



## 非线性声场中的参量激发

陈海霞 林书玉

### Nonlinear propagation and parameters excitation of ultrasound

Chen Hai-Xia Lin Shu-Yu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 114302 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20202093

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202093>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 超声在液体中的非线性传播及反常衰减

Nonlinear propagation and anomalous absorption of ultrasound in liquid

物理学报. 2020, 69(13): 134301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200425>

#### 非线性波动方程的新数值迭代方法

New numerical iterative method for nonlinear wave equations

物理学报. 2020, 69(3): 034301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191440>

#### 柱面非线性麦克斯韦方程组的行波解

Traveling wave solutions of the cylindrical nonlinear Maxwell's equations

物理学报. 2017, 66(13): 130302 <https://doi.org/10.7498/aps.66.130302>

#### 基于等效弹性模量的微裂纹-超声波非线性作用多阶段模型

Modelling of multi-stage nonlinear interaction of micro-crack and ultrasonic based on equivalent elastic modulus

物理学报. 2017, 66(13): 134301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.134301>

#### 双气泡振子系统的非线性声响应特性分析

Nonlinear acoustic response of two bubble oscillators

物理学报. 2019, 68(14): 144302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190408>

#### 非线性光学中的暗孤子分子

Dark soliton molecules in nonlinear optics

物理学报. 2020, 69(1): 014208 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191347>

## 非线性声场中的参量激发\*

陈海霞 林书玉†

(陕西师范大学物理学与信息技术学院, 陕西省超声学重点实验室, 西安 710062)

(2020年12月9日收到; 2020年12月28日收到修改稿)

本文基于求解单频声波方程近似解的方法, 得到了非线性声场中谐波的声压与介质性质、初始声压幅值及频率之间的定量关系. 并对两列相对声压幅值和相对频率不同情况下的声场分布进行了研究. 通过分析单、双频声源辐射场中的谐波分布和传播规律发现: 在非线性声场中会不断地出现新的谐波, 激发的各阶谐波随着声波传播距离的增大逐渐增强而后减弱. 在声源的附近, 谐波的声压随基波声压振幅的增大而增大; 但在基波的频率增大时反而会减小. 在输入总声能相同的情况下, 与单频声场相比双频声源辐射场的声能量分布较均匀, 声的传播距离较大, 远场中的谐波含量较大. 结果表明, 基波的频率越高, 衰减得越快, 谐波的积累越缓慢; 声压的极值越大, 基波声能量转移得越多, 产生的谐波越多, 基波的衰减越快, 声压对远场声能的负效应增大; 如果改用多频声源, 并适当地控制输入声波的组成成分, 可以达到改善声场分布均匀性、增大声辐射距离的效果.

**关键词:** 非线性作用, 声波方程, 声参量**PACS:** 43.25.+y, 43.35.+d**DOI:** 10.7498/aps.70.20202093

## 1 引言

超声波的自作用以及不同频率声波在空间的调制问题, 近年来引起了国内外学者的广泛关注并取得了不少的成果. 鉴于超声波和介质的非线性效应, 传播中的声波波形会不断地发生变化, 同时在声的传播路径上持续地发生谐波、分频波以及和差频波; 而且实际声源辐射的往往是多频波, 不同频率声波间的非线性相互作用, 又会产生新的各阶差频与和频声波, 这些新波的出现将会改变初始声波的传播特性<sup>[1-7]</sup>. 如 Westervelt<sup>[8]</sup>提出的非线性声学参量阵理论, 以及钱祖文<sup>[9,10]</sup>的声散射声理论都为声呐小型化、高性能化提供了理论依据. 强声场中大幅声波的超吸收、声压对声源远场能量的负效应<sup>[11-13]</sup>, 说明影响非线性声的传播的不仅是驱动声源, 还有介质的非线性和黏滞性、热传导及空化等诸多因素<sup>[14-20]</sup>. 本文根据求解声波方程得出的近似解, 分别对单、双频声源声场中的声参量的产

生和传播规律进行了探讨. 通过比较发现, 声波间的非线性相互作用不仅改变了基波与谐波的含量比, 而且使声场中的声能分布也发生了变化. 即当输入声波的声压比和频率比不同时, 声场的分布就会不同, 因此可以通过改变输入声波的组成成分来调控声场的分布. 这个研究结果为建立高声强低畸变, 声能分布均匀的声场提供了理论上的依据.

## 2 声的非线性传播模型

## 2.1 单频声波的非线性传播

描述声的非线性传播规律的基本方程为<sup>[21]</sup>

$$\frac{\partial \rho'}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \rho' + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} \right) = -\nabla p + (\mu + \mu') \nabla \nabla \cdot \mathbf{v} + \mu \nabla^2 \mathbf{v}, \quad (2)$$

$$p = c_0^2 \rho' + \frac{\beta - 1}{\rho_0} c_0^2 \rho'^2 - \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) \nabla \cdot \mathbf{v} + \dots, \quad (3)$$

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11674206, 11874253) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: sylin@snnu.edu.cn

式中,  $\mu, \mu'$  表示介质的第一和第二黏滞系数;  $\kappa$  为介质的热传导系数;  $C_V, C_P$  分别为介质的等容和等压比热容;  $\beta$  为介质的非线性系数;  $p = P - P_0$  和  $\rho' = \rho - \rho_0$  分别表示由于声扰动引起的介质压强和密度的变化,  $P_0$  和  $\rho_0$  分别表示液体静态的压强与密度,  $c_0$  为绝热声速. 假设速度是无旋的并将 (3) 式代入 (2) 式, 消去  $p$  可得

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + v \cdot \nabla v \right) = -c_0^2 \nabla \left( \rho' + \frac{\beta - 1}{\rho_0} \rho'^2 \right) + \left[ \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right) + (2\mu + \mu') \right] \nabla^2 v. \quad (4)$$

分别将  $\partial/\partial t, \nabla \cdot$  作用于 (4) 式, 结合 (1) 式消去  $\partial\rho'/\partial t, \nabla\rho'$  项, 并引入势函数  $\varphi$ , 即  $v = -\nabla\varphi$ . 利用线性关系  $p = c_0^2\rho' = \rho_0\partial\varphi/\partial t$ , 得到的非线性波动方程为

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} - c_0^2\nabla^2\varphi = \frac{\partial}{\partial t} \left[ (\nabla\varphi)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial\varphi}{\partial t} \right)^2 \right] + \frac{b}{\rho_0} (\nabla^2\varphi) - \frac{1}{3} \nabla(\nabla\varphi)^3 - \frac{b}{\rho_0} \nabla\varphi (\nabla^3\varphi), \quad (5)$$

$$\text{式中, 耗散系数 } b = 2\mu + \mu' + \kappa \left( \frac{1}{C_V} - \frac{1}{C_P} \right). \quad (6)$$

设上述声波方程的解可以表示为

$$\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3 + \dots, \quad (7)$$

其中  $\varphi_1$  为一级近似解;  $\varphi_2$  为二级近似解;  $\varphi_3$  为三级近似解.

令  $\varphi_1 = \varphi_a e^{i\omega(t-x/c)}$ , 依据文献 [22] 可知, (7) 式中的二级近似解为 [22]

$$\varphi_2 = -\frac{\varphi_a^2 \omega^3 x}{2c_0^4} \left[ \frac{\beta - 5A^2\beta + 3A^2}{1 + 5A^2 + 4A^4} + \frac{iA(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right] e^{2i\omega(t-x/c)}, \quad (8)$$

在  $A \ll 1$  的条件下, 波的衰减系数可以表示为

$$\alpha \approx \omega A / (2c_0) = \omega^2 b / (2\rho_0 c_0^3). \quad (9)$$

用同样的方法, 求得的三级近似解为

$$\varphi_3 = \frac{-\varphi_a^3 \omega^6 A x}{c_0^6 (1 + A^2)^2} \left[ \frac{5A^2 - 2A^2\beta + 9A^4\beta - 7A^4 + \beta}{1 + 5A^2 + 4A^4} + \frac{iA(2A^4 - 2A^4\beta - 9A^2 + 10A^2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right] \times e^{3i\omega(t-x/c)}, \quad (10)$$

其中  $A = \omega b / (\rho_0 c_0^2)$ ;  $c = c_0 \sqrt{1 + iA}$  是液体中的实际声速.

由关系式  $p = \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t}$ , 得到的声压表达式为

$$p = \rho_0 \frac{\partial\varphi}{\partial t} = \rho_0 \frac{\partial(\varphi_1 + \varphi_2 + \varphi_3)}{\partial t} = p_1 e^{i\omega(t-x/c)} + p_2 e^{2i\omega(t-x/c)} + p_3 e^{3i\omega(t-x/c)}, \quad (11)$$

式中

$$p_1 = i\rho_0 \varphi_a \omega, \quad (12)$$

$$p_2 = \frac{\rho_0 \varphi_a^2 \omega^4 x}{c_0^4} \left[ \frac{A(2A^2\beta - 2A^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} - \frac{i(\beta - 5A^2\beta + 3A^2)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right], \quad (13)$$

$$p_3 = \frac{3\rho_0 \varphi_a^3 \omega^7 A x}{c_0^6 (1 + A^2)^2} \times \left[ \frac{A(2A^4 - 2A^4\beta - 9A^2 + 10A^2\beta + 1)}{1 + 5A^2 + 4A^4} - \frac{i(5A^2 - 2A^2\beta + 9A^4\beta - 7A^4 + \beta)}{1 + 5A^2 + 4A^4} \right]. \quad (14)$$

从 (8) 式和 (10) 式可以看出, 频率为  $\omega$  的单频声波在介质中传播时, 声速发生了改变且滋生了频率为  $2\omega$  和  $3\omega$  的谐波. 如果在展开式 (3) 式中保留更高次项, 就可以得到更高次的谐波解. 而且各高次谐波的强度都与驱动声压、介质的性质有关, 并随传播距离  $x$  的增大而增大.

## 2.2 声波间的非线性作用及传播

考虑到实际的声源辐射的声波一般都含有多个频率成分, 不同频率声波间的非线性作用又会产生新的各阶差频与和频声波, 致使初始声波的传播特性发生了改变. 为使问题简化, 以下仅讨论两列声波间的相互作用.

基于文献 [22] 中单频声波方程的求解方法, 设初始声波为两个频率为  $\omega_1$  和  $\omega_2$  的简谐扰动之和, 令

$$\varphi'_1 = \varphi'_{1a} + \varphi'_{1b} = \varphi'_a e^{i\omega_1(t-x/c)} + \varphi'_b e^{i\omega_2(t-x/c)}. \quad (15)$$

将 (15) 式代入 (5) 式的右端, 得到的二级近似方程为

$$\begin{aligned}
 & \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial t^2} - c_0^2 \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x^2} - \frac{b}{\rho_0} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2 \varphi'_2}{\partial x^2} \right) = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 & = \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial (\varphi'_{1a} e^{i\omega_1(t-x/c)})}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial (\varphi'_{1a} e^{i\omega_1(t-x/c)})}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial t} \left[ \left( \frac{\partial (\varphi'_{1b} e^{i\omega_2(t-x/c)})}{\partial x} \right)^2 + \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial (\varphi'_{1b} e^{i\omega_2(t-x/c)})}{\partial t} \right)^2 \right] \\
 & \quad + \frac{\partial}{\partial t} \left[ 2 \left( \frac{\partial (\varphi'_{1a} e^{i\omega_1(t-x/c)})}{\partial x} \right) \left( \frac{\partial (\varphi'_{1b} e^{i\omega_2(t-x/c)})}{\partial x} \right) \right] \\
 & \quad + 2 \frac{\beta - 1}{c_0^2} \left( \frac{\partial (\varphi'_{1a} e^{i\omega_1(t-x/c)})}{\partial t} \right) \left( \frac{\partial (\varphi'_{1b} e^{i\omega_2(t-x/c)})}{\partial t} \right). \tag{16}
 \end{aligned}$$

求解 (16) 式得到对应的二级近似解为

$$\varphi'_2 = \varphi'_{2a} + \varphi'_{2b} + \varphi'_{2c}. \tag{17}$$

其中

$$\begin{aligned}
 \varphi'_{2a} &= -\frac{\varphi'^2_a \omega_1^3 x}{2c_0^4} \left[ \frac{\beta - 5A_1^2 \beta + 3A_1^2}{1 + 5A_1^2 + 4A_1^4} + \frac{iA_1 (2A_1^2 \beta - 2A_1^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A_1^2 + 4A_1^4} \right] e^{2i\omega_1(t-x/c)}, \\
 \varphi'_{2b} &= -\frac{\varphi'^2_b \omega_2^3 x}{2c_0^4} \left[ \frac{\beta - 5A_2^2 \beta + 3A_2^2}{1 + 5A_2^2 + 4A_2^4} + \frac{iA_2 (2A_2^2 \beta - 2A_2^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A_2^2 + 4A_2^4} \right] e^{2i\omega_2(t-x/c)}, \\
 \varphi'_{2c} &= -\frac{\varphi'_a \varphi'_b \omega_1 \omega_2 x}{c_0^3} \left[ \frac{\beta (1 - A_{12}^2) + A_{12}^2}{1 + A_{12}^2} + \frac{iA_{12} (1 - 2\beta)}{1 + A_{12}^2} \right] e^{i\omega_1(t-x/c)} e^{i\omega_2(t-x/c)}.
 \end{aligned}$$

式中,  $A_1 = \frac{\omega_1 b}{\rho_0 c_0^2}$ ,  $A_2 = \frac{\omega_2 b}{\rho_0 c_0^2}$ ,  $A_{12} = \frac{(\omega_1 + \omega_2) b}{\rho_0 c_0^2}$ .

考虑到复数解  $e^{i\omega_1(t-x/c)} e^{i\omega_2(t-x/c)}$  的实部为

$$\begin{aligned}
 & \cos[\omega_1(t-x/c)] \cos[\omega_2(t-x/c)] \\
 & = \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 + \omega_2)(t-x/c)] \\
 & \quad + \frac{1}{2} \cos[(\omega_1 - \omega_2)(t-x/c)]
 \end{aligned}$$

可知, (17) 式右端的第三项  $\varphi'_{2c}$  是由两列简谐波组成的, 它们分别为两列初始声波的和频波与差频波.

利用关系式  $p = \rho_0 \frac{\partial \varphi}{\partial t}$ , 得到声压的表达式为

$$p' = p'_1 + p'_2, \tag{18}$$

$$p'_1 = \rho_0 \frac{\partial \varphi'_1}{\partial t} = p'_{1a} e^{i\omega_1(t-x/c)} + p'_{1b} e^{i\omega_2(t-x/c)}, \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
 p'_2 &= \rho_0 \frac{\partial \varphi'_2}{\partial t} = p'_{2a} e^{2i\omega_1(t-x/c)} + p'_{2b} e^{2i\omega_2(t-x/c)} \\
 & \quad + p'_{2c} e^{i\omega_1(t-x/c)} e^{i\omega_2(t-x/c)}. \tag{20}
 \end{aligned}$$

其中

$$p'_{1a} = i\rho_0 \varphi'_a \omega_1, \tag{21}$$

$$p'_{1b} = i\rho_0 \varphi'_b \omega_2, \tag{22}$$

$$\begin{aligned}
 p'_{2a} &= \frac{\rho_0 \varphi'^2_a \omega_1^4 x}{c_0^4} \left[ \frac{A_1 (2A_1^2 \beta - 2A_1^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A_1^2 + 4A_1^4} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{i(5A_1^2 \beta - \beta - 3A_1^2)}{1 + 5A_1^2 + 4A_1^4} \right], \tag{23}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p'_{2b} &= \frac{\rho_0 \varphi'^2_b \omega_2^4 x}{c_0^4} \left[ \frac{A_2 (2A_2^2 \beta - 2A_2^2 + 2\beta + 1)}{1 + 5A_2^2 + 4A_2^4} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{i(5A_2^2 \beta - \beta - 3A_2^2)}{1 + 5A_2^2 + 4A_2^4} \right], \tag{24}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 p'_{2c} &= \frac{\rho_0 (\omega_1 + \omega_2) \varphi'_a \varphi'_b \omega_1 \omega_2 x}{c_0^3} \left[ \frac{A_{12} (1 - 2\beta)}{1 + A_{12}^2} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{i(\beta A_{12}^2 - \beta - A_{12}^2)}{1 + A_{12}^2} \right]. \tag{25}
 \end{aligned}$$

比较单、双频声波传播方程的二级近似解即

(8) 式和 (17) 式可以看出, 双频声场中不仅含有两列声波单独传播时滋生的二次谐波项  $\varphi'_{2a}$  和  $\varphi'_{2b}$ , 还增加了修正项  $\varphi'_{2c}$ . 第三项  $\varphi'_{2c}$  的出现说明: 两列声波在非线性传播过程中发生了相互作用, 并在介质中激发了频率分别为  $|\omega_1 + \omega_2|$  和  $|\omega_1 - \omega_2|$  的新简谐波. 我们把由于声波间的非线性相互作用在介质中产生和频波与差频波的现象称为声参量效应 [23].

### 3 计算结果与分析

#### 3.1 单频声场中的谐波分量

采用文中的非线性传播模型, 对单频声波声轴线上的声场分布进行了数值分析. 图 1 中的横坐标为  $X = x/x_k$ , 纵坐标为  $P = p_N/p_{1a}$ ,  $N$  为谐波的阶数. 其中  $x$  为观察点与声源之间的距离、 $x_k$  为临界距离、 $p_N$  为  $N$  次谐波的声压幅值、 $p_{1a}$  为驱动声压幅值. 当驱动声压幅值  $p_{1a} = 2 \times 10^5$  Pa,  $f = 1$  MHz

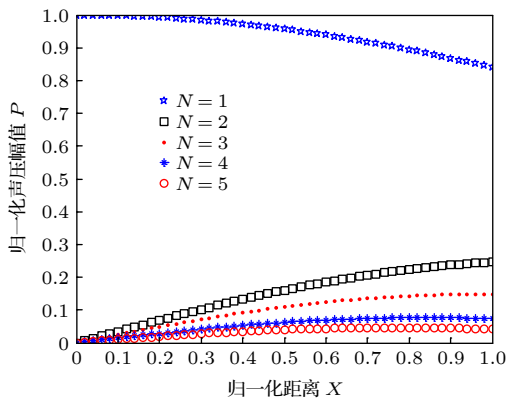


图 1 各阶谐波的声压分布曲线

Fig. 1. The harmonic curve of acoustics.

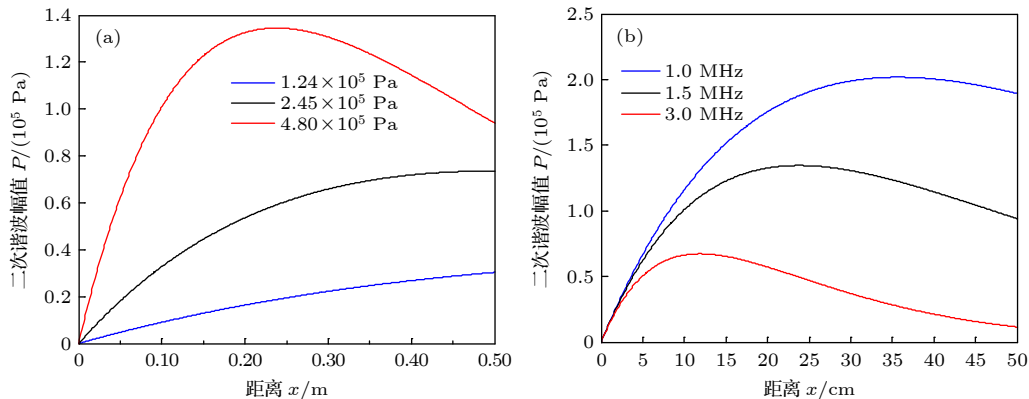


图 2 二次谐波曲线 (a) 不同声压下的二次谐波; (b) 不同频率下的二次谐波

Fig. 2. The distribution of second curve: (a) Different acoustic pressure; (b) different acoustic frequency.

时 (在水中  $\beta = 3.6$ ) 产生的谐波的传播规律, 如图 1 所示.

从图 1 可以看到, 在声源附近的声场中以基波为主, 谐波的含量较少; 随着传播距离的增大, 基波的声压逐渐减小, 谐波的声压逐渐增大. 这表明声场的能量由基波向高次谐波发生了转移且在临界距离处达到了最大; 阶数越高的谐波声压越小转移的能量也越少. 图 1 中谐波声能约占基频能量的 13%, 其中有 9% 的声能转换成了二次谐波. 为了简化问题, 以下仅讨论二次谐波的产生与传播规律.

在不同驱动声压、不同频率下产生的二次谐波曲线如图 2 所示. 从图 2(a) 中可以看出, 当声波频率为 1.5 MHz 时, 驱动声压越大, 产生的二次谐波的声压越大; 随着距离的增大, 二次谐波的声压值先增大后减小; 二次谐波的幅值越大, 衰减的也越快. 从图 2(b) 中可以看出, 驱动声压幅值为  $4.8 \times 10^5$  Pa 时, 驱动频率越大, 二次谐波的声压幅值越小; 随着距离的增大, 二次谐波的声压幅值先增大后减小; 声压幅值越小的二次谐波衰减得越快. 图 1 和图 2 表明, 谐波的强度与声源的驱动声压、频率以及和声源的间距有关, 驱动声压较高、频率较低的声场中更容易滋生谐波.

驱动声压不同时, 产生的谐波的声能与声场总能量之比分布曲线如图 3 所示. 当频率为 1.5 MHz 时, 随着驱动声压的增大, 声场中谐波能量的含量比也随之增大, 这说明在声的非线性传播过程中, 驱动声压越大基波向谐波转移的声能量越多; 随着距离的增大, 谐波的含量逐渐积累增大而后减小, 驱动声压越强谐波含量比的变化越快.

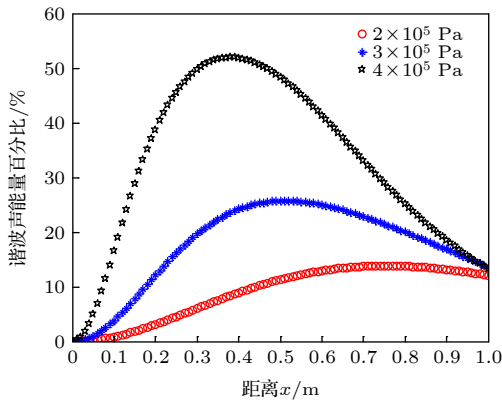


图 3 谐波声能与总能量比分布

Fig. 3. Distributions of the ratio of the hamonic and total energies.

### 3.2 声波间的非线性作用与各谐波分量的分布

设两列波的声压幅值为  $p_{1a}$ ,  $p_{2a}$ , 频率为  $f_1$ ,  $f_2$  ( $f_2 > f_1$ ), 其中  $f_1 = 1$  MHz, 选取的参数为:  $m = p_{2a}/p_{1a}$ ,  $n = f_2/f_1$ . 设声场中总输入声能为  $40 \text{ J/m}^3$ , 在声轴线上产生的和差谐波分量的分布, 如图 4 和图 5 所示.

从图 4 和图 5 可以看出, 在频率比  $n$  一定时, 和差频波的声压幅值都随着  $m$  的增大而增大; 声压比  $m$  一定时, 随着  $n$  的增大而减小; 差频波的声压比和频波的大且衰减得慢; 驱动声压极值和频率值较小时激发的谐频波较强, 如  $n = 2$ ,  $m = 1/1$  时, 激发的和差频波最强, 且差频波声压约为和频波的 3 倍.

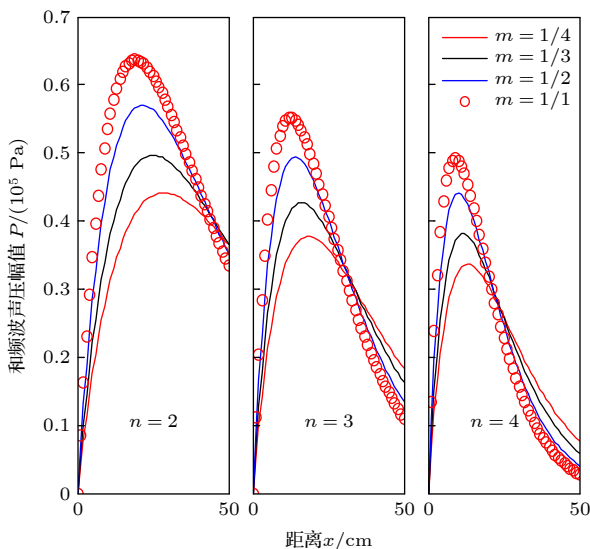


图 4 和频波声压分布曲线

Fig. 4. The acoustic pressure curves of sum frequency.

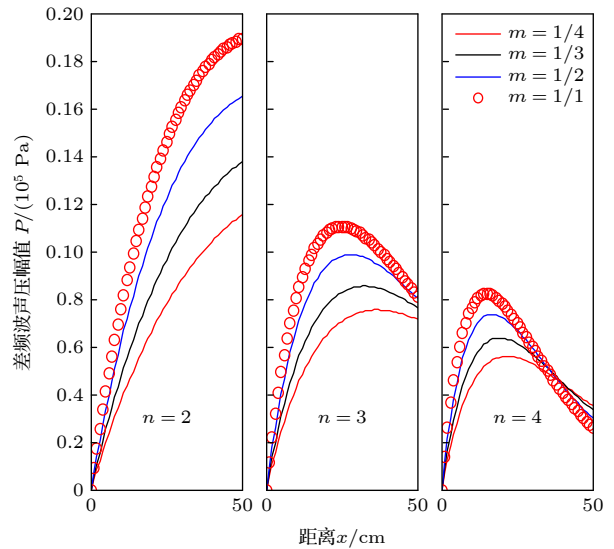


图 5 差频波声压分布曲线

Fig. 5. The acoustic pressure curves of difference frequency.

由图 6 可以看到, 在频率比  $n$  一定时, 谐波的声能含量随着  $m$  的增大而增大; 声压比  $m$  一定时, 随着  $n$  的增大而减小; 随着传播距离的增大, 谐波的含量先增大后减小. 当  $n = 2$ ,  $m = 1:1$  时, 谐波含量达到最大约占声场总声能的 50%, 说明声场中的能量转移不仅与输入的声功率有关, 还与入射声的组成成分有关.

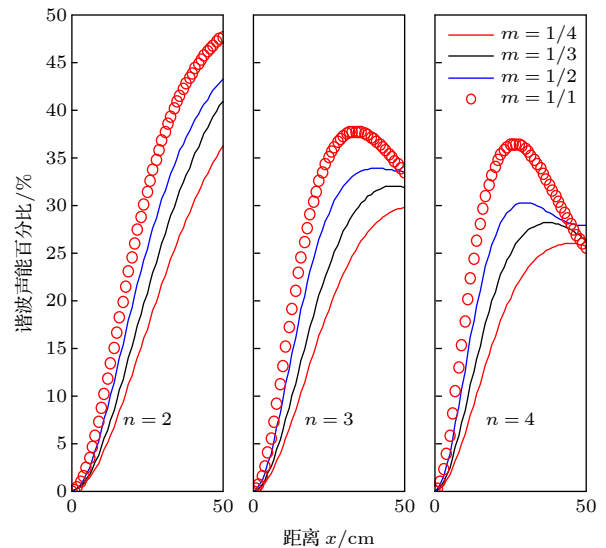


图 6 谐波声能与总能量比分布

Fig. 6. The ratio of the hamonic and total energies.

### 3.3 声参量效应对声场分布的影响

声波在非线形传播中产生的谐波与声场的驱动声压幅值、频率及介质的性质密切相关, 同时原声场也会因谐波的存在而发生改变. 在输入总声能

相同的情况下,单、双列声波传播中的声能变化及场中声能的分布如图7和图8所示.

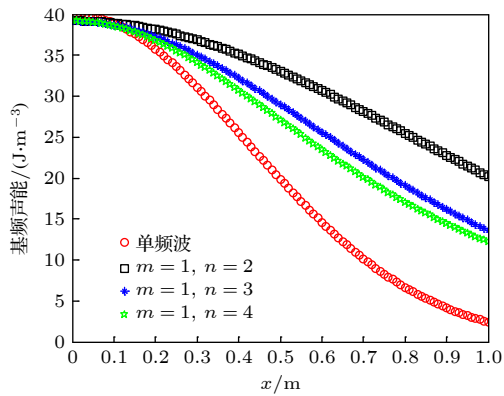


图7 基频声能量的分布

Fig. 7. The distribution of fundamental energy.

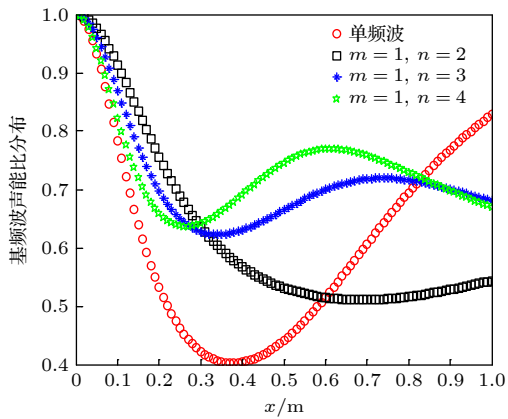


图8 基频声能与总声能比分布

Fig. 8. The ratio of the fundamental and total energies.

从图7可以看出,在  $m = 1$  的情况下,单频声场中的声能衰减量最大而且衰减的速度也最快,声源远场 1 m 处的声能只剩下了 5%;多频声场中频率比  $n$  较大的声能衰减得较快.图8给出了不同声场中的基波声能占比分布,当谐波的含量增大时,基波声能与总声能的比值就会减小.图8中显示基波声能比先减小后增大,说明在传播过程中产生的高次谐波率先被介质吸收;在  $x = 0.35$  m 处,单频的声能比下降的值最大说明滋生的谐波最显著.结合图7和图8可知,单频声场中的驱动声压较大、产生的谐波较多且衰减得快、远场的声能以基波能为主;相比之下多频声场中的声能分布较均匀、声波传播的距离较大、远场中的谐波含量也较大.

## 4 结论

本文对声波的非线性传播过程中出现的声参

量效应进行了探讨.人们发现了强声场中的众多现象,例如水中大幅声波的超吸收、声场中能量的负效应等都与参量的激发有关.声场中谐波的产生和积累过程与驱动声压、频率和介质的性质密切相关.例如,图1所示的声压幅值为  $2 \times 10^5$  Pa 的声波在水中的传播规律,表明声波在介质中传播时不但出现了谐波成分,而且谐波的含量还随着传播距离的增大不断增强.图2(a)中,频率一定时驱动声压越大产生的二次谐波越强;图2(b)中,声压一定时频率较大产生的二次谐波较弱.由图3给出的声场中的谐波声能比分布可知,频率一定的声场中,谐波含量比随着输入声压幅值的增大而增大.这表明声波与介质的非线性作用产生的谐波积累远远超过了声的吸收作用.从图4—图6中的和频波与差频波的声压以及谐波的声能分布,可以看到和频波含量较小且大多集中在声源的附近,差频波较强而且传播距离较远.图7和图8给出的单、双频场中的基波声能的分布及基波声能与场中总声能比的分布,说明多频场中的非线性作用过程要比单频场更加复杂,谐波成分也更丰富.综合以上分析,说明声波沿着传播路径不断地激励介质并产生新的谐波,由于高次谐波更容易被介质吸收从而导致了声能量的加速衰减;在增大输入声功率的同时,声场中的谐波含量也在增大,声能的衰减也在加快.最终的结果是高驱动产生了比低驱动更低的声能分布,因而参量效应也是引发强声场中声的超吸收、声能反常衰减的因素之一.文中的研究还表明,当多频声源输出的声波的声压比和频率比不同时,声场的分布就会发生变化.例如两列频率相近的等幅声波的耦合声场,与同声功率的单频声场相比,声场的传播距离明显增大而且场中声能分布的均匀性也得到了显著提高.这为通过改变输入声波的组成,调控声场的分布提供了理论上的依据,也使得在高声强情况下建立一个畸变低、声能分布均匀的声场成为可能.

## 参考文献

- [1] Westervelt P J 1957 *J. Acoust. Soc. Am.* **29** 199
- [2] Westervelt P J 1957 *J. Acoust. Soc. Am.* **29** 934
- [3] Ingard U, Pridmo-Brown D C 1955 *J. Acoust. Soc. Am.* **27** 1002
- [4] Ingard U, Pridmo-Brown D C 1956 *J. Acoust. Soc. Am.* **28** 367
- [5] Qian Z W 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1479 (in Chinese) [钱祖文 1981 *物理学报* **30** 1479]
- [6] Qian Z W 1981 *Acta Phys. Sin.* **30** 1559 (in Chinese) [钱祖文

- 1981 物理学报 **30** 1559]
- [7] Qian Z W 1988 *Acta Phys. Sin.* **37** 221 (in Chinese) [钱祖文 1988 物理学报 **37** 221]
- [8] Westervelt P J 1963 *J. Acoust. Soc. Am.* **35** 535
- [9] Qian Z W 1976 *Acta Phys. Sin.* **25** 472 (in Chinese) [钱祖文 1976 物理学报 **25** 472]
- [10] Qian Z W 1999 *J. Phys.* **28** 593 (in Chinese) [钱祖文 1999 物理 **28** 593]
- [11] Wang X, Chen W Z, Liang S D, Zhao T Y, Liang J F 2017 *Phys. Rev. E* **95** 033118
- [12] Wang X, Chen W Z, Yang J, Liang S D 2018 *J. Appl. Phys.* **123** 214904
- [13] Chen W Z 2018 *Appl. Acoust.* **37** 675 (in Chinese) [陈伟中 2018 应用声学 **37** 675]
- [14] Ashokumar M 2011 *Ultrason. Sonochem.* **18** 864
- [15] Wijngaarden L V 1972 *Ann. Rev. Fluid Mech.* **4** 369
- [16] Commander K W, Prosperetti A 1989 *J. Acoust. Soc. Am.* **85** 732
- [17] Vanhille C, Cleofé C P 2011 *Ultrason. Sonochem.* **18** 679
- [18] Thiessen R J, Cheviakov A F 2019 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **73** 244
- [19] Zhang H H 2020 *J. Acoustic Soc. Am.* **147** 399
- [20] Wang Y, Lin S Y, Zhang X L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 034301 (in Chinese) [王勇, 林书玉, 张小丽 2014 物理学报 **63** 034301]
- [21] Qian Z W 2009 *Nonlinear Acoustics* (Beijing: Science Press) p14 (in Chinese) [钱祖文 2009 非线性声学(北京: 科学出版社) 第14页]
- [22] Chen H X, Lin S Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 134301 (in Chinese) [陈海霞, 林书玉 2020 物理学报 **69** 134301]
- [23] Du G H, Zhu Z M, Gong X F 2001 *Fundamentals of Sound* (Nanjing: Nanjing University Press) p495 (in Chinese) [杜功焕, 朱哲民, 龚秀芬 2001 声学基础(南京: 南京大学出版社) 第495页]

## Nonlinear propagation and parameters excitation of ultrasound\*

Chen Hai-Xia    Lin Shu-Yu †

(Shaanxi Key Laboratory of Ultrasonics, School of Physics & Information Technology,  
Shaanxi Normal University, Xi'an 710062, China)

( Received 9 December 2020; revised manuscript received 28 December 2020 )

### Abstract

The formula for the nonlinear propagation of harmonics is obtained by using the generalized Navier-Stokes equations and the modified equations of state, considering the presence of heat transfer and fluid viscosity. The quantitative relationship among the harmonic pressure, initial sound pressure amplitude, frequency and the media property is obtained by approximately solving the single-frequency acoustic equation. In this paper, the harmonics' distributions and propagations in the radiation field of single- and double-frequency sound source with different driving pressures and frequencies are discussed. It is found that new harmonics constantly appear in the sound field, and each-order harmonic of excitation gradually increases and then weakens with the increase of distance. The amplitude of harmonic pressure increases with the increase of the driving acoustic pressure near the sound source, but decreases with the increase of the frequency. Compared with the single-frequency field, the dual-frequency field has a large propagation distance, a very uniform acoustic energy distribution, and a large harmonic content in the far-field when the input total sound energy is constant. The physical mechanism is that the higher driving frequency causes a faster acoustic loss, a slower harmonic accumulation, and a smaller sound propagation distance. The higher driving pressure causes the much fundamental sound energy to be transferred, the more harmonics to be generated, the fundamental wave to be attenuated faster, and the negative effect of sound pressure on far-field sound energy to be increased. Through the analysis, it is found that the multi-frequency sound source can increase the propagation distance of sound, and improve the uniformity of sound energy distribution.

**Keywords:** nonlinear effect, wave equations, acoustic parametrics

**PACS:** 43.25.+y, 43.35.+d

**DOI:** 10.7498/aps.70.20202093

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11674206, 11874253).

† Corresponding author. E-mail: [sylin@snnu.edu.cn](mailto:sylin@snnu.edu.cn)