



磁场对二元合金凝固过程中糊状层稳定性的影响

范海龙 陈明文

Effect of magnetic field on stability in mushy layer during binary alloy solidification

Fan Hai-Long Chen Ming-Wen

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 066401 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20201748

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201748>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

黏性各向异性磁流体Kelvin–Helmholtz不稳定性: 二维数值研究

Kelvin–Helmholtz instability in anisotropic viscous magnetized fluid

物理学报. 2019, 68(3): 035201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181747>

硅和钇双掺杂对 γ -TiAl基合金稳定性和抗氧化性的影响

Effects of Si and Y co-doping on stability and oxidation resistance of γ -TiAl based alloys

物理学报. 2019, 68(19): 196101 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190490>

不同磁场构型下Richtmyer–Meshkov不稳定性的数值研究及动态模态分解

Numerical investigations of Richtmyer–Meshkov instability in different magnetic field configurations and the corresponding dynamic mode decomposition

物理学报. 2019, 68(16): 165201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190410>

中性和阳离子丁酮团簇的结构及稳定性的理论研究

Theoretical study on the structure and stability of neutral and cationic butanone clusters

物理学报. 2018, 67(3): 033601 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171862>

氢化二维过渡金属硫化物的稳定性和电子特性: 第一性原理研究

Stability and electronic structure of hydrogenated two-dimensional transition metal dichalcogenides: First-principles study

物理学报. 2019, 68(3): 037102 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181597>

发光铅卤钙钛矿纳米晶稳定性的研究进展

Research progress of stability of luminous lead halide perovskite nanocrystals

物理学报. 2020, 69(11): 118501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191767>

磁场对二元合金凝固过程中糊状层稳定性的影响*

范海龙 陈明文†

(北京科技大学数理学院, 北京 100083)

(2020年10月21日收到; 2020年11月16日收到修改稿)

利用线性稳定性方法研究了外加磁场对二元合金凝固过程中糊状层稳定性的影响, 且模型同时考虑了温度场、浓度场和流动的耦合作用. 利用计算得出的色散关系式分析了磁场对糊状层稳定性的影响, 其中包括直接模式和振荡模式. 给出了不同情况下外加磁场对糊状层稳定性的影响, 发现磁洛伦兹力可以减小由浮力引起的失稳效应. 振荡模式下外加磁场对糊状层产生稳定作用, 但直接模式下外加磁场对糊状层的稳定作用具有不确定性. 本文所给出结果为工业中利用外加磁场改善产品的质量提供了重要的理论参考.

关键词: 糊状层, 磁流体动力学, 稳定性**PACS:** 64.70.D-, 68.08.-P, 47.65.-d**DOI:** 10.7498/aps.70.20201748

1 引言

在合金的凝固过程中由于成分过冷 (constitutional supercooling) 的存在, 界面会出现不稳定性^[1,2]. 这种不稳定性的进一步演化导致在固相和液相之间出现一种新的形态, 即糊状区^[3]. 糊状区可以理解为是由树枝状晶体、柱状晶体和液体组成的一种反应多孔区域 (reactive porous regions)^[4]. 研究糊状层的稳定性对于凝固问题有着重要的意义. 在重力场中由于不同成分之间密度差的存在导致流动的产生, 这使得糊状区同时受到温度场、浓度场以及流动的耦合作用. 已有一些研究者研究了这些耦合作用下糊状区的稳定性问题. 例如 Anderson 和 Worster^[5] 分析了二元合金凝固过程中糊状层的稳定性, 给出了识别振荡对流不稳定性的方法. Guba 和 Anderson^[6] 分析了三元合金定向凝固过程中糊状层的稳定性. 该模型包括热运输、溶质扩散和对流运输, 并确定了新的对流不稳定性, 包括直接模式和振荡模式.

磁场作为一种非接触式控制工具为提高产品的质量提供了一种便捷且可行的途径. 例如在金属加工过程中经常应用电磁场来提高钢坯的质量^[7-10]、改善铸件的凝固组织^[11,12]、减少产品的表面缺陷^[13]等. 磁场的存在改变了热运输和溶质运输, 对凝固过程有着重要的影响. 因此研究磁场作用下糊状区的动力学行为就显得至关重要. 例如, Riahi^[14] 研究了垂直磁场对糊状层中对流的影响. 发现外加磁场可以减弱烟囱 (chimney) 中的流动, 从而减少产品的雀斑缺陷. Muddamallappa 等^[15] 利用数值方法研究了二元合金在磁场中的凝固问题. 结果表明 Chandrasekhar 数的增大对凝固有稳定作用, 且临界瑞利数随着 Chandrasekhar 数的增大而增大. Kao 等^[16] 通过数值方法模拟了横向磁场对树枝状晶体尺寸和间距的影响. 研究结果发现由于洛伦兹力使得枝晶间的区域产生了流动, 从而改变了溶质的运输过程并影响了枝晶的生长. Sarkar 等^[17] 研究了二元合金凝固过程中糊状层的磁流体动力学, 结果表明外加磁场增强了糊状层的稳定性, 但在其模型中没有考虑溶质运输. 值得指

* 国家自然科学基金 (批准号: 11401021, 51971031) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chenmw@ustb.edu.cn

出的是当在相变过程中同时考虑热扩散、溶质输运和浮力对流时,问题将变得更加复杂和有趣^[18-20].

本文利用线性稳定方法研究了磁场对凝固过程中糊状层稳定性的影响,且模型包含了温度场、浓度场以及流动的耦合作用.通过本文的研究结果可以深入地理解外加磁场对糊状层稳定效应的影响,为冶金工业中如何精确的应用磁场减少产品的缺陷提供了重要的理论参考.

2 数学模型

2.1 控制方程

考虑二元合金在磁场中的凝固问题,认定糊状层的上下边界是等温的、不变形的和不渗透的.这使得糊状层与系统的其他部分动态隔离,具体描述见图 1.假定系统以恒定速率 V^* 向上凝固,在 $0 < z^* < H^*$ 的区域内存在一个厚度为 H^* 的糊状层.糊状层顶部和底部的温度及浓度分别为 T_{top}^* , T_{bot}^* , C_{top}^* , C_{bot}^* ,同时假设它们为常数.为了便于分析,假设固相和液相的比热和热导率相同.

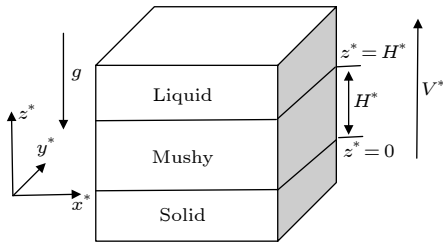


图 1 以恒定速度 V^* 凝固的糊状层示意图

Fig. 1. Schematic representation of mushy layer system, which advancing upwards with a constant solidification speed V^* .

假定糊状层受到强度为 \mathbf{B} 的外部磁场的作用,其中施加的磁场 \mathbf{B} 沿 z^* 轴垂直向上.此外,认定在糊状层具有恒定的导电率 σ_e ,且黏性耗散和焦(耳)热效应对传热的影响可以忽略不计.认定糊状层受到磁场诱导洛伦兹力的影响^[21],洛伦兹力表达式如下:

$$\mathbf{F} = \rho_e \mathbf{E} + \mathbf{J} \times \mathbf{B},$$

式中, \mathbf{J} 表示局部离子电流密度,其可以用欧姆定律写为 $\mathbf{J} = \rho_e \mathbf{u}^* + \sigma_e (\mathbf{E} + \mathbf{u}^* \times \mathbf{B})$ ^[21],其中 \mathbf{u}^* 表示流体速度, \mathbf{E} 表示电场, ρ_e 表示电荷密度.类似于文献^[17]中的讨论,本文忽略电场 \mathbf{E} 和流动对电荷的影响 $\rho_e \mathbf{u}^* \approx 0$.因此,洛伦兹力方程可以重

写为 $\mathbf{F} = \sigma_e (\mathbf{u}^* \times \mathbf{B}) \times \mathbf{B}$.

系统糊状层的控制方程满足热平衡方程、溶质平衡方程、二元相图约束、达西方程和质量平衡方程:

$$c^* \left(\frac{\partial T^*}{\partial t^*} - V^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} \right) + c^* \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* T^* = k^* \nabla^{*2} T^* + L_v^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial t^*} - V^* \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right), \quad (1)$$

$$(1 - \phi) \left(\frac{\partial C^*}{\partial t^*} - V^* \frac{\partial C^*}{\partial z^*} \right) + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* C^* = D^* \nabla^* [(1 - \phi) \nabla^* C^*] + (1 - k_1) C^* \left(\frac{\partial \phi}{\partial t^*} - V^* \frac{\partial \phi}{\partial z^*} \right), \quad (2)$$

$$T^* = T_{\text{top}}^* + m^* (C^* - C_{\text{top}}^*), \quad (3)$$

$$\frac{\mu^* \mathbf{u}^*}{\Pi^*(\phi)} = -\nabla^* p^* - (\rho^* - \rho_{\text{top}}^*) g^* \hat{\mathbf{k}} + \mathbf{F}, \quad (4)$$

$$\nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0, \quad (5)$$

式中, T^* 表示液相温度; C^* 表示液相浓度; ϕ 为糊状区固体体积分数; p^* 表示降低的压力(即动态压力和静水部分的和, $p^* = p_{\text{dyn}} + \rho_{\text{top}}^* g^* z^*$); \mathbf{u}^* 为达西速度; c^* 是比热; k^* 是热导率; L_v^* 是潜热; D^* 表示溶质扩散系数; k_1 表示偏析系数; m^* 是液相线斜率; $\Pi^*(\phi)$ 表示糊状层的渗透率; μ^* 是流体的动态黏度; g 是重力加速度; $\hat{\mathbf{k}}$ 表示向上的单位矢量; $\rho^* = \rho_{\text{top}}^* [1 - \alpha^* (T^* - T_{\text{top}}^*) - \alpha_1^* (C^* - C_{\text{top}}^*)]$,其物理含义是糊状层中的对流运动是由密度差驱动的,同时假定密度与温度、浓度呈线性关系^[6],其中 ρ_{top}^* 表示糊状层顶部的密度, α^* 和 α_1^* 为常数.

系统满足如下的边界条件:

当 $z^* = H^*$ 时,

$$C^* = C_{\text{top}}^*, \quad \phi = \phi_0, \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (6)$$

当 $z^* = 0$ 时,

$$C^* = C_{\text{bot}}^*, \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (7)$$

2.2 无量纲化

采用类似于文献^[6]的无量纲化方案,选择凝固速率 V^* 作为速度尺度,长度尺度为 κ^*/V^* ,时间尺度为 κ^*/V^{*2} ,压力尺度为 $\frac{\mu^* \kappa^*}{\Pi^*(\phi_0)}$,密度尺度为 $\frac{\mu^* V^*}{g^* \Pi^*(\phi_0)}$,温度和浓度为 $T = \frac{T^* - T_{\text{top}}^*}{\Delta T^*}$, $C =$

$\frac{C^* - C_{\text{top}}^*}{\Delta C^*}$, 其中, $\Delta T^* = T_{\text{top}}^* - T_{\text{bot}}^*$, $\Delta C^* = C_{\text{top}}^* - C_{\text{bot}}^*$. 这里 $\kappa^* = k^*/c^*$ 表示热扩散系数, $\Pi^*(\phi_0)$ 为渗透率尺度.

无量纲后的控制方程为

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) T + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + S \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi, \quad (8)$$

$$(1 - \phi) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) C + \mathbf{u} \cdot \nabla C = \frac{1}{Le} [(1 - \phi) \nabla C] + (1 - k_1)(1 + C^{\text{bot}} + C) \left(\frac{\partial}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi, \quad (9)$$

$$T = mC, \quad (10)$$

$$K(\phi) \mathbf{u} = -\nabla p - \Delta \rho \hat{\mathbf{k}} - \text{Ham}^2(\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}), \quad (11)$$

$$\nabla \mathbf{u} = 0, \quad (12)$$

其中

$$K(\phi) = \frac{\Pi^*(\phi_0)}{\Pi^*(\phi)}, \quad \Delta \rho = -RaT - Ra_1 C_1,$$

$$S = \frac{L_v^*}{C^* \Delta T^*}, \quad m = \frac{m^* \Delta C^*}{\Delta T^*},$$

$$\text{Ham} = \sqrt{\frac{\sigma_e B^2 \Pi^*(\phi_0)}{\mu^*}}, \quad Le = \frac{\kappa^*}{D^*},$$

$$C^{\text{bot}} = \frac{C_{\text{bot}}^*}{\Delta C^*}, \quad Ra = \frac{\rho_{\text{top}}^* \alpha^* \Delta T^* g^* \Pi^*(\phi_0)}{\mu^* V^*},$$

$$Ra_1 = \frac{\rho_{\text{top}}^* \alpha_1^* \Delta C^* g^* \Pi^*(\phi_0)}{\mu^* V^*}. \quad (13)$$

边界条件如下:

当 $z = \delta$ 时,

$$C = 0, \quad \phi = \phi_0, \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (14)$$

当 $z = 0$ 时,

$$C = -1, \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0. \quad (15)$$

其中

$$\delta = \frac{H^* V^*}{\kappa^*}, \quad \Delta \rho = -Ra_{C1} C, \quad Ra_{C1} = mRa + Ra_1.$$

2.3 重标度

通过限制糊状层的厚度是薄的 $\delta \ll 1$, 使得模型是渐近减小的. 其物理含义是糊状层的厚度远小于热扩散长度, 或者等效地认为凝固速率远小于热传导穿过糊状层的传热速率. 下面重新标度系统,

$$\begin{aligned} \text{令 } C^{\text{bot}} &= \frac{\bar{C}^{\text{bot}}}{\delta^2}, \quad S = \frac{\bar{S}}{\delta^2}, \quad (x, z) = \delta(\bar{x}, \bar{z}), \quad t = \delta^2 \bar{t}, \\ Ra &= \frac{1}{\delta} \bar{Ra}, \quad Ra_1 = \frac{1}{\delta} \bar{Ra}_1, \end{aligned}$$

则系统的控制方程变为

$$\left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} - \delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) T + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla^2 T + \frac{\bar{S}}{\delta^2} \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} - \delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \phi, \quad (16)$$

$$(1 - \phi) \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} - \delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) C + \delta \mathbf{u} \cdot \nabla C$$

$$= \frac{1}{Le} \nabla [(1 - \phi) \nabla C] + (1 - k_1) \left(1 + \frac{\bar{C}^{\text{bot}}}{\delta^2} + C\right) \times \left(\frac{\partial}{\partial \bar{t}} - \delta \frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right) \phi, \quad (17)$$

$$T = m_1 C, \quad (18)$$

$$\begin{aligned} \frac{\Pi^*(\phi_0)}{\Pi^*(\phi)} \mathbf{u} &= \frac{-1}{\delta} \nabla p + \frac{1}{\delta} (\bar{Ra} T + \bar{Ra}_1 C) \hat{\mathbf{k}} \\ &\quad - \text{Ham}^2(\mathbf{u} \times \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{k}}). \end{aligned} \quad (19)$$

边界条件为

$$C = 0, \quad \phi = \phi_0, \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (\bar{z} = 1). \quad (20)$$

$$C = -1, \quad \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0 \quad (\bar{z} = 0). \quad (21)$$

3 稳定性分析

为了研究系统的稳定性, 可做如下分解:

$$T = \tilde{T}(\bar{z}) + \varepsilon \hat{T}(\bar{z}) e^{\sigma \bar{t} + ik \bar{x}} + \text{c.c.}, \quad (22a)$$

$$C = \tilde{C}(\bar{z}) + \varepsilon \hat{C}(\bar{z}) e^{\sigma \bar{t} + ik \bar{x}} + \text{c.c.}, \quad (22b)$$

$$\phi = \tilde{\phi}(\bar{z}) + \varepsilon \hat{\phi}(\bar{z}) e^{\sigma \bar{t} + ik \bar{x}} + \text{c.c.}, \quad (22c)$$

$$\mathbf{u} = 0 + \varepsilon \frac{1}{\delta} \hat{\mathbf{u}}(\bar{z}) e^{\sigma \bar{t} + ik \bar{x}} + \text{c.c.}, \quad (22d)$$

$$p = \tilde{p}(\bar{z}) + \varepsilon \hat{p}(\bar{z}) e^{\sigma \bar{t} + ik \bar{x}} + \text{c.c.}, \quad (22e)$$

其中, $\tilde{T}(\bar{z})$, $\tilde{C}(\bar{z})$, $\tilde{\phi}(\bar{z})$, $\tilde{p}(\bar{z})$ 表示无流动的基态解; $\hat{T}(\bar{z})$, $\hat{C}(\bar{z})$, $\hat{\phi}(\bar{z})$, $\hat{\mathbf{u}}(\bar{z})$, $\hat{p}(\bar{z})$ 表示扰动态; $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}(z), \hat{v}(z), \hat{w}(z)]$, $\sigma = \sigma_R + i\sigma_I$ 表示复的增长率, k 表示水平波数.

3.1 稳态解

类似于文献 [6] 容易求得系统的稳态解为

$$\tilde{T} = -(1 - \bar{z}) + \frac{\delta}{2} \Omega \bar{z} (1 - \bar{z}) + \dots, \quad (23a)$$

$$\tilde{C} = -(1 - \bar{z}) + \frac{\delta}{2} \Omega_1 \bar{z} (1 - \bar{z}) + \dots, \quad (23b)$$

$$\tilde{\phi} = \phi_0 - \delta^2 \frac{1}{\Gamma} (1 - \bar{z}) + \dots, \quad (23c)$$

其中

$$\Omega = 1 - \frac{\bar{S}}{\Gamma}, \quad \Omega_1 = 1 - \frac{\Gamma_1}{\Gamma},$$

$$\Gamma = -\frac{mLe\varphi - (1 - \phi_0)\bar{S}}{(1 - \phi_0)(1 - mLe)},$$

$$\Gamma_1 = \frac{(1 - Le)(1 - \phi_0)\bar{S}}{(1 - \phi_0)(1 - mLe)}, \quad \varphi = (1 - k_1)\bar{C}^{\text{bot}}.$$

3.2 线性扰动方程

为便于分析, 对 (19) 式应用两次旋度可以消去压力 p 且化简为

$$\begin{aligned} & \nabla \left[\mathbf{u} \cdot \nabla \left(\frac{\Pi^*(\phi_0)}{\Pi^*(\phi)} \right) \right] - \nabla^2 \left[\frac{\Pi^*(\phi_0)}{\Pi^*(\phi)} \mathbf{u} \right] \\ &= \frac{1}{\delta} \overline{Ra} \left[\frac{\partial T}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y \partial z} \mathbf{j} - \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} \right] \\ &+ \frac{1}{\delta} \overline{Ra}_1 \left[\frac{\partial C}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial C}{\partial y \partial z} \mathbf{j} - \left(\frac{\partial^2 C}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} \right] \\ &- \text{Ham}^2 \left[\frac{\partial w}{\partial x \partial z} \mathbf{i} + \frac{\partial w}{\partial y \partial z} \mathbf{j} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \mathbf{k} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

扰动系统的控制方程为

$$(\sigma - \delta D) \left(\hat{T} - \frac{1}{\delta} \bar{S} \hat{\phi} \right) + \hat{w} D \hat{T} = (D^2 - k^2) \hat{T}, \quad (25)$$

$$\begin{aligned} & (1 - \tilde{\phi})(\sigma - \delta D) \hat{C} + \delta^2 \hat{\phi} D \hat{C} + \hat{w} D \hat{C} \\ &= \frac{1}{Le} \{ D[(1 - \tilde{\phi}) D \hat{C}] - \delta D(\hat{\phi} D \hat{C}) - k^2(1 - \tilde{\phi}) \hat{C} \} \\ &+ (1 - k_1) \left[\delta \left(1 + \frac{1}{\delta^2} \bar{C}^{\text{bot}} + \bar{C} \right) (\sigma - \delta D) \hat{\phi} - \delta \hat{C} D \tilde{\phi} \right], \end{aligned} \quad (26)$$

$$(D^2 - k^2) [K(\tilde{\phi}) \hat{w}] + k^2 (\overline{Ra} \hat{T} + \overline{Ra}_1 \hat{C}) - k^2 \text{Ham}^2 \hat{w} = D\{\hat{w} D[K(\tilde{\phi})]\}, \quad (27)$$

$$\hat{T} = m \hat{C}. \quad (28)$$

边界条件为

$$\hat{C} = 0, \quad \hat{\phi} = 0, \quad \hat{w} = 0 \quad (\bar{z} = 1). \quad (29)$$

$$\hat{C} = 0, \quad \hat{w} = 0 \quad (\bar{z} = 0). \quad (30)$$

其中 $D = \frac{d}{d\bar{z}}$.

下面求扰动系统 (25)–(28) 具有如下形式的渐近解:

$$\sigma = \sigma^0 + \delta \sigma^1 + \dots, \quad (31a)$$

$$\overline{Ra} = Ra^0 + \delta Ra^1 + \dots, \quad (31b)$$

$$\overline{Ra}_1 = Ra_1^0 + \delta Ra_1^1 + \dots, \quad (31c)$$

$$\hat{T} = T^0 + \delta T^1 + \dots, \quad (31d)$$

$$\hat{C} = C^0 + \delta C^1 + \dots, \quad (31e)$$

$$\hat{\phi} = T^0 + \delta \phi^1 + \dots, \quad (31f)$$

$$\hat{w} = w^0 + \delta w^1 + \dots, \quad (31g)$$

$$K(\tilde{\phi}) = 1 + \delta^2 K_1 \tilde{\phi}^2 + \dots, \quad (31h)$$

$$K_1 = \frac{1}{\delta} \bar{K}_1. \quad (31i)$$

$O(\delta^0)$ 阶的控制方程为

$$(D - \sigma^1) \phi^0 + \frac{1}{\Gamma \hat{T}} w^0 = 0, \quad (32)$$

$$(D - k^2) C^0 - \frac{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1}{1 - \phi^0} w^0 = 0, \quad (33)$$

$$(D - k^2) w^0 + k^2 Ra_{C1}^0 = k^2 \text{Ham}^2 w^0. \quad (34)$$

边界条件为

$$C^0 = \phi^0 = w^0 = 0 \quad (\bar{z} = 1). \quad (35)$$

$$C^0 = w^0 = 0 \quad (\bar{z} = 0). \quad (36)$$

类似于文献 [6] 可解的

$$C^0 = -\frac{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1}{\Omega + \hat{\Omega}} \sin n\pi \bar{z}, \quad (37)$$

$$w^0 = -\frac{J(1 - \phi_0)}{\Omega + \hat{\Omega}} \sin n\pi \bar{z}, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \phi^0 &= \frac{n\pi J(1 - \phi_0)}{\Gamma \hat{T}(\Omega + \hat{\Omega})[n^2 \pi^2 + (\sigma^1)^2]} \left[(-1)^{n+1} e^{-\sigma^1(1-\bar{z})} \right. \\ &\left. + \cos n\pi \bar{z} + \frac{\sigma^1}{n\pi} \sin n\pi \bar{z} \right], \end{aligned} \quad (39)$$

$$Ra_{C1}^0 = -\frac{J(1 - \phi_0)(J + k^2 \text{Ham}^2)}{k^2(\Omega_1 + \hat{\Omega}_1)}, \quad (40)$$

其中, $J = n^2 \pi^2 + k^2$. 需要指出的是 σ_1 出现在 (39) 式 ϕ^0 的解中, 而 σ_1 却是未知的. 这就需要通过下面 $O(\delta^1)$ 阶的可解性条件来确定. $O(\delta^1)$ 阶的控制方程为

$$(D^2 - k^2) C^1 - \frac{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1}{1 - \phi_0} w^1 = \theta, \quad (41)$$

$$(D^2 - k^2) w^1 + k^2 Ra_{C1}^0 C^1 = k^2 \text{Ham}^2 w^1 + W, \quad (42)$$

其中

$$\theta = \frac{Le[1 - \phi_0 - m(\Omega_1 + \hat{\Omega}_1)]\Sigma}{(1 - \phi_0)(1 - \phi_0 - m_1 Le_1)},$$

$$W = -\bar{K}_1(D^2 - k^2)(\bar{\phi}^2 w^0) + \bar{K}_1 D(w^0 D\bar{\phi}^2) - k^2 Ra_{C1}^1 C^0.$$

通过 (41) 式和 (42) 式的可解性条件得

$$a_1 \overline{Ra_{C1}} = -b \frac{J(J + k^2 Ham^2)}{k^2}. \quad (43)$$

其中

$$a_1 = \frac{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1}{1 - \phi_0} - \delta \left(\frac{1}{J} \sigma^1 c_1 + d_1 \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 + (\sigma^1)^2} \times \left\{ 1 - \frac{2\sigma^1 [1 + (-1)^{n+1} e^{-\sigma^1}]}{n^2 \pi^2 + (\sigma^1)^2} \right\} \right), \quad (44a)$$

$$b = 1 - \delta \frac{1}{2} \frac{\bar{K}_1}{\Gamma}, \quad (44b)$$

$$c_1 = \frac{Le [m\phi - (1 - \phi_0)\bar{S}] (\Omega_1 + \hat{\Omega}_1)}{(1 - \phi_0)[mLe\phi - (1 - \phi_0)\bar{S}]}, \quad (44c)$$

$$d_1 = \frac{-\bar{S}}{\Gamma \hat{\Gamma} [mLe\phi - (1 - \phi_0)\bar{S}]}. \quad (44d)$$

色散方程 (43) 表征了糊状层凝固系统中的各种物理效应, 将在第 4 节进行讨论.

4 讨论

在稳定性分析中, 为了清楚地分析驱动不稳定性的物理机制, 将结果简化为下面的两种情况: $\overline{Ra} = 0$, $\overline{Ra}_1 \neq 0$ 和 $\overline{Ra} \neq 0$, $\overline{Ra}_1 = 0$. 本文重点讨论 $\overline{Ra} = 0$, $\overline{Ra}_1 \neq 0$ 的情况, 即认为系统只有溶质 C 对浮力有贡献. 对于 $\overline{Ra} \neq 0$, $\overline{Ra}_1 = 0$ (即浮力是由温度 T 驱动的情况), 可以利用同样的方法进行讨论.

在只有溶质 C 对浮力有贡献情况下, 下面主要给出中性稳定性的结果.

4.1 直接模式 (direct modes)

对于中性稳定的直接模式 ($\sigma_R^1 = 0$, $\sigma_I^1 = 0$), 由 (43) 式可得中性稳定性的 Rayleigh 数为

$$\overline{Ra}_1 = -\frac{1 - \phi_0}{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1} \frac{J(J + k^2 Ham^2)}{k^2} \times \left[1 + \delta \left(\frac{1 - \phi_0}{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1} d_1 - \frac{1}{2} \frac{\bar{K}_1}{\Gamma} \right) \right] + O(\delta^2). \quad (45)$$

由 (45) 式可以看出在 (\overline{Ra}_1, k) 平面上的中性曲线可以位于静态不稳定区域 ($\overline{Ra}_1 < 0$) 或静态稳定 ($\overline{Ra}_1 > 0$) 区域, 这取决于 $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1$ 的符号.

为了讨论稳定 ($\sigma_R^1 < 0$) 和不稳定区域 ($\sigma_R^1 > 0$), 对 \overline{Ra}_1 求导有

$$\left. \frac{d\overline{Ra}_1}{d\sigma_R^1} \right|_{\sigma_R^1} = \delta \left[\frac{2(\pi^2 + k^2)}{\pi k} \right]^2 \left(\frac{1 - \phi_0}{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1} \right)^2 \times \left[\frac{d_1}{c_1} - \frac{\pi^2}{4(\pi^2 + k^2)} \right] c_1. \quad (46)$$

由 (45) 式和 (46) 式可看出, 可将直接模式的中性稳定性曲线分为下面 4 种情况:

- 1) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 > 0$, $c_1 > 0$, $d_1 < 0$;
- 2) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 > 0$, $c_1 < 0$, $d_1 > 0$;
- 3) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 < 0$, $c_1 > 0$, $d_1 < 0$;
- 4) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 < 0$, $c_1 < 0$, $d_1 > 0$.

图 2 给出了在 (\overline{Ra}_1, k) 平面上这些情况下的中性稳定性图. 情况 1): 在 $Ham = 0$ 时与文献 [6] 附录 C 中通过数值方法研究的结论是一致的. 当 $Ham = 5$ 时可以看出不稳定区域减小, 这说明磁场对糊状区的凝固有稳定的作用. 情况 2): 由图 2 可以看出外加磁场对糊状层产生了不稳定的作用. 情况 3): 在物理上是不可能发生的 [6]. 情况 4): 即当 $\overline{Ra}_1 > 0$ 时, 由图 2 可以看出施加的磁场对糊状层有稳定作用. 这一结果与文献 [15] 利用数值方法研究磁场对糊状区影响的结果是一致的.

4.2 振荡模式 (oscillatory modes)

对于中性稳定的振荡模式 ($\sigma_R^1 = 0$, $\sigma_I^1 \neq 0$), 由 (43) 式可得中性稳定性的 Rayleigh 数为

$$\overline{Ra}_1 = -\frac{1 - \phi_0}{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1} \frac{J(J + k^2 Ham^2)}{k^2} \times \left(1 + \delta \left\{ \frac{1 - \phi_0}{\Omega_1 + \hat{\Omega}_1} d_1 \frac{n^2 \pi^2}{n^2 \pi^2 - (\sigma_I^1)^2} \times \left[1 - \frac{2(-1)^{n+1} \sigma_I^1 \sin \sigma_I^1}{n^2 \pi^2 - (\sigma_I^1)^2} \right] - \frac{1}{2} \frac{\bar{K}_1}{\Gamma} \right\} \right) + O(\delta^2), \quad (47)$$

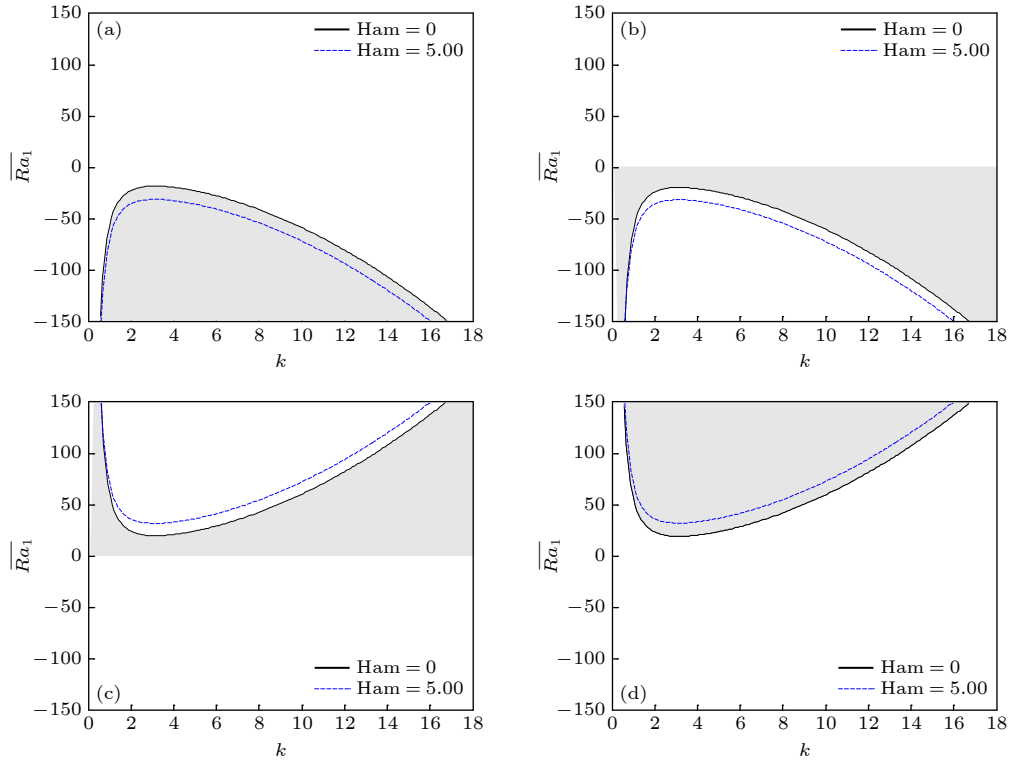


图 2 直接模式的中性稳定性曲线和不稳定区域 (阴影部分) 示意图 (a) 情况 1; (b) 情况 2; (c) 情况 3; (d) 情况 4

Fig. 2. Schematic representation of the neutral-stability curves and the regions of instability (shaded) for direct modes: (a) Situation 1; (b) situation 2; (c) situation 3; (d) situation 4.

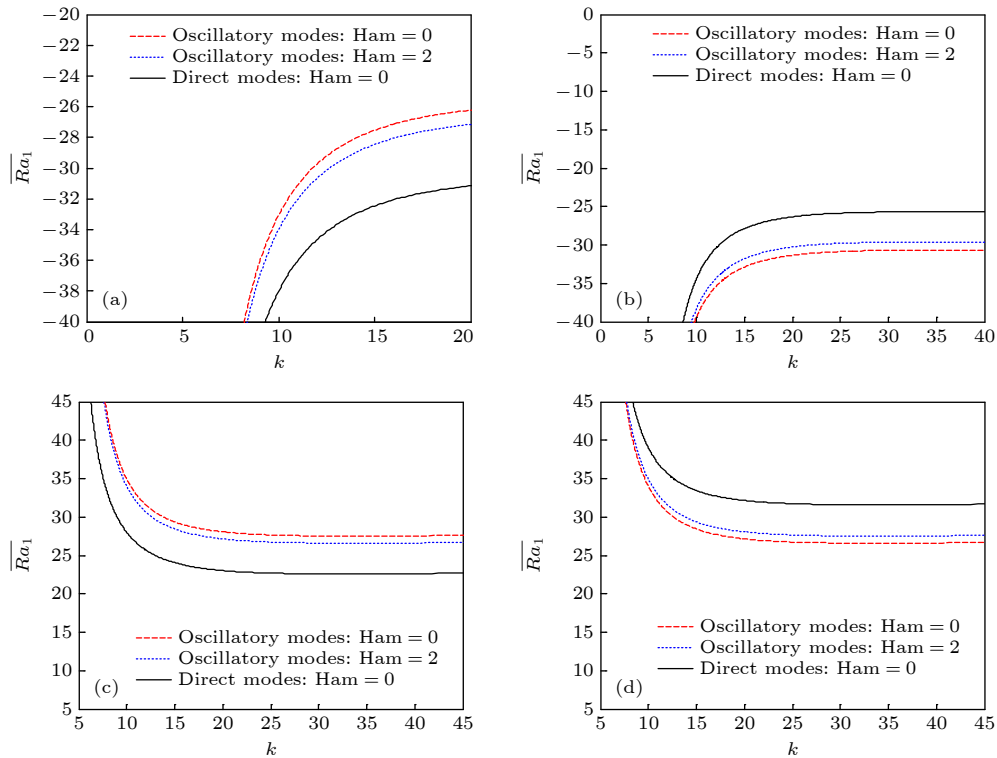


图 3 振荡模式的中性稳定性曲线示意图 (振荡模式的不稳定性区域为图中实线 (黑色) 和点划线 (红色) 之间的部分) (a) 情况 1; (b) 情况 2; (c) 情况 3; (d) 情况 4

Fig. 3. Schematic representation of the neutral-stability curves for the oscillatory modes: (a) Situation 1; (b) situation 2; (c) situation 3; (d) situation 4. The instability region of oscillation mode is the part between solid line (black) and dashed line (red).

$$\sigma_1^1 \left\{ 1 - J \frac{d_1}{c_1} \frac{2n^2\pi^2 [1 + (-1)^{n+1} \cos \sigma_1^1]}{[n^2\pi^2 - (\sigma_1^1)^2]^2} \right\} = 0. \quad (48)$$

其中 (47) 式中频率 σ_1^1 是 (48) 式的实非零解.

由 (47) 式和 (48) 式可以看出, $Q_1 = \frac{d_1}{c_1}$ 对振荡不稳定性有着重要的影响, 且当 $Q_1 > \frac{\pi^2}{4(\pi^2 + k^2)}$ 时出现振荡模式. 类似于直接模式, 将振荡模式的中性稳定性曲线分为以下 4 种情况:

- 1) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 > 0, c_1 > 0, d_1 > 0;$
- 2) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 > 0, c_1 < 0, d_1 < 0;$
- 3) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 < 0, c_1 > 0, d_1 > 0;$
- 4) $\Omega_1 + \hat{\Omega}_1 < 0, c_1 < 0, d_1 < 0.$

图 3 给出了在 (\overline{Ra}_1, k) 平面上这些情况下的中性稳定性图. 情况 1), 2), 4) 的图示表明磁场对糊状区的凝固有稳定的作用. 情况 3): 在物理上是不可能发生的^[6]. 也就是说, 外部施加的磁场对振荡模式下的糊状层产生稳定作用, 这一结果与文献 [17] 的研究成果是一致的.

5 结 论

本文将 Guba 和 Anderson^[6] 给出的糊状层凝固模型推广到了包含外加磁场作用的情况. 分析了磁场对糊状层稳定性的影响, 其中包括直接模式和振荡模式. 通过分析振荡模式下的中性稳定性发现磁洛伦兹力总是起稳定作用, 这一发现与文献 [17] 的结论是一致的. 但在对直接模式下中性稳定性的

分析中发现外加磁场并非总是起稳定作用. 实际上我们可以理解为糊状层的稳定性是热扩散、溶质扩散、流动和洛伦兹力耦合作用的结果. 总之, 本文的结论为冶金工业中利用磁场来提高产品的质量提供了重要的理论参考.

参考文献

- [1] Kurz W, Fisher D J 1989 *Fundamentals of Solidification* (Aedermannsdorf: Enfield Publishing & Distribution Company) pp46–55
- [2] Amberg G, Homsy G M 1993 *J. Fluid Mech.* **252** 79
- [3] Mullins W W, Sekerka R F 1964 *J. Appl. Phys.* **35** 444
- [4] Anderson D M, Guba P 2020 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **52** 93
- [5] Anderson D M, Worster M G 1996 *J. Fluid Mech.* **307** 245
- [6] Guba P, Anderson D M 2014 *J. Fluid Mech.* **760** 634
- [7] Ganapathysubramanian B, Zabarar N 2005 *Int. J. Heat Mass Transf.* **48** 4174
- [8] Tian X Y, Zou F, Li B W, He J C 2010 *Metall. Mater. Trans. B* **40** 112
- [9] Cukierski K, Thomas B G 2008 *Metall. Mater. Trans. B* **39** 94
- [10] Thomas B G, Zhang L 2001 *ISIJ Int.* **41** 1181
- [11] Mofatt H K 1965 *J. Fluid Mech.* **22** 521
- [12] Saluja N, Ilegbusi O J, Szekeley J 1990 *J. Appl. Phys.* **68** 5845
- [13] Kumar A, Dutta P 2005 *Int. J. Heat Mass Transf.* **48** 3674
- [14] Riahi D N 2000 *J. Cryst. Growth* **216** 501
- [15] Muddamallappa M S, Bhatta D, Riahi D N 2009 *Transport Porous Med.* **79** 301
- [16] Kao A, Cai B, Lee P D, Pericleous K 2017 *J. Cryst. Growth* **457** 270
- [17] Sarkar S, Ganguly S, Dutta P 2017 *Appl. Math. Model* **48** 233
- [18] Anderson D M 2003 *J. Fluid Mech.* **483** 165
- [19] Anderson D M, Mcfadden G B, Coriell S R, Murray B T 2010 *J. Fluid Mech.* **647** 309
- [20] Guba P, Anderson D M 2017 *J. Fluid Mech.* **825** 853
- [21] Moreau R J 2013 *Magnetohydrodynamics* (Vol. 3) (Berlin: Springer Science & Business Media) pp4–12

Effect of magnetic field on stability in mushy layer during binary alloy solidification*

Fan Hai-Long Chen Ming-Wen †

(School of Mathematics and Physics, University of Science and Technology Beijing, Beijing 100083, China)

(Received 21 October 2020; revised manuscript received 16 November 2020)

Abstract

During directional solidification of binary alloy mixtures, instability in the solid/liquid interface appears due to constitutional undercooling. As a result of this instability, a reactive porous medium, namely mushy layer, is formed, and it separates the liquid phase from the solid phase completely. The intrinsic structure of the mushy layer is of fine-scale dendritic crystal that shelters solute in the interstitial fluid. In a gravitational field, the rejection of lighter solute components from an advancing solidification front brings about unstable density gradient. Ensuing convective motions in the mush are driven by a density difference. The convection can change the solid matrix of the mushy layer. Hence, the dynamic response of the mushy layer is driven by interaction among heat transfer, solute transport and convection. As a contactless control tool, external magnetic field can change the heat and solute transport, which has a significant effect on the phase change process. Therefore, when magnetic field, thermal diffusion, solute transport and buoyancy convection are considered simultaneously in the phase transformation process, the mechanism of mushy region will become more complex and interesting. In this paper, the effect of external magnetic field on the stability of mushy layer during binary alloy solidification is studied. The coupling effects of magnetic field, temperature field, concentration field and convection are considered in the model. Including the direct mode and the oscillation mode, the resulting dispersion relation reveals the influence of magnetic field on the stability of mushy layer through linear stability analysis. It is found that the Lorentz force can reduce the instability effect which is caused by buoyancy convection. In the oscillation mode, an external magnetic field brings about a stabilizing effect on the mushy layer, but in the direct mode, the effect of external magnetic field on stability of the mushy layer is uncertain. In conclusion, the finding in this paper provides an important theoretical reference for improving products quality by applying an external magnetic field in the metals processing industry.

Keywords: mushy layer, magnetohydrodynamics, stability**PACS:** 64.70.D-, 68.08.-P, 47.65.-d**DOI:** 10.7498/aps.70.20201748

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11401021, 51971031).

† Corresponding author. E-mail: chenmw@ustb.edu.cn