

## 二维耦合谐振子的非对易能谱

苟立丹

### On noncommutative energy spectra in two-dimensional coupling harmonic oscillator

Gou Li-Dan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 200301 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210092

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210092>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

矩阵形式的不变本征算符方法以及几种介观电路的本征频率

The invariant eigen-operator method in matrix form and the eigenfrequency of several mesoscopic circuits

物理学报. 2019, 68(22): 220301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190651>

用不变本征算符法求晶面吸附原子的振动模

Invariant eigen-operator calculated vibration mode of lattice in the case of absorbing an atom onto crystal surface

物理学报. 2018, 67(17): 170301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180469>

一维谐振子束缚的自旋轨道耦合玻色气体

One-dimensional spin-orbit coupling Bose gases with harmonic trapping

物理学报. 2019, 68(17): 173201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190143>

不同频率涨落驱动下全局耦合谐振子的集体动力学行为

Collective behaviors of globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations

物理学报. 2021, 70(13): 130501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210157>

非对易施瓦西黑洞的热力学及其量子修正

Thermodynamics and its quantum correction of non-commutative Schwarichild black hole

物理学报. 2019, 68(20): 200401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191054>

三维各向同性谐振子的几何动量分布

Geometric momentum distribution for three-dimensional isotropic harmonic oscillator

物理学报. 2019, 68(1): 010301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181634>

# 二维耦合谐振子的非对易能谱

苟立丹<sup>†</sup>

(长春理工大学物理学院, 长春 130022)

(2021 年 1 月 14 日收到; 2021 年 6 月 9 日收到修改稿)

非对易的思想最初源于对极小尺度的时空坐标的研究, 后来引起了物理学界的广泛关注, 逐渐探讨了在很多领域中的非对易效应. 随着非对易量子力学的建立, 研究一些精确可解模型的非对易效应是非常有意义的. 各类谐振子模型就是其中之一. 但是在坐标与坐标, 动量与动量都是不对易的情况下, 很难得到耦合谐振子能谱的解析解. 本文旨在研究非对易相空间中二维耦合谐振子的量子特性. 首先用不变本征算符方法得到了同时包含多种耦合项的谐振子能谱的解析解. 然后分析非对易参数和耦合参数对非对易能谱的影响. 结果表明, 由于受到非对易参数和耦合参数的影响, 二维耦合谐振子的非对易能谱出现移动, 能级变为非简并的. 这与通常对易空间中二维谐振子能级简并 (除基态外) 的情况是完全不同的.

**关键词:** 耦合谐振子, 非对易相空间, 不变本征算符方法**PACS:** 03.65.-w, 03.65.Fd**DOI:** 10.7498/aps.70.20210092

## 1 引言

非对易空间的概念很早就被提出了<sup>[1]</sup>, 但最初并没有引起人们的重视. 后来由于弦理论的发展<sup>[2]</sup>, 非对易研究重新受到了人们的关注. 研究人员开始探索一些领域中的非对易效应, 例如量子引力<sup>[3,4]</sup>、凝聚态物理<sup>[5]</sup>等. 很多问题被纳入到了非对易空间中进行研究<sup>[6-8]</sup>, 例如谐振子<sup>[9]</sup>、氢原子<sup>[10]</sup>、朗道能级<sup>[9,11]</sup>等. 通常研究非对易空间量子系统的方法是将非对易算符通过映射的方法投影到对易空间, 使得算符满足标准的海森伯代数, 从而解决非对易问题. 2008 年范洪义等<sup>[12]</sup>把不变本征算符方法 (invariant eigen-operator method, IEO) 引入到非对易范畴, 用于求解非对易空间谐振子哈密顿量的能谱. 该方法是在海森伯思想和薛定谔算符的基础上提出的一种求解量子系统能谱的方法<sup>[13,14]</sup>, 已经在物理学的很多领域有着广泛的应用, 如固体物理<sup>[15,16]</sup>、介观物理<sup>[17,18]</sup>、二次型哈密顿量<sup>[19]</sup>等. 研

究表明 IEO 方法对于处理非对易空间谐振子的能谱问题是比较有效的. 目前已有学者用 IEO 方法研究过非对易相空间中任意维谐振子<sup>[20]</sup>、双模耦合谐振子<sup>[21]</sup>、三模耦合谐振子能谱<sup>[22]</sup>.

耦合谐振子模型是量子理论、固体物理、原子分子物理等领域中的基础模型, 对于研究多体问题和关联系统的相互作用具有重要的理论意义和实际价值. 例如: 晶体中原子排列成有序的结构, 原子与原子之间的相互作用可以用耦合谐振子模型进行模拟, 耦合参数可以描述相互作用强度. 此外, 还有很多的物理问题都可以简化到耦合谐振子模型, 因此研究非对易空间中的耦合谐振子能谱特性是很有意义的<sup>[23-25]</sup>. 文献<sup>[26]</sup>利用坐标变换将非对易问题变为对易问题, 然后用通常的量子力学方法求解. 文献<sup>[27]</sup>介绍了变形量子化方法, 即通过引入时间演化函数和魏格纳函数进行求解.

目前的研究结果普遍存在两方面的问题, 一是对于非对易空间, 只考虑了坐标和坐标不对易的情形, 而忽视了动量和动量的不对易, 以及两者同时

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: [gou\\_ld@163.com](mailto:gou_ld@163.com)

存在不对易的情形<sup>[26]</sup>; 二是耦合谐振子模型的哈密顿量只含有某一类耦合项, 并没有讨论同时包含多种耦合项的哈密顿量的本征问题<sup>[21,22,26,27]</sup>.

在非对易的理论框架下出现了很多新的问题, 由于坐标算符之间的不对易和动量算符之间的不对易, 所以求解耦合谐振子的能谱并非易事. 而 IEO 方法源于海森伯方程, 无须涉及系统的具体量子态, 只关注能级间隙, 避免了哈密顿量的对角化, 可以比较容易地解决一些问题. 因此本文尝试用 IEO 方法研究坐标和动量同时存在不对易的非对易相空间中二维耦合谐振子的量子特性. 用该方法可以较方便地得出同时包含坐标坐标耦合、动量动量耦合及坐标动量交叉耦合项的哈密顿量的能级差, 进而得到体系的非对易能谱. 然后详细分析了非对易参数和耦合参数对于非对易能级的具体影响, 得到了一些有意义的结果.

## 2 不变本征算符方法

量子力学中海森伯运动方程为 (采用自然单位制  $\hbar = 1$ )

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{O} = [\mathbf{O}, \mathbf{H}]. \quad (1)$$

引入不变本征算符  $\mathbf{O}$ , 使其满足方程

$$i \frac{d}{dt} \mathbf{O} = [\mathbf{O}, \mathbf{H}] = \lambda \mathbf{O}, \quad (2)$$

算符  $\mathbf{O}$  是在  $i \frac{d}{dt}$  作用下“不变的”, 这是因为薛定谔量子化方案中把  $i \frac{d}{dt}$  与  $\mathbf{H}$  视为等价, (2) 式是与薛定谔方程类似的方程. 假设  $\psi_a, \psi_b$  是  $\mathbf{H}$  的两个本征态, 它们的能量本征值分别为  $E_a, E_b$ , 则  $\mathbf{H}\psi_a =$

$E_a\psi_a, \mathbf{H}\psi_b = E_b\psi_b$ . 由 (2) 式有

$$\begin{aligned} & \langle \psi_a | [\mathbf{O}, \mathbf{H}] | \psi_b \rangle \\ &= (E_b - E_a) \langle \psi_a | \mathbf{O} | \psi_b \rangle = \lambda \langle \psi_a | \mathbf{O} | \psi_b \rangle, \end{aligned} \quad (3)$$

由 (3) 式可知  $\lambda = E_b - E_a$ , 因此,  $\lambda$  就是系统的能级差  $\Delta E$ .

## 3 二维耦合谐振子的非对易能谱

在一般的对易空间中, 坐标算符  $x_i$  和动量算符  $p_i$  满足海森伯代数关系:

$$[x_i, p_j] = i\delta_{ij}, [x_i, x_j] = 0, [p_i, p_j] = 0, \quad (4)$$

其中  $i, j = 1, 2$ . 在非对易相空间中, 坐标算符  $\mathbf{X}_i$  和动量算符  $\mathbf{P}_i$  满足以下关系:

$$[\mathbf{X}_i, \mathbf{P}_j] = i\delta_{ij}, [\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j] = i\varepsilon_{ij}\theta, [\mathbf{P}_i, \mathbf{P}_j] = i\varepsilon_{ij}\phi, \quad (5)$$

其中,  $\varepsilon_{ij}$  是反对称张量,  $\theta$  和  $\phi$  是非对易参数. 非对易相空间中的坐标和动量是缺乏对称性的.

文献<sup>[26, 27]</sup>研究的二维耦合谐振子模型的哈密顿量仅含有坐标耦合项, 为了使讨论更具有一般性, 本文设二维耦合谐振子的哈密顿量是

$$\begin{aligned} \mathbf{H} = & \frac{1}{2} (\mathbf{P}_1^2 + \mathbf{P}_2^2) + \frac{1}{2} (\mathbf{X}_1^2 + \mathbf{X}_2^2) \\ & + \eta \mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2 + \sigma \mathbf{P}_1 \mathbf{P}_2 \\ & + \kappa (\mathbf{X}_1 \mathbf{P}_1 + \mathbf{X}_2 \mathbf{P}_2 + \mathbf{X}_1 \mathbf{P}_2 + \mathbf{X}_2 \mathbf{P}_1), \end{aligned} \quad (6)$$

其中,  $\eta$  是坐标坐标耦合参数,  $\sigma$  是动量动量耦合参数,  $\kappa$  是坐标动量交叉耦合参数, 这些耦合参数可以表示相互作用的强度. 哈密顿量  $\mathbf{H}$  包含了所有的可能的耦合项, 可以作为二维耦合谐振子的一般模型. 通过 (5) 式得到

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1, \mathbf{H}] &= i(\kappa + \eta\theta) \mathbf{X}_1 + i(\kappa + \theta) \mathbf{X}_2 + i(1 + \kappa\theta) \mathbf{P}_1 + i(\sigma + \kappa\theta) \mathbf{P}_2, \\ [\mathbf{X}_2, \mathbf{H}] &= i(\kappa - \theta) \mathbf{X}_1 + i(\kappa - \eta\theta) \mathbf{X}_2 + i(\sigma - \kappa\theta) \mathbf{P}_1 + i(1 - \kappa\theta) \mathbf{P}_2, \\ [\mathbf{P}_1, \mathbf{H}] &= -i(1 - \kappa\phi) \mathbf{X}_1 - i(\eta - \kappa\phi) \mathbf{X}_2 - i(\kappa - \sigma\phi) \mathbf{P}_1 - i(\kappa - \phi) \mathbf{P}_2, \\ [\mathbf{P}_2, \mathbf{H}] &= -i(\eta + \kappa\phi) \mathbf{X}_1 - i(1 + \kappa\phi) \mathbf{X}_2 - i(\kappa + \phi) \mathbf{P}_1 - i(\kappa + \sigma\phi) \mathbf{P}_2. \end{aligned} \quad (7)$$

可以看出算符集合  $\{\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2\}$  在与  $\mathbf{H}$  对易关系的运算中是封闭的, 因此设不变本征算符为

$$\mathbf{O} = \alpha \mathbf{X}_1 + \beta \mathbf{X}_2 + \gamma \mathbf{P}_1 + \varepsilon \mathbf{P}_2, \quad (8)$$

其中,  $\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon$  是待定的系数. 算符  $\mathbf{O}$  满足如下方程

$$[\mathbf{O}, \mathbf{H}] = \lambda \mathbf{O}. \quad (9)$$

将 (6) 式和 (8) 式代入 (9) 式解得

$$\lambda_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A + \sqrt{4(\eta-1)(\sigma-1)(4\kappa^2 - \eta - \sigma - \eta\sigma - 1)(\theta\phi - 1)^2 + A^2}},$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{A - \sqrt{4(\eta-1)(\sigma-1)(4\kappa^2 - \eta - \sigma - \eta\sigma - 1)(\theta\phi - 1)^2 + A^2}},$$

$$A = 2 - 4\kappa^2 + (1 - \eta^2)\theta^2 + (1 - \sigma^2)\phi^2 + 2\eta\sigma. \quad (10)$$

根据 IEO 方法,  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  为系统的能级差  $\Delta E$ . 由此可以得到二维耦合谐振子的非对易能级为

$$E_{n_1, n_2} = n_1 \lambda_1 + n_2 \lambda_2 + c, \quad (11)$$

其中,  $n_1, n_2$  是量子数, 且是非负整数;  $c$  是常数. 我们所熟知的通常对易空间中二维谐振子的能级是  $E_{n_1, n_2} = n_1 + n_2 + 1$ , 且能级除基态外都是简并的. 考虑对 (11) 式取极限  $\theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0$ , 并且忽略耦合项可以得到通常二维谐振子的能级, 所以取  $c = 1$ .

## 4 讨论

假设所有耦合参数都为 0, 则二维非耦合谐振子的非对易能级可以写为

$$E_{n_1, n_2}^{(1)} = (n_1 + n_2) \sqrt{1 + \frac{1}{4}(\theta - \phi)^2} + (n_1 - n_2) \frac{(\theta + \phi)}{2} + 1. \quad (12)$$

由 (12) 式可以看出二维非耦合谐振子的非对易能级是非简并的. 为了展示非对易性对该能级的影响, 我们举一个具体的例子, 即当  $n_1 + n_2 = 2$  时,

各个能级的值如表 1 所示.

表 1 能级  $E_{n_1, n_2}^{(1)}$  的值 ( $n_1 + n_2 = 2, \eta = \sigma = \kappa = 0$ )  
Table 1. Values of  $E_{n_1, n_2}^{(1)}$  ( $n_1 + n_2 = 2, \eta = \sigma = \kappa = 0$ ).

|                            | $E_{2,0}^{(1)}$ | $E_{1,1}^{(1)}$ | $E_{0,2}^{(1)}$ |
|----------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\theta = \phi = 0$        | 3               | 3               | 3               |
| $\theta = 0.1, \phi = 0$   | 3.1025          | 3.0025          | 2.9025          |
| $\theta = 0, \phi = 0.1$   | 3.1025          | 3.0025          | 2.9025          |
| $\theta = 0.1, \phi = 0.1$ | 3.2             | 3.0             | 2.8             |

从表 1 可以看到, 第 2 行当非对易参数  $\theta$  和  $\phi$  都为 0 时, 能级是简并的, 这与通常对易空间中二维谐振子的能级情况是一致的. 而表中第 3 至 5 行当参数  $\theta$  和  $\phi$  不为 0 时, 能级会出现劈裂. 第 3 行参数  $\theta$  对能级的影响程度和第 4 行参数  $\phi$  的影响程度是一样的, 即以相同的数值破坏能级的简并. 第 5 行中参数  $\theta$  和  $\phi$  的同时作用会加大能级劈裂的程度. 这些结果表明虽然对易空间二维谐振子存在对称性, 具体表现为能级的简并, 但是非对易性能够破坏这种对称性, 并产生了能级劈裂.

当非对易参数  $\theta$  和  $\phi$  都为 0 时, 二维耦合谐振子的能级可以写为

$$E_{n_1, n_2}^{(2)} = \frac{n_1}{\sqrt{2}} \sqrt{A_1 + \sqrt{4(\eta-1)(\sigma-1)(4\kappa^2 - \eta - \sigma - \eta\sigma - 1) + A_1^2}} + \frac{n_2}{\sqrt{2}} \sqrt{A_1 - \sqrt{4(\eta-1)(\sigma-1)(4\kappa^2 - \eta - \sigma - \eta\sigma - 1) + A_1^2}} + 1,$$

$$A_1 = 2 - 4\kappa^2 + 2\eta\sigma. \quad (13)$$

为了展示耦合谐振子能级的变化, 仍以  $n_1 + n_2 = 2$  时的能级为例, 具体能级值如表 2 所示.

表 2 说明即使非对易参数  $\theta$  和  $\phi$  为 0, 但耦合参数  $\eta, \sigma$  和  $\kappa$  不为 0, 能级也会出现劈裂, 即耦合项的加入同样会破坏能级的对称性, 使得能级变成非简并的. 表 2 第 2 至 4 行表示系统只包含一类耦合项时能级的变化, 可以看出坐标耦合参数  $\eta$  和动量耦合参数  $\sigma$  对能级的影响程度是一样的, 但是坐

标动量交叉耦合参数  $\kappa$  对能级的影响小于  $\eta$  和  $\sigma$ . 表 2 第 5 至 7 行表示系统包含两类耦合项时能级的变化. 其中第 5 行是系统同时包含坐标耦合和动量耦合时的能级, 与第 2 至 4 行比较可以发现当系统同时包含两个耦合项时能级劈裂的程度变大了. 第 6 行是系统同时包含坐标耦合和坐标动量交叉耦合时的能级, 与第 5 行比较可以发现坐标动量交叉耦合项的出现使能级劈裂的程度变小了. 第 7 行

是系统同时包含动量耦合和坐标动量交叉耦合时的能级,与第6行的结果是一样的.表2第8行是系统同时包含坐标耦合、动量耦合和坐标动量交叉耦合时的能级,与第5至7行比较可以发现当系统同时包含三类耦合项时能级劈裂的程度进一步增大了.

表2 能级  $E_{n_1, n_2}^{(2)}$  的值 ( $n_1 + n_2 = 2, \theta = \phi = 0$ )  
Table 2. Values of  $E_{n_1, n_2}^{(2)}$  ( $n_1 + n_2 = 2, \theta = \phi = 0$ ).

|                                          | $E_{2,0}^{(2)}$ | $E_{1,1}^{(2)}$ | $E_{0,2}^{(2)}$ |
|------------------------------------------|-----------------|-----------------|-----------------|
| $\eta = 0.1, \sigma = 0, \kappa = 0$     | 3.09762         | 2.99749         | 2.89737         |
| $\eta = 0, \sigma = 0.1, \kappa = 0$     | 3.09762         | 2.99749         | 2.89737         |
| $\eta = 0, \sigma = 0.1, \kappa = 0.1$   | 3.0000          | 2.9798          | 2.95959         |
| $\eta = 0.1, \sigma = 0.1, \kappa = 0$   | 3.2             | 3.0             | 2.8             |
| $\eta = 0.1, \sigma = 0, \kappa = 0.1$   | 3.05913         | 2.97825         | 2.82038         |
| $\eta = 0, \sigma = 0.1, \kappa = 0.1$   | 3.05913         | 2.97825         | 2.82038         |
| $\eta = 0.1, \sigma = 0.1, \kappa = 0.1$ | 3.16333         | 2.98167         | 2.80000         |

能级  $E_{n_1, n_2}$  ( $n_1 + n_2 = 2$ ) 随参数  $\theta$  的变化情况如图1所示.从图1可以看到,  $E_{2,0}$  随着  $\theta$  的增加而增加.  $E_{1,1}$  随着  $\theta$  的变化比较平缓, 总体趋势是逐渐增加的.  $E_{0,2}$  是随着  $\theta$  的增加先减小后增加.而且图1中  $\theta = 1$  的点是能级的最小值.这是因为当  $\theta\phi = 1$  时 (11) 式中的第2项等于0.另外,当  $\theta$  取较大值时,能级  $E_{1,1}$  和  $E_{2,0}$  呈现出线性变化的趋势.能级  $E_{n_1, n_2}$  随参数  $\phi$  的变化情况与图1相同,这里不再赘述.

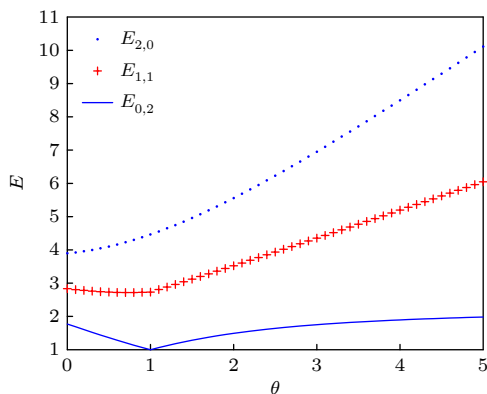


图1  $E_{n_1, n_2}$  随  $\theta$  的变化曲线 ( $n_1 + n_2 = 2, \phi = 1, \eta = 0.5, \sigma = 0.5, \kappa = 0.5$ )

Fig. 1.  $E_{n_1, n_2}$  versus  $\theta$  ( $n_1 + n_2 = 2, \phi = 1, \eta = 0.5, \sigma = 0.5, \kappa = 0.5$ ).

## 5 结 论

本文构造了同时包含坐标坐标、动量动量及坐标动量交叉的所有耦合项的二维耦合谐振子的模

型,并在非对易相空间中研究其能谱的特性.首先,用IEO方法计算得到了二维耦合谐振子非对易能谱的解析解.从(10)式和(11)式可以看出,系统能谱是与耦合参数和非对易参数有关的.其次,由于该解析解形式比较复杂,所以对其进行了分类讨论.以图表的形式详细分析了耦合参数和非对易参数对能谱的影响,得到以下结果.1)受到非对易参数的影响能级会出现劈裂.一般对易空间中二维谐振子具有较高的对称性,表现在其能级除基态外是简并的.然而,非对易性的出现破坏了这种对称性,使得能级出现了劈裂.由于非对易相空间中坐标和动量算符的形变导致了二维耦合谐振子的非对易能级出现非简并的情况.这是很重要的性质,为我们检验空间的非对易性提供了可能的途径.2)非对易参数  $\theta$  可以使  $n_1 \neq 0$  的能级值增加,而且随着  $\theta$  值的不断增加,能级会随其线性变化.但是对于  $n_1 = 0$  的能级,  $\theta$  使其值先减少后增加.参数  $\phi$  也有同样的效果.3)如果对非对易能谱取极限值,即  $\theta \rightarrow 0, \phi \rightarrow 0$ , 结果会与通常对易空间中的二维谐振子的能谱一致.4)受到耦合参数的影响,能级会出现劈裂.耦合项表示谐振子两个维度之间的相互作用,这种相互作用引起了能级的移动,导致能级出现非简并的情况.而且当系统包含的耦合种类增多时,能级劈裂的程度也会增大.同时发现坐标耦合参数  $\eta$  和动量耦合参数  $\sigma$  对能级的影响程度是一样的,但是坐标动量交叉耦合参数  $\kappa$  对能级的影响小于  $\eta$  和  $\sigma$ .

## 参考文献

- [1] Snyder H S 1947 *Phys. Rev.* **72** 68
- [2] Seiberg N, Witten E 1999 *J. High Energy Phys.* **3** 32
- [3] Doplicher S, Fredenhagen K, Roberts J E 1994 *Phys. Lett. B.* **331** 39
- [4] Zupnik B M 2007 *Class. Quantum Grav.* **24** 15
- [5] Polychronakos A P 2001 *J. High Energy Phys.* **6** 70
- [6] Bolonek K, Kosinski P 2002 *Phys. Lett. B.* **547** 51
- [7] Gamboa J, Loewe M, Rojas J C 2001 *Phys. Rev. D.* **64** 067901
- [8] Nair V P, Polychronakos A P 2001 *Phys. Lett. B.* **505** 267
- [9] Falomir H, Pisani P A G, Vegaf, Cárcamo D, Méndez F, Loewe M 2016 *J. Phys. A: Math. Theor.* **49** 055202
- [10] Kupriyanov V G 2013 *J. Phys. A: Math. Theor.* **46** 245303
- [11] Sinhad D, Giri P R 2011 *Mod. Phys. Lett. A.* **26** 2213
- [12] Wu H, Fan H Y 2008 *Commun. Theor. Phys.* **50** 1348
- [13] Fan H Y, Li C 2004 *Phys. Lett. A.* **321** 75
- [14] Fan H Y, Xu X F, Li C 2004 *Commun. Theor. Phys.* **42** 824
- [15] Ren Y C, Fan H Y 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 156301 (in Chinese) [任益充, 范洪义 2013 物理学报 **62** 156301]

- [16] Zhang K, Fan C Y, Fan H Y 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 170301 (in Chinese) [张科, 范承玉, 范洪义 2018 物理学报 **67** 170301]  
 [17] Fan H Y, Wu Z 2018 *Chin. Phys. B.* **27** 080301  
 [18] Fan H Y, Wu Z 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 220301 (in Chinese) [吴泽, 范洪义 2019 物理学报 **68** 220301]  
 [19] Lin Q, Fan H Y 2018 *Journal of University of Science and Technology of China* **48** 643  
 [20] Lin B S, Heng T Y 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 070303  
 [21] Ju Z Z, Li W B 2013 *Coll. Phys.* **32** 35 (in Chinese) [据泽志, 李文波 2013 大学物理 **32** 35]  
 [22] Zhang X L, Liu H, Yu H J 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 040303 (in Chinese) [张秀兰, 刘恒, 余海军 2011 物理学报 **60** 040303]  
 [23] Han D, Kim Y, Noz M 1995 *J. Math. Phys.* **36** 3940  
 [24] Han D, Kim Y, Noz M 1999 *Am. J. Phys.* **67** 61  
 [25] Kim Y, Noz M 2007 *J. Opt. B Quant. Semiclass. Opt.* **7** S458  
 [26] Jellal A, Kinani E, Schreiber M 2005 *Int. J. Mod. Phys. A* **20** 7  
 [27] Lin B S, Jing S C, Heng T H 2008 *Mod. Phys. Lett. A* **23** 445

# On noncommutative energy spectra in two-dimensional coupling harmonic oscillator

Gou Li-Dan<sup>†</sup>

(School of Physics, Changchun University of Science and Technology, Changchun 130022, China)

( Received 14 January 2021; revised manuscript received 9 June 2021 )

## Abstract

The ideas of noncommutative space originate from the research on time-space coordinate on an extremely small scale. Subsequently, the noncommutative space has gradually attracted some attention. The researchers started to explore noncommutative effect in some other fields. With the establishment of noncommutative quantum mechanics, it becomes significant to explore the noncommutative effect of exactly solvable models. The kinds of harmonic oscillators are very important and fundamental models in physics. But in noncommutative phase space, coordinate and coordinate are noncommutative, and momentum and momentum are also noncommutative. These results in the difficulty in obtaining the energy spectra of oscillators systems. In this paper the quantum properties of a two-dimensional coupling harmonic oscillator in noncommutative phase space are studied. Firstly, the Hamiltonian of the system is constructed, which includes all possible coupling types, namely, coordinate-coordinate coupling, momentum-momentum coupling, and coordinate-momentum cross-coupling. Secondly, the explicit expression of the noncommutative energy spectrum for the Hamiltonian is obtained by using the invariant eigen-operator method. In this work it is shown explicitly that the changes in the energy levels are related to the noncommutative parameters and coupling parameters. Thirdly, the effects of coupling parameters and non-commutative parameters on the energy spectra are analyzed in detail in the form of graphs. The results show that the energy levels under the influence of non-commutative parameters are non-degenerated. As the values of non-commutation parameters  $\theta$  and  $\phi$  increase, some energy levels increase and tend to change linearly, and other energy levels first decrease and then increase. If the limit values of the non-commutative parameters are taken as follows:  $\theta \rightarrow 0$  and  $\phi \rightarrow 0$ , then the noncommutative energy spectra will be consistent with the energy spectra of the two-dimensional harmonic oscillator in the commutative space in general. On the other hand, the energy levels will split under the influence of coupling parameters. Moreover, the degree to which the energy levels split can increase as the kinds of couplings in the system increase. It is found that the coordinate coupling parameter  $\eta$  and the momentum coupling parameter  $\sigma$  have the same influence on the energy levels, but the coordinate momentum cross-coupling parameter  $\kappa$  has less influence on the energy levels than  $\eta$  and  $\sigma$ . Overall, the above results are completely different from those of two-dimensional oscillator in the usual commutative space, which is degenerated except for the ground state.

**Keywords:** coupling harmonic oscillator, non-commutative phase space, invariant eigen-operator method

**PACS:** 03.65.-w, 03.65.Fd

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210092

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [gou\\_ld@163.com](mailto:gou_ld@163.com)