xi^3 + 25\xi^2 + 15\xi + 1, \\ n=5, x_5(\xi) &= \xi^5 + 15\xi^4 + 65\xi^3 + 90\xi^2 + 31\xi + 1, \cdots \end{aligned}$$

进一步可得到多项式 $x_n(\xi)$ 的递推公式和幂级数展开式分别为

$$x_{n+1}(\xi) = (1 + \xi) x_n(\xi) + \xi \frac{\partial x_n(\xi)}{\partial \xi}. \quad (A3)$$

$$x_n(\xi) = \sum_{m=0}^n \xi^m \sum_{l=0}^m (-1)^{m+l} \frac{(l+1)^n}{l!(m-l)!}. \quad (A4)$$

多项式 $x_n(\xi)$ 跟 Touchard 多项式的关系为

$$x_n(\xi) = \frac{\partial T_n(\xi)}{\partial \xi} + T_n(\xi). \quad (A5)$$

另外, 如果作一特殊规定, 即 $x_{-1}(\xi) = \frac{1}{\xi}$, 则有

$$T_{n+1}(\xi) = \xi x_n(\xi). \quad (A6)$$

在 (B5) 式中若取 $y_1 = 2\xi$, $y_2 = -2$, $y_{m \geq 3} = 0$, 则有

$$e^{-t^2+2t\xi} = \sum_{n \geq 0} B_n(\xi) \frac{t^n}{n!}. \quad (A7)$$

将 (A7) 跟 Hermite 多项式的定义 $e^{-t^2+2t\xi} = \sum_{n \geq 0} H_n(\xi) \frac{t^n}{n!}$

比较可知, Hermite 多项式是 Bell 多项式的一个特例. 同样可以证明, Laguerre 多项式以及本文引入的 $x_n(\xi)$ 多项式也可以由 Bell 多项式派生. 也就是说, Bell 多项式是一个多项式家族, 在一定的条件下可以派生出有着特定物理用途的多项式.

附录B Touchard 多项式 $T_n(\xi)$

从 Touchard 多项式 $T_n(\xi)$ 的定义可得

$$T_n(\xi) = \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{\xi(e^t-1)} \right|_{t=0} = e^{-\xi} \left. \frac{\partial^n}{\partial t^n} e^{\xi e^t} \right|_{t=0}. \quad (\text{B1})$$

做参数替换 $e^t = \tau$, 则有

$$\begin{aligned} T_n(\xi) &= e^{-\xi} \left(\frac{\partial \tau}{\partial t} \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^n e^{\xi \tau} \Big|_{\tau=1} = e^{-\xi} \left(\tau \frac{\partial}{\partial \tau} \right)^n e^{\xi \tau} \Big|_{\tau=1} \\ &= e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^{\xi} \Big|_{\tau=1} = e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^{\xi}. \end{aligned} \quad (\text{B2})$$

由 (B2) 式容易得到

$$\begin{aligned} n=0, T_0(\xi) &= 1, \\ n=1, T_1(\xi) &= \xi, \\ n=2, T_2(\xi) &= \xi^2 + \xi, \\ n=3, T_3(\xi) &= \xi^3 + 3\xi^2 + \xi, \\ n=4, T_4(\xi) &= \xi^4 + 6\xi^3 + 7\xi^2 + \xi, \\ n=5, T_5(\xi) &= \xi^5 + 10\xi^4 + 25\xi^3 + 15\xi^2 + \xi, \dots \end{aligned}$$

由 (B2) 式还可得出其递推公式, 即

$$\begin{aligned} T_{n+1}(\xi) &= e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{n+1} e^{\xi} = e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{\xi} e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^n e^{\xi} \\ &= e^{-\xi} \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} \right) e^{\xi} T_n(\xi) \\ &= e^{-\xi} \xi \left(e^{\xi} T_n(\xi) + e^{\xi} \frac{\partial T_n(\xi)}{\partial \xi} \right) \\ &= \xi T_n(\xi) + \xi \frac{\partial T_n(\xi)}{\partial \xi}. \end{aligned} \quad (\text{B3})$$

另外, 还可得到 $T_n(\xi)$ 的幂级数展开式, 即

$$T_n(\xi) = \sum_{k=0}^n \xi^k \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{(k-l)^n}{l!(k-l)!} = \sum_{k=0}^n S(n, k) \xi^k, \quad (\text{B4})$$

式中 $S(n, k) = \sum_{l=0}^k (-1)^l \frac{(k-l)^n}{l!(k-l)!}$ 是第二类 Stirling 数^[12]. 事实上, 完全型 Bell 多项式的定义为^[12]

$$\exp \left(\sum_{m \geq 1} y_m \frac{t^m}{m!} \right) = \sum_{n \geq 0} B_n(y_1, y_2, \dots, y_n) \frac{t^n}{n!}, \quad (\text{B5})$$

其中已规定 $B_0 = 1$. 如果取 $y_m = \xi$, $m = 1, 2, 3, \dots$, 则 (B5) 式约化为

$$e^{\xi(e^t-1)} = \sum_{n \geq 0} B_n(\xi, \xi, \dots, \xi) \frac{t^n}{n!}, \quad (\text{B6})$$

比较 (B6) 式和 (25) 式可知 Touchard 多项式是 Bell 多项式的一个特例, 即 $T_n(\xi) = B_n(\xi, \xi, \dots, \xi)$.

参考文献

- [1] Glauber R J 1963 *Phys. Rev.* **131** 2766
- [2] Dirac P A M 1985 *Principles of Quantum mechanics* (Oxford: Oxford University Press) p167
- [3] Scully M O, Zubairy M S 1997 *Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) p354
- [4] Xu S M, Zhang Y H, Xu X L, Li H Q, Wang J S 2016 *Chin. Phys. B* **25** 120301
- [5] Fan H Y 2012 *Sci. China-Phys. Mech. Astron.* **55** 762
- [6] Lee H W 1995 *Phys. Rep.* **259** 147
- [7] Balazs N L, Jennings B K 1984 *Phys. Rep.* **104** 347
- [8] Wang J S, Fan H Y, Meng X G 2012 *Chin. Phys. B* **21** 064204
- [9] Meng X G, Wang J S, Liang B L 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1534
- [10] Xu S M, Zhang Y H, Xu X L 2012 *Coll. Phys.* **31** 1 (in Chinese) [徐世民, 张运海, 徐兴磊 2012 *大学物理* **31** 1]
- [11] Fan H Y, Lou S Y, Zhang P F 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 160302 (in Chinese) [范洪义, 楼森岳, 张鹏飞 2015 *物理学报* **64** 160302]
- [12] Fan H Y, Wang Z 2004 *Chin. Phys. B* **23** 080301
- [13] Xu S M, Zhang Y H, Xu X L, Li H Q, Wang J S 2020 *Int. J. Theor. Phys.* **59** 539
- [14] Mansour T, Matthias S 2016 *Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers* (Boca Raton: CRC Press) pp51–65
- [15] Lambert F, Springael J 2008 *Acta. Appl. Math.* **102** 147
- [16] Erdelyi A 1953 *Higher Transcendental Function: The Batemann Manuscript Project* (New York: McGraw-Hill) pp57–62
- [17] Hu L Y, Fan H Y 2009 *Chin. Phys. B* **18** 1061
- [18] Klauder J R, Sudarshan E C G 1968 *Fundamentals of Quantum Optics* (New York: W A Benjamin) p279

Ordering positive and negative exponential power operators by virtue of special functions and analogy method^{*}

Wang Lei¹⁾²⁾ Li Hong-Qi^{1)†} Xu Xing-Lei^{1)‡} Xu Shi-Min¹⁾ Wang Ji-Suo²⁾

1) (*College of Physics and Electronic Engineering, Heze University, Heze 274015, China*)

2) (*School of Physics and Physical Engineering, Qufu Normal University, Qufu 273165, China*)

(Received 7 October 2020; revised manuscript received 26 October 2020)

Abstract

Operator ordering is often fallen back on due to its convenience in quantum optics and quantum statistics, thus it is an important task to derive the various ordered forms of operators as directly as possible. In this paper we arrange quantum mechanical operators $(aa^\dagger)^{\pm n}$ and $(a^\dagger a)^{\pm n}$ in their normally and anti-normally ordered product forms by using special functions and general mutual transformation rules between normal and anti-normal orderings of operators. Furthermore, the Q- and P-ordered forms of power operators $(XP)^{\pm n}$ and $(PX)^{\pm n}$ are also obtained by the analogy method. Finally, some applications are discussed, such as the Glauber-Sudarshan P -representation of chaotic light field and the generating functions of even and odd bivariate Hermite polynomials.

Keywords: ordered product of operators, special function, mutual transformation rules, analogy method

PACS: 03.65.-w, 03.67.-a, 89.70.-a

DOI: 10.7498/aps.70.20201652

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 11347026), the Natural Science Foundation of Shandong Province, China (Grant Nos. ZR2020MA085, ZR2020MF113), and the Natural Science Foundation of Heze University, China (Grant Nos. XY17KJ09, XY18PY13).

[†] Corresponding author. E-mail: wxlhq1963@163.com

[‡] Corresponding author. E-mail: xxlwlx@126.com