

不同频率涨落驱动下全局耦合谐振子的集体动力学行为

姜磊 赖莉 蔚涛 罗懋康

Collective behaviors of globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations

Jiang Lei Lai Li Yu Tao Luo Mao-Kang

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 130501 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210157

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210157>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

多重耦合振子系统的同步动力学

Synchronization in coupled oscillators with multiplex interactions

物理学报. 2020, 69(17): 170501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200394>

耦合相振子系统同步的序参量理论

Synchronization of coupled phase oscillators: Order parameter theory

物理学报. 2020, 69(8): 080502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191968>

过阻尼搓板势系统的随机共振

Stochastic resonance in overdamped washboard potential system

物理学报. 2017, 66(12): 120501 <https://doi.org/10.7498/aps.66.120501>

一种随机共振增强正弦信号的二次多项式接收方法

A quadratic polynomial receiving scheme for sine signals enhanced by stochastic resonance

物理学报. 2019, 68(21): 210501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190952>

多个耦合星型网络的同步优化

Optimizing synchronizability of multiple coupled star networks

物理学报. 2019, 68(18): 180503 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190308>

激光混沌并行串联同步及其在中继器保密通信系统中的应用

Chaotic laser parallel series synchronization and its repeater applications in secure communication

物理学报. 2019, 68(17): 170502 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190212>

不同频率涨落驱动下全局耦合谐振子的集体动力学行为^{*}

姜磊¹⁾ 赖莉¹⁾ 蔚涛^{1)†} 罗懋康¹⁾²⁾

1) (四川大学数学学院, 成都 610064)

2) (四川大学空天科学与工程学院, 成都 610064)

(2021 年 1 月 24 日收到; 2021 年 2 月 13 日收到修改稿)

对多粒子耦合系统而言, 环境涨落对各粒子的作用在实际情况中往往是互异的, 为此, 本文研究不同频率涨落驱动下全局耦合过阻尼谐振子系统中的集体动力学行为, 包括稳定、同步和随机共振. 通过随机平均法推导出粒子行为的统计同步性, 进而得到了系统平均场与单粒子行为在统计意义下的等价性. 并且, 利用该同步性进一步求解得到了输出幅值增益和系统稳定的充要条件. 前者为分析系统随机共振行为奠定了理论基础, 后者给出了本文所得结论的适应范围. 仿真表明, 耦合强度 ε 的增加或系统规模 N 的增大会带来两方面的影响: 首先, 稳定区域逐渐增大, 同步时间逐渐缩短; 其次, 系统的有序性增强, 需要更大的噪声强度提供更强随机性来与之实现最优匹配, 从而关于噪声强度 σ 的随机共振峰逐渐右移, 反之亦然.

关键词: 全局耦合谐振子, 随机共振, 同步, 稳定**PACS:** 05.45.Xt, 05.40.-a, 05.40.Ca**DOI:** 10.7498/aps.70.20210157

1 引言

噪声在自然和工程系统中无处不在, 而受噪声影响的复杂系统^[1]的集体动力学行为一直是非线性科学的研究重点. 稳定性作为系统的一个基本结构特性, 一直是随机系统研究所关心的基本问题^[2,3]. 例如, 在天气预报中, 预报的质量就取决于系统模型的稳定性, 即在一段时间后的天气状况对初始观测数据扰动的依赖^[4]. 在飞行器控制系统的设计中, 系统的稳定性则对飞行器的安全性与可控程度有至关重要的影响^[5].

同步作为复杂系统集体行为的一种最基本的表现形式广泛存在于如钟摆、乐器、生物系统、神经等各种自然科学与工程系统中^[6,7]. 作为一种集

体行为, 同步会对系统产生重要的影响^[8]. 例如, 鱼群鸟群的同步行为可减少个体被捕食的概率, 电网中电机的同步可以大大提高输电效率; 而另一方面, 过桥时人群的同步踩踏会使桥面产生共振断裂, 大脑神经元突发性异常同步发电会导致癫痫发作. 因此, 对复杂系统的同步进行理论分析以掌握其机制往往具有重要意义.

随机共振由于表现出噪声与非线性系统中微弱周期信号的协作现象而受到广泛深入的研究^[9–11]. 这一现象表明, 一定强度的噪声可以放大系统对微弱周期信号的响应幅值^[12,13]. 广义上讲, 随机共振指的是某些系统响应函数 (如矩、信噪比、幅值增益等) 随系统的某些特征参数 (如周期信号的频率、噪声强度、相关率等) 非单调变化的现象^[14]. 随机共振产生的条件为: 系统的非线性性,

* 国家自然科学基金青年基金 (批准号: 11501385, 11801385) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: scuyutao@163.com

微弱周期信号与噪声. 因此, 早期关于随机共振的研究主要集中在受加性白噪声驱动的非线性系统中^[15–23]. 由于大部分非线性模型难以解析求解, 对其共振机理的分析往往难以深入, 从而使得随机共振在物理、生物、工程等领域的应用具有较大局限. 近期研究成果表明, 在乘性噪声驱动下的线性系统也会出现随机共振现象^[14,24–34]. 并且, 这类线性系统通常可以理论求解, 这便为共振机理研究的深入与随机共振应用的推广提供了有利条件.

频率涨落通常由系统外噪声引起. 关于频率涨落谐振子的动力学行为的研究, 从 Chandrasekhar^[35]的研究开始, 一直受到广泛的关注. Berdichevsky 和 Gitterman^[34]最先给出如下受双态噪声驱动的过阻尼系统的解析解并分析了该系统的随机共振现象:

$$\frac{dx(t)}{dt} = -(\omega + \xi(t))x(t) + A_0 \cos(\Omega t). \quad (1)$$

由于方程 (1) 在波动障碍穿越^[36]、酶动力学^[37]及核磁共振^[38]等化学、生物、物理多个领域存在应用, 所以关于这类模型的研究具有较高的理论和应用价值. 文献 [25, 39] 将方程 (1) 中的双态噪声改为非对称双态噪声, 对新的模型进行解析求解, 分析了模型的随机共振现象. 并且以一阶线性电路系统为例给出了该模型在新的物理场景中的应用.

以上关于随机共振的研究主要集中在非耦合系统中. 最近, 随着复杂网络的兴起, 耦合系统中随机共振的研究正受到越来越多的关注. 研究表明, 耦合系统中不仅会产生随机共振现象而且耦合关系还会丰富系统的共振行为^[19–23,28,40,41]. Pikovsky 等^[22]发现不同类型的耦合随机系统中都存在系统规模共振. Li^[28]研究发现, 在合适的参数下, 调整局部耦合系统中的耦合强度与粒子个数, 既能加强也可以削弱随机共振的强度. Yu 等^[41]在对双耦合谐振子共振行为的研究中发现, 调整耦合强度不仅可以增强随机共振, 还能改变系统的共振形式. 特别地, Yang 等^[3]将模型 (1) 推广为 N 粒子全局耦合模型, 通过理论推导及仿真分析了 N 个粒子的集体动力学行为. 但在该推广模型中, 系统中各粒子的频率涨落被建模为全同噪声. 而在实际环境中, 环境涨落在同一时刻对不同粒子的影响应该是有所差异的. 因此, 将各粒子的频率涨落建模为独立同分布的乘性噪声更能反映随机耦合系统的真实动力学行为.

鉴于上述分析, 本文研究受不同频率涨落驱动的全局耦合系统的集体动力学行为. 其中, 频率涨落建模为独立同分布的乘性对称双态噪声. 这样建模主要是基于双态噪声在理论研究和工程应用中的普适性考虑. 一方面, 双态噪声有界且形式简单易于实现, 常被应用于各种物理和生物系统中^[42–44]. 另一方面, 在极限条件下, 双态噪声可转化为高斯白噪声和白散粒噪声. 这使得双态噪声具有一定的理论研究价值^[45]. 更重要的是, 受乘性双态噪声影响的线性模型通常可以精确求解, 便于进行分析研究. 在此基础上, 本文通过随机平均法推导出系统各粒子的同步性, 并根据同步性求出系统输出幅值增益 G 的表达式及稳定的充要条件. 最后通过数值仿真分析了系统稳定、同步及随机共振等集体行为.

2 模型

本文研究受乘性双态噪声和余弦信号共同作用的 N 粒子全局耦合过阻尼系统, 该系统所满足的微分方程如下:

$$\begin{aligned} \frac{dx_i(t)}{dt} + (\omega + \xi_i(t))x_i(t) \\ = \varepsilon \sum_{n=1}^N (x_n(t) - x_i(t)) + A_0 \cos(\Omega t), \\ i = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (2)$$

其中 $x_i(t)$ 为第 i 个粒子在 t 时刻的位移, N 为系统规模, $\varepsilon \sum_{n=1}^N (x_n(t) - x_i(t))$ 为全局耦合项, $\varepsilon \geq 0$ 为耦合强度. 系统的全局耦合性体现在系统中的每个粒子都与其他粒子直接相连. $A_0 \cos(\Omega t)$ 为外部周期驱动力, $\omega \geq 0$ 表示系统的固有频率. 该频率的涨落被建模为对称双态噪声 $\xi_i(t)$. 该噪声为一个双态 Markov 过程, 在 $\pm\sigma$ 中随机取值, 其均值和相关函数分别为

$$\langle \xi_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \xi_i(t) \xi_i(s) \rangle = \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|}, \quad (3)$$

其中 σ 表示噪声幅值, λ 表示噪声相关率, $\tau_c = 1/\lambda$ 为平均等待时间.

由于噪声 $\xi_i(t)$ 随机波动, 各粒子所处的势场随机地在

$$V_{\pm}(x_i) = (\omega \pm \sigma) \frac{x_i^2}{2} \quad (4)$$

之间切换. 这类随机势场在很多类型的系统中均有

发现. 例如生物体内的 ATP-ADP 循环势场, ATP 将能量储存在化学键中, 通过水解反应, 化学键中的一些电子进入到更低的能量态. 这一过程产生了 ADP 及生物所需的能量. 反过来, ADP 又可以通过消耗一定的能量生成 ATP. 这一循环过程产生了生物系统中的 ATP-ADP 涨落势场^[46–48].

另一方面, 在液体环境中, 粒子往往表现为过阻尼运动, 即其惯性项可被忽略^[49]. 因此, 与文献^[3]类似, 模型(2)可被看作一个受到周期驱动的耦合蛋白质分子马达在液体环境下 ATP-ADP 势场中的运动模型. 文献^[28]在局部耦合情况下对这类模型的动力学行为进行了分析, 并列举了 Josephson 结构阵列^[50]、神经网络^[51]及耦合蛋白质分子马达^[52,53]作为其潜在应用场景. 另外需要指出, 若令系统规模 $N = 1$, 则模型(2)退化为文献^[34]中的单粒子运动模型; $N = 2$ 时, 模型(2)即变为我们之前文章中研究的动力学模型^[54]; 若令 $\xi_1(t) = \dots = \xi_N(t)$, 则本文的模型又可退化为之前 Yang 等^[3]研究的全局耦合模型. 因此, 从理论和应用两方面考虑, 模型(2)都具有较高的研究价值.

在本文的推导过程中将用到指数关联噪声所满足的 Shapiro-Loginov(S-L) 公式^[55]的推广版本, 为此, 先对 S-L 公式做简要介绍, 再用该公式推导出本文所需的公式版本.

定理 1 (Shapiro-Loginov 公式) $\eta(t)$ 是一个噪声. 假设如下条件成立:

$$(1) \langle \eta(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta(t) \xi(s) \rangle = \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|},$$

$$(2) \psi(t) \text{ 是指数相关噪声 } \eta(t) \text{ 的泛函,}$$

则有如下公式成立:

$$\left\langle \eta(t) \frac{d\psi(t)}{dt} \right\rangle = \frac{d\langle \eta(t) \psi(t) \rangle}{dt} + \lambda \langle \eta(t) \psi(t) \rangle. \quad (5)$$

为了对模型(2)进行求解, 以下将(5)式推广到多个相互独立指数关联噪声的情形.

定理 2 (Shapiro-Loginov 公式) $\eta_i(t), (i = 1 \dots k)$ 为 k 个相互独立的噪声. 假设如下条件成立:

$$(1) \langle \eta_i(t) \rangle = 0, \quad \langle \eta_i(t) \eta_i(s) \rangle = \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|}, \quad i = 1 \dots k,$$

$$(2) \psi(t) \text{ 是指数相关噪声 } \eta_i(t) \text{ 的泛函,}$$

则有如下公式成立:

$$\begin{aligned} & \left\langle \eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t) \frac{d\psi(t)}{dt} \right\rangle \\ &= d\langle \eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t) \psi(t) \rangle / dt \\ &+ k\lambda \langle \eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t) \psi(t) \rangle. \end{aligned} \quad (6)$$

证明 显然, $\eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t)$ 仍然是一个噪声 (即随机过程). 以下证明该噪声满足定理 1 的两个条件. 由 $\eta_i(t), (i = 1 \dots k)$ 的相互独立性及条件(1)可得:

$$\langle \eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t) \rangle = \langle \eta_1(t) \rangle \langle \eta_2(t) \rangle \dots \langle \eta_k(t) \rangle = 0, \quad (7)$$

$$\begin{aligned} & \langle \eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t) \eta_1(s) \eta_2(s) \dots \eta_k(s) \rangle \\ &= \langle \eta_1(t) \eta_1(s) \rangle \langle \eta_2(t) \eta_2(s) \rangle \dots \langle \eta_k(t) \eta_k(s) \rangle \\ &= \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|} \dots \sigma^2 e^{-\lambda|t-s|} \quad (k \text{ 个相乘}) \\ &= (\sigma^2)^k e^{-k\lambda|t-s|}. \end{aligned} \quad (8)$$

故 $\eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t)$ 仍然是一个指数关联的随机噪声. 由条件(2)可知, $\psi(t)$ 是噪声 $\eta_1(t) \eta_2(t) \dots \eta_k(t)$ 的泛函.

故由定理 1 得(6)式成立.

由(6)式直接可得:

$$\begin{aligned} \left\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} \frac{dx_i}{dt} \right\rangle &= \frac{d\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} x_i \rangle}{dt} \\ &+ k\lambda \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k} x_i \rangle, \end{aligned} \quad (9)$$

其中

$$k = |\{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}\}| \quad (10)$$

为集合 $\{\xi_{i_1}, \xi_{i_2}, \dots, \xi_{i_k}\}$ 所包含元素的个数. $1 \leq i_1, i_2, \dots, i_k \leq N$, $i_1, i_2, \dots, i_k$ 互不相等.

3 理论结果

3.1 同步性

本节主要研究上述耦合系统中各粒子行为是否具有同步性, 由于各粒子所受驱动噪声相互独立, 因而, 这里所说的同步性只能是统计意义上的同步. 为此, 设法构造包含变量 $\langle x_i \rangle, i = 1, 2, \dots, N$ 的封闭微分方程组. 用 $1, \xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}$ 分别乘以(2)式两端, 因为形如 $\xi_{i_1} \xi_{i_2} \dots \xi_{i_k}$ 这种 k 个互不相同的噪声相乘的形式的因子共有 C_N^k 个. 当 k 取遍 1 到 N , 再算上常数项因子 1, 共有 2^N 个线性无关的乘因子. 因而可以得到 $2^N N$ 个随机微分方程, 利用 S-L 公式取平均, 即得到包含 $2^N N$ 个变量的 $2^N N$ 个线性无关的非齐次常微分方程组. 未知量如表 1 所列.

3.1.1 变量分组

接下来对表 1 中的变量进行分组, 将相等的变量分到一组, 以约简变量个数. 各组变量间的等价关系会在下一步予以证明.

表 1 变量表
Table 1. Variable table.

乘因子	变量				
1	$\langle x_1 \rangle$	$\cdots$	$\langle x_i \rangle$	$\cdots$	$\langle x_N \rangle$
ξ_1	$\langle \xi_1 x_1 \rangle$	$\cdots$	$\langle \xi_1 x_i \rangle$	$\cdots$	$\langle \xi_1 x_N \rangle$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k}$	$\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_1 \rangle$	$\cdots$	$\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle$	$\cdots$	$\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_N \rangle$
$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$
$\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N$	$\langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_1 \rangle$	$\cdots$	$\langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_i \rangle$	$\cdots$	$\langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_N \rangle$

1) 由于模型 (2) 中各粒子位置对称, 表 1 中第一行中的各变量应该是两两相等的. 同理, 最后一行中的各变量也应该是两两相等的. 分别用 U_0, U_N 表示两行元素构成的集合. 即:

$$U_0 = \{\langle x_i \rangle | i = 1, 2, \cdots, N\},$$

$$U_N = \{\langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_i \rangle | i = 1, 2, \cdots, N\}. \quad (11)$$

2) 若 $k \neq l$, 则 $\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle \neq \langle \xi_{j_1} \xi_{j_2} \cdots \xi_{j_l} x_j \rangle$. 于是, 我们记

$$U_k = \{\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle | k = |\{i_1, i_2, \cdots, i_k\}|,$$

$$1 \leq i_1, i_2, \cdots, i_k \leq N$$

$$\text{且 } i_1, i_2, \cdots, i_k \text{ 互不相等}\}. \quad (12)$$

3) 对于 U_k (这里假定 $1 \leq k \leq N-1$) 中的元素 $\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle$, 若 $i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, 则表示组成该乘因子的噪声中既有直接作用于粒子 x_i 的, 也有先作用于其他粒子再通过耦合作用间接作用于粒子 x_i 的. 若 $i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, 则表示组成该乘因子的噪声都是间接作用于粒子 x_i 的. 为此将集合 U_k 分解为两个集合 U_{k1}, U_{k2} 的不交并:

$$U_{k1} = \{\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle | \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle$$

$$\in U_k \text{ 且 } i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\},$$

$$U_{k2} = \{\langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle | \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle$$

$$\in U_k \text{ 且 } i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}\}. \quad (13)$$

那么 U_{k1} 中的变量和 U_{k2} 中的变量应该是不相等 (同步) 的.

3.1.2 组内变量等价性证明

通过上述步骤, 将表 1 中的变量划分到了 $2N$ 个集合中, 并猜测各集合中的变量相等. 下面来证

明这一猜测.

1) 对于集合 U_{k1} , 从中任意选定一个元素 v_1 , 将 U_{k1} 中除 v_1 以外的元素分别与 v_1 作差, 得到一个新的集合: $V_{k1} = \{v_1 - v | v_1 \neq v \text{ 且 } v_1 \in U_{k1}, v \in U_{k1}\}$. 显然 U_{k1} 中任意两个元素的差属于 V_{k1} 或者可以表示为 V_{k1} 中两个元素的差, 且有 $|V_{k1}| + 1 = |U_{k1}|$.

2) 对剩余的 $2N-1$ 个集合进行与 1) 完全相同的操作.

得到 $2N$ 个集合 $V_0, \cdots, V_{k1}, V_{k2}, \cdots, V_N$, 这些集合的总元素个数为 $2^N N - 2N$ 个. 显然这 $2^N N - 2N$ 个元素线性无关. 下面构造一个包含这 $2^N N - 2N$ 个变量的 $2^N N - 2N$ 个线性无关的齐次常微分方程组.

对于新得到的 $2^N N - 2N$ 个变量中任意一个变量 $\langle \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_i \rangle - \langle \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_j \rangle$. 要得到包含该变量的微分方程, 只需用 $\xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k}, \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k}$ 分别乘以

$$\frac{dx_i}{dt} + (\omega + \xi_i(t))x_i$$

$$= \varepsilon \sum_{n=1}^N (x_n - x_i) + A_0 \cos(\Omega t),$$

$$\frac{dx_j}{dt} + (\omega + \xi_j(t))x_j$$

$$= \varepsilon \sum_{n=1}^N (x_n - x_j) + A_0 \cos(\Omega t), \quad (14)$$

并两端相减, 可得

1) 若 $i \notin \{m_1, m_2, \cdots, m_k\}, j \notin \{n_1, n_2, \cdots, n_k\}$, 则有

$$\xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} \frac{dx_i}{dt} - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} \frac{dx_j}{dt} + \omega(\xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_i - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_j)$$

$$+ (\xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} \xi_i x_i - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} \xi_j x_j)$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon \left(N(\xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_j - \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_i) \right. \\
&\quad + \left(\sum_{m \in \{m_1, m_2, \dots, m_k\}} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_m - \sum_{n \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_n \right) \\
&\quad + \left(\sum_{m' \notin \{m_1, m_2, \dots, m_k\}} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_{m'} - \sum_{n' \notin \{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_{n'} \right) \Bigg) \\
&\quad + A_0 \cos(\Omega t) (\xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k}). \tag{15}
\end{aligned}$$

对 (15) 式取均值并应用 S-L 公式 (9) 式得

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt} + k\lambda + \omega + N\varepsilon \right) \langle \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_i - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_j \rangle \\
&\quad + \langle \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} \xi_i x_i - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} \xi_j x_j \rangle \\
&= \varepsilon \left(\left\langle \sum_{m \in \{m_1, m_2, \dots, m_k\}} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_m - \sum_{n \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_n \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{m' \notin \{m_1, m_2, \dots, m_k\}} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_{m'} - \sum_{n' \notin \{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_{n'} \right\rangle \right). \tag{16}
\end{aligned}$$

显然 (16) 式中各均值号中的变量均可由 $\mathbf{V}_{k1}$ 等 $2N$ 个集合中的 $2^N N - 2N$ 个元素线性表示.

2) 若 $i \in \{m_1, m_2, \dots, m_k\}$, $j \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, 按照 1) 中同样的步骤可得:

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{d}{dt} + k\lambda + \omega + N\varepsilon \right) \langle \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_i - \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_j \rangle \\
&\quad + \sigma^2 \langle \xi_{\bar{m}_1} \xi_{\bar{m}_2} \cdots \xi_{\bar{m}_{k-1}} x_i - \xi_{\bar{n}_1} \xi_{\bar{n}_2} \cdots \xi_{\bar{n}_{k-1}} x_j \rangle \\
&= \varepsilon \left(\left\langle \sum_{m \in \{m_1, m_2, \dots, m_k\}} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_m - \sum_{n \in \{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_n \right\rangle \right. \\
&\quad \left. + \left\langle \sum_{m' \notin \{m_1, m_2, \dots, m_k\}} \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_{m'} - \sum_{n' \notin \{n_1, n_2, \dots, n_k\}} \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_{n'} \right\rangle \right), \tag{17}
\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}
\{\bar{m}_1, \bar{m}_2, \dots, \bar{m}_{k-1}\} &= \{m_1, m_2, \dots, m_k\} - \{i\}; \\
\{\bar{n}_1, \bar{n}_2, \dots, \bar{n}_{k-1}\} &= \{n_1, n_2, \dots, n_k\} - \{j\}. \tag{18}
\end{aligned}$$

显然 (17) 式中均值号中的变量也都可以由 $\mathbf{V}_{k1}$ 等 $2N$ 个集合中的 $2^N N - 2N$ 个元素线性表示.

(16) 式或 (17) 式即为包含变量 $\langle \xi_{m_1} \xi_{m_2} \cdots \xi_{m_k} x_i \rangle - \langle \xi_{n_1} \xi_{n_2} \cdots \xi_{n_k} x_j \rangle$ 的微分方程. 由此, 对待求的 $2^N N - 2N$ 个变量, 可以得到包含这些变量的 $2^N N - 2N$ 个线性无关的齐次常微分方程组. 由于

本文主要关注粒子在长时间范围内的解的状况, 而方程组的初始值对粒子的运动状态的影响会随着 t 的增大逐渐消失. 所以这里不妨假设该方程组初始条件为 0. 利用 Laplace 变换法可得上述方程组 ((16) 式和 (17) 式) 只有零解. 由此推导出各集合 $U_0, \dots, U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_N$ 中变量的相等关系.

3.1.3 同步性结论与意义

通过上述分析, 得到了各集合 $U_0, \dots, U_{k1}, U_{k2}, \dots, U_N$ 中变量的相等关系. 也即同步性结论

如下:

$$\begin{aligned}\langle x_i \rangle &= \langle x_j \rangle, \\ \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle &= \langle \xi_{j_1} \xi_{j_2} \cdots \xi_{j_k} x_j \rangle \\ i &\in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}, j \in \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}, \\ \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle &= \langle \xi_{j_1} \xi_{j_2} \cdots \xi_{j_k} x_j \rangle \\ i &\notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}, j \notin \{j_1, j_2, \cdots, j_k\}, \\ \langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_i \rangle &= \langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_j \rangle.\end{aligned}\quad (19)$$

上述同步性结论具有以下两条重要意义.

1) 从同步性 (19) 式可以看出

$$\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \cdots = \langle x_N \rangle. \quad (20)$$

又因为系统的平均场

$$S(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i(t), \quad (21)$$

从而, 由 (20) 式可知

$$\langle S \rangle = \langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \cdots = \langle x_N \rangle. \quad (22)$$

对复杂耦合系统集体动力学行为的研究往往围绕其平均场行为展开, (22) 式表明: 在本模型中, 系统的平均场行为与单粒子行为具有统计一致性, 从而, 本文可通过研究单粒子的动力学行为来开展对系统集体动力学行为的研究.

2) 为研究单粒子的动力学行为, 需对其一阶矩 $\langle x_i \rangle$ 进行求解. 同步性 (19) 式的另一个重要意义在于: 可极大地简化模型的求解过程, 使对 $\langle x_i \rangle$ 的解析求解成为可能. 在下一节的分析中, 将利用该同步性 ((19) 式) 完成对 $\langle x_i \rangle$ 和相应输出幅值增益 G 的具体解析求解.

3.2 输出幅值增益

本节利用 3.1 节所得结果推导一阶矩 $\langle x_i \rangle$ 及系统的输出幅值增益 G 的表达式. 首先将可能出现的变量用新的符号表示如下:

$$\begin{aligned}y_0 &= \langle x_i \rangle, \\ y_{k,1} &= \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle \quad i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}, \\ y_{k,2} &= \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle \quad i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}, \\ y_N &= \langle \xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N x_i \rangle,\end{aligned}\quad (23)$$

其中 $1 \leq i \leq N$, $1 \leq k \leq N-1$.

对 (2) 式中第 i 个式子两边取平均, 并利用同步性得到含有变量 y_0 的方程如下:

$$\left(\frac{d}{dt} + \omega \right) y_0 + y_{1,1} = A_0 \cos(\Omega t). \quad (24)$$

(24) 式出现了新的耦合项 $y_{1,1}$, 为了建立包含该变量的微分方程, 用 $\xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k}$ 乘以第 i 个式子两边. 这里 $i \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$, 则有

$$\begin{aligned}& \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} \frac{dx_i}{dt} + \omega \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \\ & + \sigma^2 \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_{k-1}} x_i \\ & = \varepsilon \left(\sum_{n=1}^N \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_n - N \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \right) \\ & + A_0 \cos(\Omega t) \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k}.\end{aligned}\quad (25)$$

对 (25) 式两边取平均并利用 S-L 公式 (9) 式得

$$\begin{aligned}& \left(\frac{d}{dt} + k\lambda + \omega \right) y_{k,1} + \sigma^2 y_{k-1,2} \\ & = \varepsilon \left(\sum_{n \in \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}} \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_n \rangle \right. \\ & \quad + \sum_{n \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}} \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_n \rangle \\ & \quad \left. - N \langle \xi_{i_1} \xi_{i_2} \cdots \xi_{i_k} x_i \rangle \right) \\ & = \varepsilon [k y_{k,1} + (N-k) y_{k,2} - N y_{k,1}] \\ & = \varepsilon (N-k) (y_{k,2} - y_{k,1}).\end{aligned}\quad (26)$$

对 (26) 进行整理得

$$\begin{aligned}& \left[\frac{d}{dt} + k\lambda + \omega + (N-k)\varepsilon \right] y_{k,1} \\ & - (N-k)\varepsilon y_{k,2} + \sigma^2 y_{k-1,2} = 0.\end{aligned}\quad (27)$$

由于 (27) 式中又出现了新的变量 $y_{k,2}$. 同理, 当 $i \notin \{i_1, i_2, \cdots, i_k\}$ 时, 按照同样的步骤, 可得如下包含变量 $y_{k,2}$ 的微分方程式:

$$\left(\frac{d}{dt} + k\lambda + \omega + k\varepsilon \right) y_{k,2} - k\varepsilon y_{k,1} + y_{k+1,1} = 0. \quad (28)$$

最后, 用 $\xi_1 \xi_2 \cdots \xi_N$ 乘以 (2) 式中第 i 个式子两边, 计算可得包含变量 y_N 的微分方程式:

$$\left(\frac{d}{dt} + N\lambda + \omega \right) y_N + \sigma^2 y_{N-1,2} = 0. \quad (29)$$

所得的 $2N$ 个式子 ((24) 式, (27) 式, (28) 式, (29) 式) 可改写成如下矩阵形式:

$$\frac{d\mathbf{Y}}{dt} + \mathbf{A}\mathbf{Y} = \mathbf{F}, \quad (30)$$

其中,

$$\mathbf{Y} = (y_0 \quad y_{1,1} \quad y_{1,2} \quad \cdots \quad y_{k,1} \quad y_{k,2} \quad \cdots \quad y_N)^T, \quad (31)$$

其中 T 表示矩阵的转置.

$$\mathbf{F} = (A_0 \cos(\Omega t) \quad 0 \quad \cdots \quad 0)^T, \quad (32)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a_1 & c_1 & & & \\ b_2 & a_2 & c_2 & & \\ & b_3 & a_3 & c_3 & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & & b_{2N-1} & a_{2N-1} & c_{2N-1} \\ & & & & b_{2N} & a_{2N} \end{pmatrix}, \quad (33)$$

$\mathbf{A}$ 为三对角矩阵, 即除了三条对角线上的元素外其余元素都为零.

$$\begin{aligned} a_1 &= \omega, a_{2N} = N\lambda + \omega, \\ a_{2k} &= k\lambda + \omega + (N-k)\varepsilon, \\ a_{2k+1} &= k\lambda + \omega + k\varepsilon, \quad 1 \leq k \leq N-1, \\ b_{2k} &= \sigma^2, b_{2k+1} = -k\varepsilon, b_{2N} = \sigma^2, \\ c_1 &= 1, c_{2k} = -(N-k)\varepsilon, c_{2k+1} = 1. \end{aligned} \quad (34)$$

对 (30) 式作 Laplace 变换, 有

$$(s\mathbf{I} + \mathbf{A})\tilde{\mathbf{Y}} = \tilde{\mathbf{F}}, \quad (35)$$

其中 $\tilde{\mathbf{Y}}, \tilde{\mathbf{F}}$ 为对向量 $\mathbf{Y}, \mathbf{F}$ 中的各元素分别作 Laplace 变换所得的向量:

$$\tilde{\mathbf{Y}} = (Y_0 \quad Y_{1,1} \quad Y_{1,2} \quad \cdots \quad Y_{k,1} \quad Y_{k,2} \quad \cdots \quad Y_N)^T,$$

$$Y_{k,i}(s) = L(y_{k,i}) = \int_0^\infty y_{k,i} e^{-st} dt,$$

$$1 \leq k \leq N-1, i = 1, 2,$$

$$Y_0(s) = L(y_0) = \int_0^\infty y_0 e^{-st} dt,$$

$$Y_N(s) = L(y_N) = \int_0^\infty y_N e^{-st} dt,$$

$$\tilde{\mathbf{F}} = \left(A_0 \frac{s^2}{s^2 + \Omega^2} \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \right)^T. \quad (36)$$

不妨记 $\tilde{\mathbf{A}} = (s\mathbf{I} + \mathbf{A})$. 通过求解线性方程组 (35), 可以求得向量 $\tilde{\mathbf{Y}}$. 特别地, 有

$$Y_0(s) = H_0(s) A_0 \frac{s^2}{s^2 + \Omega^2}, \quad (37)$$

其中

$$H_0(s) = \frac{\tilde{A}_{11}}{|\tilde{\mathbf{A}}|}, \quad (38)$$

这里 $|\tilde{\mathbf{A}}|$ 表示方阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 的行列式, $\tilde{A}_{11}$ 表示方阵 $\tilde{\mathbf{A}}$ 第一行第一列的代数余子式. 对 (37) 式作 Laplace 逆变换, 得到如下 $\langle x_i \rangle$ 的解析表达式:

$$\langle x_i \rangle = A_0 \int_0^t h_0(t-\tau) \cos(\Omega\tau) d\tau, \quad (39)$$

其中 $h_0(t)$ 为 $H_0(s)$ 的 Laplace 逆变换.

另一方面, 系统 ((24) 式, (27) 式, (28) 式, (29) 式) 可看作一个线性时不变系统. 根据线性时不变系统的响应理论, 该系统的输出信号是一个与输入信号仅在幅值和相位上有差异的余弦信号. 即

$$\langle x_i \rangle = A \cos(\Omega t + \phi), \quad (40)$$

其中 A 和 ϕ 分别为 $\langle x_i \rangle$ 的振幅和相位. 将 (40) 式作 Laplace 变换并对比 (37) 式可得

$$A = A_0 |H_0(j\Omega)|, \quad \phi = \arg [H_0(j\Omega)]. \quad (41)$$

最后求得输出振幅增益为

$$G = \frac{A}{A_0} = |H_0(j\Omega)|. \quad (42)$$

根据 (42) 式, 通过数值仿真分析不同的系统参数变化对 G 的影响, 可以判断系统有无随机共振现象产生. 在此之前, 首先对系统 (2) 的稳定性做一些简要分析.

3.3 系统稳定性

系统 (2) 稳定等价于特征方程

$$f(s) = |s\mathbf{I} + \mathbf{A}| \quad (43)$$

的根都分布在左半复平面, 即矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征值都分布在右半复平面. 在此基础上, 本节建立了系统 (2) 稳定的一个充分条件和一个充要条件.

定理 3 (充分条件) 当 $\sigma^2 < \omega(\omega + \lambda)$ 时, 系统 (2) 是稳定的.

证明 1) 首先当 $\sigma = 0$ 时, 由同步性 (20) 式可知, 系统 (2) 为含一个变量的常微分方程, 又由于 $\omega > 0$, 系统显然是稳定的.

2) 当 $\sigma > 0$ 时, 证明矩阵 $\mathbf{A}$ 的所有特征值都为正实数. 以此推出系统 (2) 的稳定性.

(i) 先对 $\varepsilon > 0$ 的情况予以证明. 此时, 有 $b_{i+1}c_i > 0, 1 \leq i \leq N-1$. 故 $\mathbf{A}$ 相似于如下实对称三对角矩阵 [56]:

$$S = \begin{pmatrix} a_1 & \sqrt{b_2 c_1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \sqrt{b_2 c_1} & a_2 & \sqrt{b_3 c_2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{b_3 c_2} & a_3 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ & & \cdots & \cdots & \cdots & & \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \sqrt{b_{2N-1} c_{2N-2}} & a_{2N-1} & \sqrt{b_{2N} c_{2N-1}} \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \sqrt{b_{2N} c_{2N-1}} & a_{2N} \end{pmatrix}, \quad (44)$$

A 与 S 有相同的特征值且都为实数. 下面证明当定理条件满足时, S 为正定矩阵.

令 $S = S_1 + S_2$. 其中 S_1 为 $\varepsilon = 0$ 时 S 退化得到的矩阵. $S_2 = S - S_1$. 显然 S_1, S_2 都是分块对角矩阵. 其中 S_1 的每个分块是如下形式的二阶方阵:

$$\begin{pmatrix} k\lambda + \omega & \sigma \\ \sigma & (k+1)\lambda + \omega \end{pmatrix}, \quad (45)$$

其中 $0 \leq k \leq N-1$. S_2 的每个分块为零矩阵或如下形式的二阶方阵:

$$\begin{pmatrix} (N-k)\varepsilon & \sqrt{(N-k)k\varepsilon} \\ \sqrt{(N-k)k\varepsilon} & k\varepsilon \end{pmatrix}, \quad (46)$$

其中 $1 \leq k \leq N-1$. 显然, S_1, S_2 都为实对称矩阵. 易证 S_2 半正定. 以下证明定理条件满足时, S_1 正定. 因为分块矩阵各个分块的特征值的并集即为该分块矩阵的全部特征值. 故要让 S_1 正定只需 S_1 每个分块的特征值为正即可. 易得, 这只需要

$$\sigma^2 \leq \min_{0 \leq k \leq N-1} \{(k\lambda + \omega)[(k+1)\lambda + \omega]\} = \omega(\omega + \lambda). \quad (47)$$

(ii) 当 $\varepsilon = 0$ 时, 矩阵 A 退化为分块对角矩阵. 用与 (i) 中同样的步骤证明即可.

下面, 为给出系统 (2) 稳定的充要条件, 将特征方程 (43) 式看成是关于 σ^2 和 s 的函数来展开分析, 从而将其改记为 $f(\sigma^2, s)$. 特别地, 若将 σ^2 看成参数, 则 $f(\sigma^2, s)$ 是关于变量 s 的 $2N$ 次多项式.

定理 4 (充要条件) 系统 (2) 稳定当且仅当

$$\sigma^2 < \sigma_{\min}^2, \quad (48)$$

其中 $\sigma_{\min}^2$ 为 $f(\sigma^2, 0) = 0$ 的最小正根.

证明 因为矩阵 A 相似于实对称矩阵 (定理 3), 故对任意固定的 σ^2 , $f(\sigma^2, s) = 0$ 有 $2N$ 个实根. 将这 $2N$ 个实根从大到小排列为

$$s_1(\sigma^2) \geq s_2(\sigma^2) \geq \cdots \geq s_{2N}(\sigma^2). \quad (49)$$

则 $s_i(\sigma^2)$ ($1 \leq i \leq 2N$) 为 σ^2 的连续函数^[57]. 显然, 系统 (2) 稳定等价于 $s_1(\sigma^2) < 0$. 故由定理 3 知, 当

$0 < \sigma^2 < \omega(\omega + \lambda)$ 时, $s_1(\sigma^2) < 0$. 另一方面, 随着 σ 的增加, 系统势函数的不稳定性逐渐增强; 从而, 当 σ 充分大时, 系统必然是不稳定的, 此时 $s_1(\sigma^2) > 0$. 所以根据 $s_1(\sigma^2)$ 的连续性可知, 存在 $\sigma > 0$, 使得 $s_1(\sigma^2) = 0$. 记

$$\sigma_{\min} = \min\{\sigma | s_1(\sigma^2) = 0, \sigma > 0\}. \quad (50)$$

从而, 系统 (2) 稳定当且仅当 $\sigma^2 < \sigma_{\min}^2$.

由于本文只关心系统稳定时的各种动力学行为, 所以后续对同步行为与随机共振行为的分析都是在稳定性条件 (48) 式成立的前提下进行的.

4 数值仿真算法

本节利用随机 Taylor 展开算法对模型 (2) 进行数值模拟, 以此验证算法的有效性. 对于充分小的时间步长 Δt , 模型 (2) 在离散时间下的近似表达式为

$$\begin{aligned} x_i(t_n) &= x_i(t_{n-1}) + f_i(t_{n-1})\Delta t \\ &\quad - x_i(t_{n-1})\Delta X_i(t_{n-1}), \\ i &= 1, \dots, N, \end{aligned} \quad (51)$$

其中

$$\begin{aligned} f_i(t_{n-1}) &= -\omega x_i(t_{n-1}) + \varepsilon \sum_{j=1}^N (x_j(t_{n-1}) - x_i(t_{n-1})) \\ &\quad + A_0 \cos(\Omega t_{n-1}), \\ \Delta X_i(t_{n-1}) &= \int_{t_{n-1}}^{t_n} \xi_i(u) du, \end{aligned} \quad (52)$$

其中, $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ 为时间步长, ΔX_i 为单个时间步长内双态噪声的增量, 可通过文献 [58] 中的方法仿真求得.

为了验证仿真算法的有效性, 需要将仿真结果与理论结果进行对比. 首先, 进行 K 次 Monte Carlo 实验并记第 i 个粒子第 k 次 Monte Carlo 实验的轨迹为 $x_i^k(t)$. 则可得到第 i 个粒子位移一阶矩 $\langle x_i(t) \rangle$

的数值近似为

$$\langle x_i(t) \rangle_{\text{num}} = \frac{1}{K} \sum_{k=1}^K x_i^k(t). \quad (53)$$

之后, 根据 (40) 式可知, 输出信号 $\langle x_i(t) \rangle$ 为与输入信号 $A_0 \cos(\Omega t)$ 有相同频率的余弦信号. 所以对 $\langle x_i(t) \rangle_{\text{num}}$ 作 Fourier 变换即可得到 $\langle x_i(t) \rangle$ 的仿真幅值 A_{num} . 最后利用 (42) 式即得输出幅值增益的数值仿真结果 G_{num} . 图 1 给出了仿真算法的一个具体的例子. 其中, 图 1 的第一排子图为 10 个粒子进行 10^4 次 Monte Carlo 仿真所得平均位移, 各粒子的初始位移服从标准正态分布. 对该平均位移作 Fourier 变换得到第二排子图对应的频域值. 由此得到在该组参数下输出幅值增益的数值仿真结果 $G_{\text{num}} = 1.11708$ 与理论值 $G = 1.11677$ 的相对误差仅为 2.78×10^{-4} .

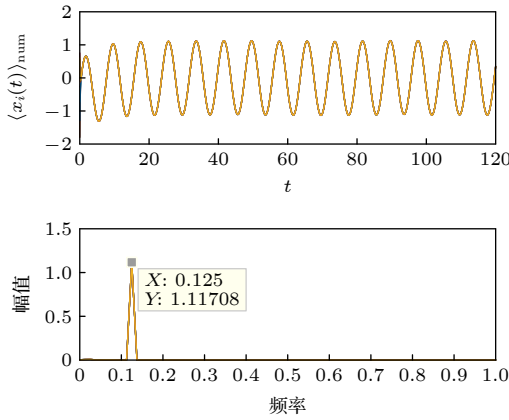


图 1 粒子平均位移及对应频域值的数值仿真结果, 其中 $\varepsilon = 1$, $A_0 = 1$, $\sigma = 1.3$, $N = 10$, $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $\Omega = \pi/4$, $\Delta t = 10^{-3}$, $K = 10^4$, $T = 120$

Fig. 1. The average realization and the corresponding frequency domain representation with $\varepsilon = 1$, $A_0 = 1$, $\sigma = 1.3$, $N = 10$, $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $\Omega = \pi/4$, $\Delta t = 10^{-3}$, $K = 10^4$, $T = 120$.

以下分别讨论时间步长 Δt 、Monte Carlo 仿真次数 K 和总仿真时长 T 对数值算法收敛性的影响. 图 2(a)—图 2(c) 分别描绘了 G_{num} 作为上述三个仿真参数的函数的曲线图. 可以看出, 随着仿真 Δt 的减小及 K 和 T 的增加, 仿真结果逐渐趋近于理论结果. 且当 $\Delta t \leq 0.001$, $K \geq 10000$, $T \geq 120$ 时, 仿真结果与理论结果的误差小于 6×10^{-4} , 对应的相对误差仅为 5.372×10^{-4} . 因此, 若不特别指出, 本文数值仿真结果都为固定参数 $\Delta t = 0.001$, $K = 10000$, $T = 120$ 下仿真求得.

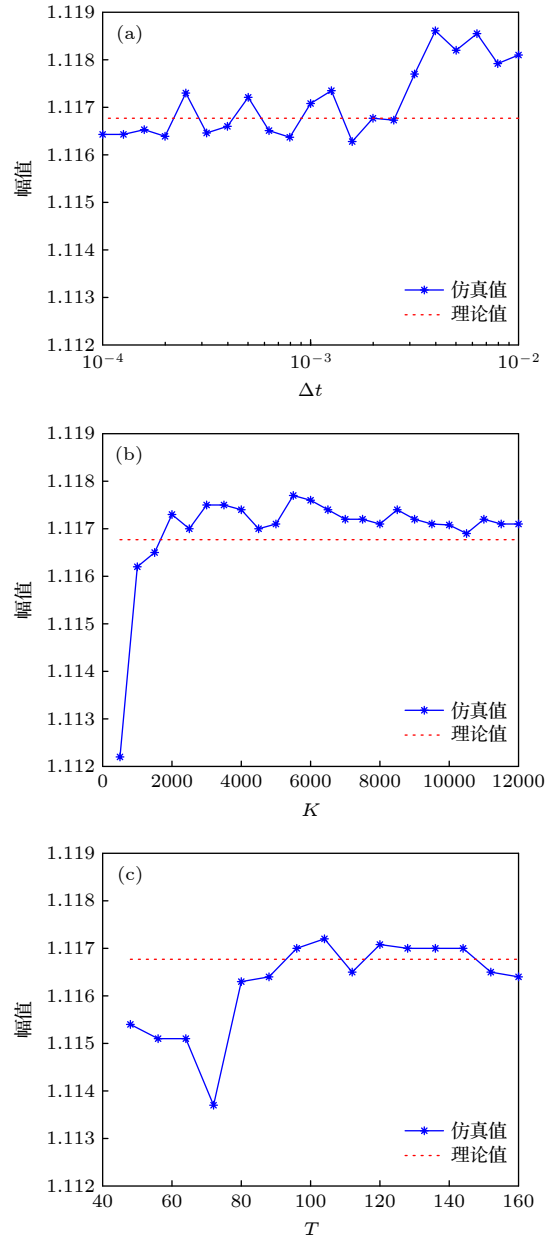


图 2 仿真结果与理论结果对比图, 其中 $\Omega = \pi/4$, $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$, $A_0 = 1$, $\sigma = 2$: (a) $K = 10000$, $T = 120$; (b) $\Delta t = 0.001$, $T = 120$; (c) $K = 10000$, $\Delta t = 0.001$

Fig. 2. Comparison of theoretical and simulation results with $\Omega = \pi/4$, $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $\varepsilon = 1$, $A_0 = 1$, $\sigma = 2$: (a) $K = 10000$, $T = 120$; (b) $\Delta t = 0.001$, $T = 120$; (c) $K = 10000$, $\Delta t = 0.001$.

5 集体动力学行为分析

5.1 系统稳定性

在 3.3 节中, 推导得出了粒子位移一阶矩稳定的充要条件. 这里进一步通过仿真分析稳定性区域随参数的变化及其对粒子运动行为的影响. 图 3(a) 给出了不同的 N 所对应的系统稳定性区域图像.

其中黑色区域为 $N = 2$ 所对应的稳定性区域; 黑色区域与深灰色区域的并为 $N = 5$ 所对应的系统稳定性区域; 黑色区域, 深灰色区域与浅灰色区域的并集则为 $N = 10$ 时的稳定性区域. 从中可以看出, 系统的稳定性区域随耦合强度 ε 及系统规模 N 的增加而增大. 为了更直观地反映系统稳定性区域随 N 的变化, 图 3(b) 给出了在一组固定的参数下, 系统稳定性区域边界随 N 的变化曲线. 可以看出, 稳定性区域随着 N 的增大单调递增. 关于图 3 中现象的一个合理的物理解释为: 粒子规模 N 及耦合强度 ε 决定粒子间的耦合力 F_i , 而耦合力为系统输出提供有序性. 噪声为粒子位移引入无序性, 且噪声幅值 σ 越大, 粒子位移的无序性越强. 有序性和无序性相互竞争决定系统输出的稳定性. 当 $\sigma \in [0, \sigma_{\min})$ 时, 耦合力提供的有序性占主导地位. 当 $\sigma = \sigma_{\min}$ 时, 有序与无序的竞争达到一个临界点, 使得初值的影响不会随时间增加而消失. 系统输出开始变得不稳定. 当 $\sigma > \sigma_{\min}$ 时, 噪声引入的无序

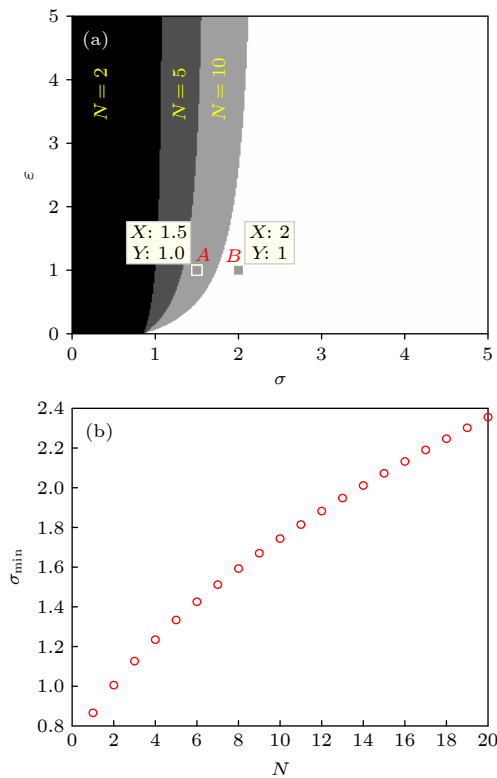


图 3 (a) 不同的 N 所对应的系统稳定性区域, 其中 $\omega = 0.5, \lambda = 1$; (b) 系统稳定性区域边界随 N 的变化曲线, 其中 $\varepsilon = 1$, 其他参数同图 (a)

Fig. 3. (a) System stability region corresponding to different N with $\omega = 0.5, \lambda = 1$; (b) curve of the boundary of the system stability region with N with $\varepsilon = 1$, other parameters are the same as panel (a).

性占主导地位, 系统输出无界. 由于增加 N 及 ε 可以增加耦合力 F_i , 使得系统输出的有序性增强. 此时就需要更大的 σ 才能使得系统输出达到稳定性的临界点. 所以, 系统的稳定性区域会随着粒子规模 N 及耦合强度 ε 的增加而增大.

为了直观反应稳定性区域对粒子平均位移的影响. 不失一般性, 这里固定 $N = 10$ 并从图 3(a) 中选择 $A(1.5, 1)$, $B(2, 1)$ 两点进行仿真实验. 结果如图 4 所示. 从图 4(a) 可以看出, 粒子平均位移有界, 此时系统是稳定的. 图 4(b) 中的系统输出随着时间的增大向无穷远发散, 此时系统是不稳定的. 这与定理 4 的结论相符.

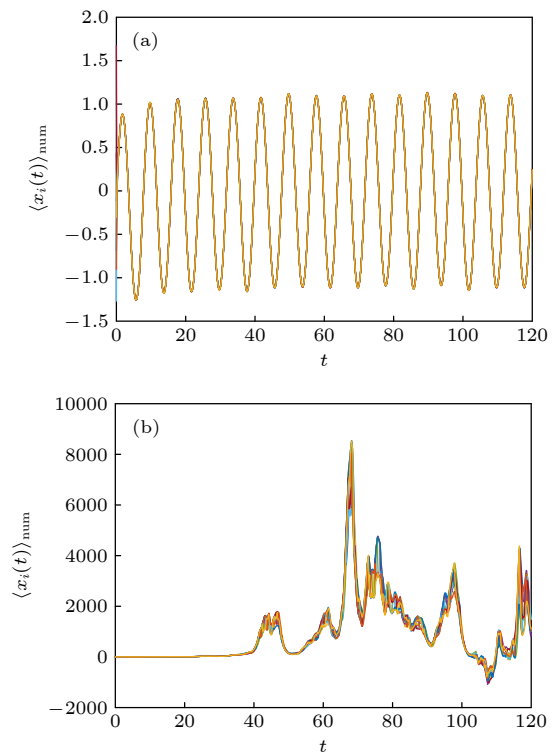


图 4 粒子平均位移实现, 其中 $\omega = 0.5, \lambda = 1, \Omega = \pi/4, \varepsilon = 1, A_0 = 1, N = 10$ (a) $\sigma = 1.5$ (b) $\sigma = 2$

Fig. 4. The average displacements of particles with $\omega = 0.5, \lambda = 1, \Omega = \pi/4, \varepsilon = 1, A_0 = 1, N = 10$: (a) $\sigma = 1.5$; (b) $\sigma = 2$.

由于本文只关心系统稳定时的各种动力学行为, 所以以下两节的仿真都是在稳定性条件成立的前提下进行的.

5.2 粒子的集体同步行为

本节通过数值仿真对 3.1 节中的结论 (20) 式予以验证. 即随着系统时间的演化, N 个粒子的平

均位移会达到同步状态.

图 5 给出了系统 (2) 在不同参数条件下不同粒子平均位移的仿真结果和对应的方差, 其中各粒子的初始位置服从标准正态分布. 从图 5(a)—图 5(c) 的第一行子图中可以看出, 具有不同初始值的粒子随着时间的增加最终都会达到同步状态. 这与 3.1 节中的结论相符, 即方程组 (16) 式, (17) 式的初值条件不改变长时间后系统中粒子的同步状态. 为直观反映粒子的同步速度, 引入粒子平均位移 $\langle x_i(t) \rangle_{\text{num}}$ 的方差 $\Delta(t)$ 如下:

$$\Delta(t) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (\langle x_i(t) \rangle_{\text{num}} - \langle \bar{x}(t) \rangle_{\text{num}})^2, \quad (54)$$

其中

$$\langle \bar{x}(t) \rangle_{\text{num}} = \frac{1}{NK} \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^N x_i^k(t). \quad (55)$$

图 5(a)—图 5(c) 的第二行子图给出了方差随时间变化的曲线图. 从中可直观地看出, 图 5(a) 中曲线的下降速度慢于图 5(b) 和图 5(c). 且当 $t = 1$ 时, 三幅图对应的方差 Δ 分别是 4.21×10^{-3} , 9.2×10^{-7} , 1.2×10^{-7} . 下面通过定义同步时间 t_0 , 对不同参数下系统 (2) 的同步速度进行定量描述. 由于系统 (2) 中各噪声 ξ_i 独立同分布, 且实验仿真次数有限, 所以 Δ 随着时间增加不会降为零. 因此, 这里假设 $\Delta(t) \leq 10^{-5}$ 时, 即认为系统达到同步状态, 并记相应的同步时间为:

$$t_0 = \max\{t | \Delta(t) \leq 10^{-5}\}. \quad (56)$$

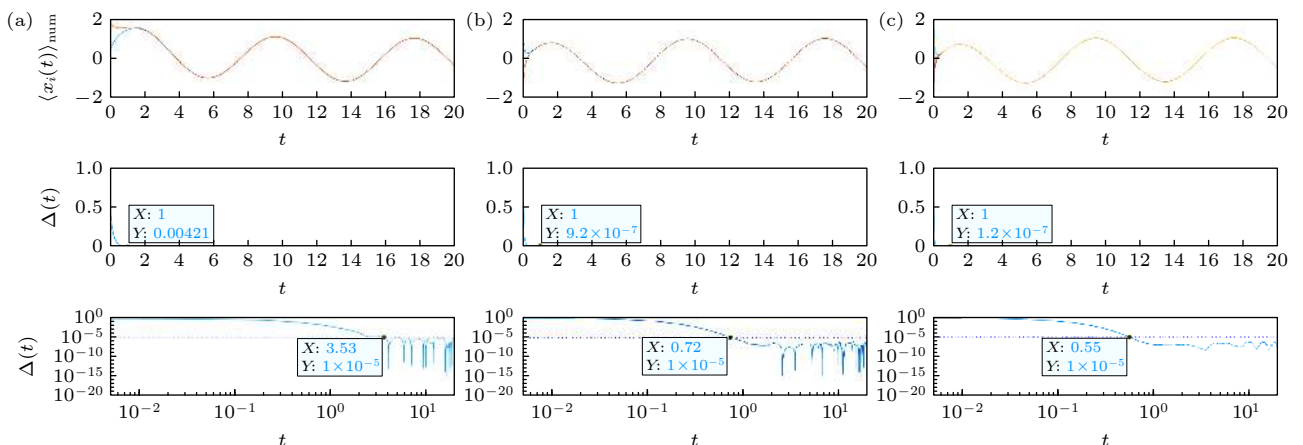


图 5 系统 (2) 在不同参数条件下的仿真实现和所对应的方差, 其中 $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $\sigma = 0.7$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$ (a) $\varepsilon = 1$, $N = 2$; (b) $\varepsilon = 4$, $N = 2$; (c) $\varepsilon = 1$, $N = 10$. 三幅子图的顶部图中不同颜色的实线代表不同粒子的平均位移

Fig. 5. The realization of the system (2) under different parameter conditions and the corresponding variance with $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $\sigma = 0.7$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$: (a) $\varepsilon = 1$, $N = 2$; (b) $\varepsilon = 4$, $N = 2$; (c) $\varepsilon = 1$, $N = 10$. The solid lines in different colors in the first panel of the three subfigure represent the average displacement of different particles.

将图 5(a)—图 5(c) 第二行子图中各方差曲线图横纵坐标以对数形式表示得到第三行子图. 三幅子图中系统达到同步的时间分别是 3.53, 0.72, 0.55. 对比三幅图中的同步时间可知, 增加耦合强度 ε 和系统规模 N 可显著加快粒子的同步速度. 这是由于一方面增加耦合强度 ε 使得粒子间的耦合力

$$F_i(t) = \varepsilon \sum_{n=1}^N (x_n(t) - x_i(t)), \quad i = 1, 2, \dots, N$$

加大, 而耦合力的作用是使得各粒子相互吸引, 这使得系统可以更快同步. 另一方面由于系统中的耦合关系为全局耦合, 增加 N 也会加大粒子间的吸引力, 从而让各粒子更快达到同步状态. 另外, 从图 6 也可以定量地看出, 随着 N 的增加, 系统的同步时间 t_0 逐渐变小.

最后需要指出, 耦合强度只改变系统的同步时间而不改变系统达到稳定时的同步状态. 这是由于系统中各粒子的位移主要受周期外力、粒子所处势场、各粒子的初始位置以及粒子间的耦合力四个因素影响. 这四个因素中, 决定粒子同步的本质因素为周期外力和粒子所处势场. 一方面, 各粒子受相同的周期外力作用; 另一方面, 各粒子有相同的本征频率, 频率噪声有相同的统计性质, 这使得各粒子所处的势场从统计意义看是相同的. 所以一段时间后, 系统初值对各粒子位移的影响消失. 耦合强度的存在只是加速了粒子的同步速度, 当 $\varepsilon = 0$ 时各粒子所满足的运动学方程相同, 此时各粒子仍然会同步. 故耦合强度不改变系统的同步性.

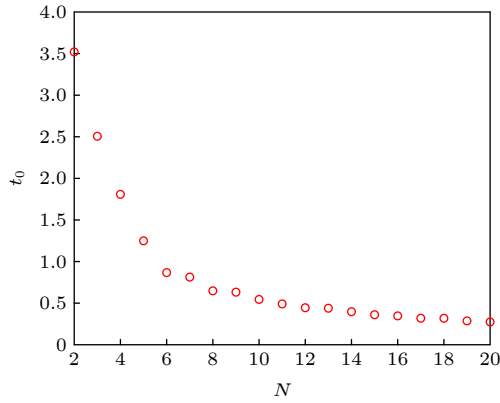


图 6 同步时间 t_0 随群体规模 N 的变化曲线, 所选系统参数与图 5 相同

Fig. 6. The change curve of synchronization time t_0 with system size N . The selected system parameters are the same as the Fig. 5.

5.3 随机共振

随机共振现象是噪声的随机性与驱动力的有序性在非线性作用下相互协作的结果. 在本文的模型中, 随机性由噪声提供, 有序性由正弦驱动力和耦合作用力两部分组成. 由于正弦驱动力的作用在以往的文献中已展开过大量充分的讨论, 因而本文主要分析噪声与耦合力的协作现象. 它们相互协作产生随机共振的机理如下: 噪声 $\xi_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为系统提供随机性, 噪声幅值 σ 越大, 则随机性越强; 耦合力 $F_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 为系统提供有序性, 耦合强度 ε 或系统规模 N 越大, 则有序性越强. 在“乘性”这种非线性作用方式下, 有序与无序相互竞争, 当两者间达到某种最优匹配时, 系统产生随机共振, 从而使得系统输出达到最大.

在上述共振机理的指导下, 接下来通过数值分析的方式, 逐一对输出幅值增益 G 关于耦合强度 ε 、系统规模 N 以及噪声幅值 σ 的共振行为进行具体分析.

5.3.1 关于耦合强度 ε 的参数随机共振

图 7(a) 和图 7(b) 分别给出了不同的 σ, N 下, G 随 ε 的变化曲线. 可以看出, 除了 $\sigma = 0$ 外, 其他曲线都有不同强度的共振峰. 且共振峰主要出现在低耦合区域. 随着耦合强度 ε 的增大, 每条曲线都趋于一个定值. 这是因为当参数 σ, N 固定时, 系统输出有序性主要由 ε 确定. 且系统输出有序性随 ε 增加而增强. 当 ε 过小时, 过弱的耦合力不能有效协调粒子的运动. 当 ε 过大时, 过强的耦合力会使

粒子相互吸引组成一个整体而完全抑制噪声带来的随机性的影响. 两种情况都限制了噪声与输入信号的协作效应. 因此, 使得输出幅值增益 G 最大的 ε 一定是介于两者之间的.

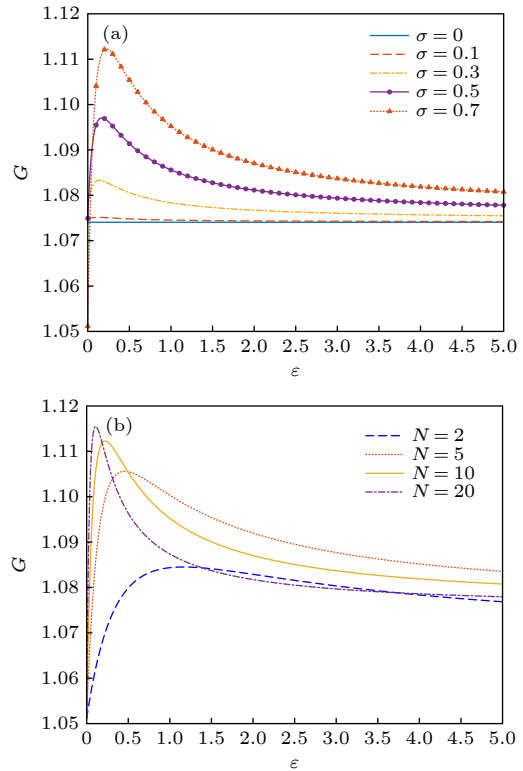


图 7 不同的 σ, N 下 $G(\varepsilon)$ 的变化曲线, 其中 $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$ (a) $N = 10$; (b) $\sigma = 0.7$

Fig. 7. The curve of $G(\varepsilon)$ under different σ and N with $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$: (a) $N = 10$; (b) $\sigma = 0.7$.

图 7(a) 中, 当 $\sigma = 0$ 时, G 取常值. 这是由于当 $\sigma = 0$ 时, 噪声消失. 此时模型 (2) 退化为确定性模型, 统计意义下的同步 $\langle x_1 \rangle = \langle x_2 \rangle = \dots = \langle x_N \rangle$ 变为 $x_1 = x_2 = \dots = x_N$. 耦合力 $F_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 使各粒子相互吸引组成一个整体, 之后变为零. 因此, ε 对 G 不产生影响. 另一方面, 将 $\sigma = 0$ 代入 (42) 式直接计算可得:

$$G = \left| \frac{1}{j\Omega + \omega} \right|. \quad (57)$$

当 $\sigma \geq 0$ 时, 共振峰的高度随着 σ 的增大而增大. 这说明增加噪声幅值 σ 可加大随机共振的强度.

图 7(b) 中, 随着系统规模 N 的增加, 共振峰变得越来越尖锐, 同时共振峰的位置左移, 共振峰的高度不断增加. 产生这种现象的原因如下: 由于系统中的耦合关系为全局耦合, 增加 N 会加大粒

子间的吸引力, 所以当 N 较大时, 随着 ε 的增加, 粒子间的吸引力增大得更快. 因此 G 随 ε 的变化曲线也更陡. 同样地, 更强的耦合力进一步抑制了噪声带来的随机性, 使得 G 不能达到最优. 所以当噪声幅值 σ 固定时, 增加 N 会使得共振峰左移. 另外注意到, 图 7(b) 中所有曲线都有共同的起点. 这是由于当粒子间的耦合作用消失时 ($\varepsilon = 0$), 模型 (2) 变为 N 个彼此独立且相同的系统. 此时, 改变系统规模 N 并不改变系统中各粒子的受力状况. 因此 N 的变化不影响 G . 同样地, 将 $\varepsilon = 0$ 代入 (42) 式可得:

$$G = \left| \frac{j\Omega + \omega + \lambda}{(j\Omega + \omega)(j\Omega + \omega + \lambda) - \sigma^2} \right|. \quad (58)$$

所以, 从 (58) 式也可得出上述结论.

5.3.2 关于系统规模 N 的参数随机共振

图 8(a) 和图 8(b) 分别给出了不同的 σ , ε 下, G 随 N 的变化曲线. 可以看出, 除了 $\sigma = 0, \varepsilon = 0$ 外, 其他曲线都有不同强度的单峰共振. 这表明在合适的参数下, 存在最优的系统规模 N 使得输出幅值增益 G 达到最优. 这里系统中有序与无序竞争关系的变化主要由系统规模 N 的变化引起. 在给定参数 ε , σ 的条件下, 系统规模 N 的增加使粒子间的耦合力 $F_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 变大, 进而使得系统输出有序逐渐增大. 当系统规模 N 较小时, 过弱的耦合力不能有效协调粒子的运动, 即噪声引入的随机性过大. 当系统规模 N 较大时, 过强的耦合力会完全抑制噪声带来的随机性的影响, 使系统 (2) 近似于确定性系统. 这两种极端情况都会限制粒子的平均运动. 因此, 使得输出幅值增益 G 最大的 N 一定是介于两者之间的.

图 8(a) 中, 当 $\varepsilon = 0$ 时, G 取常值. 当 $\varepsilon > 0$ 时, 随着耦合强度 ε 的增加, 使共振曲线趋于稳定值的 N 减小. 这与图 7(b) 中的结论一致. 另外还可以看出, 随着 ε 的增加, 共振曲线下移. 这表明增加耦合强度 ε 会减弱系统关于 N 的参数随机共振强度.

图 8(b) 中, 当 $\sigma = 0$ 时, G 取常值. 这是由于此时模型 (2) 退化为确定性模型, 而耦合力 $F_i (i = 1, 2, \dots, N)$ 使各粒子相互吸引组成一个整体, 之后变为零. 此时, 不论粒子个数多少, 系统中的各粒子都只受周期外力 $A_0 \cos(\Omega t)$ 的作用. 所以改变系统规模 N 不影响输出幅值增益. 该结论也与 (57) 式一致. 当 $\sigma > 0$ 时, 随着 σ 的增加, 共振峰右移, 共

振强度加大. 这是由于更大的 σ 会使粒子的运动轨迹产生更强的随机性, 过强的随机性又会抑制系统的输出. 这种情况下, 要使系统达到最优输出就需要加强粒子间的吸引力使粒子运动轨迹更加有序. 所以当 σ 增加时, 使系统输出达到最大的 N 增大. 另外还可以看出, 增加噪声幅值 σ 可以加强系统的参数随机共振强度.

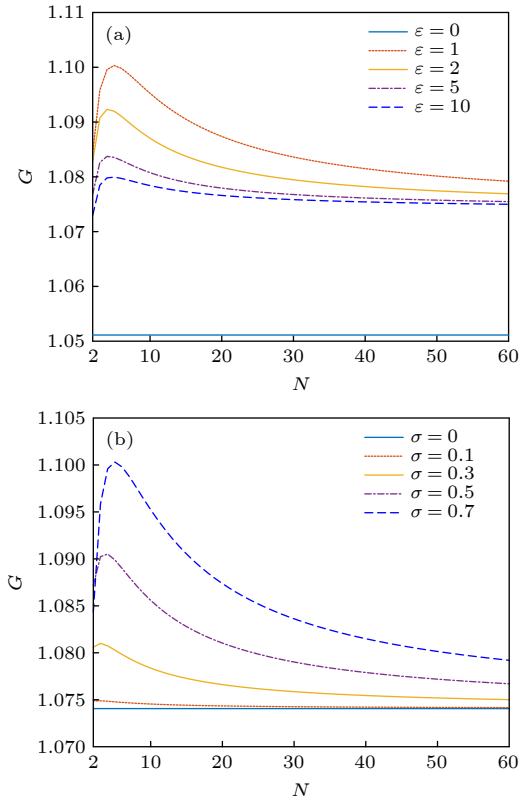


图 8 不同的 σ , ε 下 $G(N)$ 的变化曲线, 其中 $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$ (a) $\sigma = 0.7$; (b) $\varepsilon = 1$

Fig. 8. The curve of $G(N)$ under different σ and ε with $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$: (a) $\sigma = 0.7$; (b) $\varepsilon = 1$.

5.3.3 关于噪声幅值 σ 的随机共振

图 9(a) 和图 9(b) 分别给出了不同的 ε , N 下, G 随 σ 的变化曲线. 可以看出, 所有曲线都表现出不同强度的共振现象. 这表明, 在合适的参数下, 系统关于噪声幅值 σ 会产生随机共振. 从图 9(a) 和图 9(b) 还可以看出, 当 $\sigma = 0$ 时, 所有曲线都有共同的起点. 这一现象与图 7(a), 图 8(b) 及 (57) 式得到的结论一致.

图 9(a) 中, 随着耦合强度 ε 从 0 增加到 1, 共振强度变大且共振峰位置右移. 当 ε 从 1 继续增加到 10 时, 共振强度逐渐减弱, 并且也逐渐趋向于一个极限值, 而共振峰的位置相对变化较小. 这说

明增加耦合强度既能增强也可以削弱随机共振现象.

图 9(b) 中, 随着系统规模 N 的增加, 共振强度变大且共振峰位置右移. 出现这一现象的原因与图 8(b) 类似. 更大的系统规模 N 使系统各粒子间的相互吸引力变强, 而过强的吸引力进一步抑制了噪声带来的随机性, 使系统 (2) 产生与确定性系统类似的有序输出. 因此, 随着 N 的增加, 使系统输出 G 达到最大的 σ 变大, 共振峰右移. 图 9(b) 表明, 增加系统规模 N 可增强系统的随机共振强度.

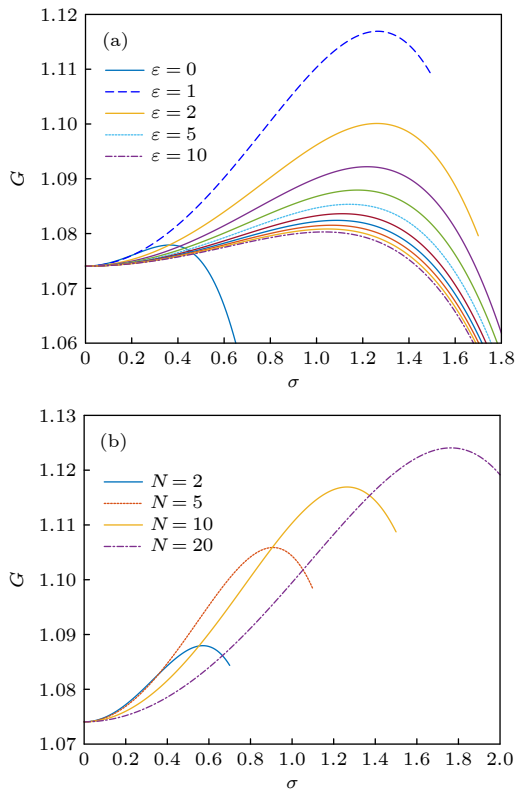


图 9 不同的 ε , N 下 $G(\sigma)$ 的变化曲线, 其中 $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$: (a) $N = 10$; (b) $\varepsilon = 1$

Fig. 9. The curve of $G(\sigma)$ under different ε and N with $\omega = 0.5$, $\lambda = 1$, $A_0 = 1$, $\Omega = \pi/4$: (a) $N = 10$; (b) $\varepsilon = 1$.

6 结 论

本文研究了不同频率噪声驱动下过阻尼全局耦合系统的集体动力学行为. 理论方面, 主要通过随机平均法来展开研究. 首先, 得到了各粒子行为的统计同步性, 该同步性使得系统平均场行为与单粒子行为具有统计一致性, 从而可通过对单粒子行为的研究来完成对平均场行为 (也即集体行为) 的研究. 其次, 利用该同步性, 完成了对系统输出幅

值增益的解析求解, 为进一步分析系统的随机共振行为奠定了理论基础. 最后, 推导给出了系统稳定的充分条件和充要条件, 为本文所得结论的适用范围给出了参考. 数值仿真方面, 主要通过随机 Taylor 展开算法进行研究. 首先, 分析了粒子规模 N 及耦合强度 ε 对稳定性区域与同步时间的影响, 结果表明, 随着耦合强度 ε 的增加或系统规模 N 的增大, 粒子间的耦合力增大, 系统有序性增强, 从而使得稳定区域逐渐增大, 同步时间逐渐缩短. 其次, 对系统的随机共振行为展开了研究. 噪声为系统提供随机性, 耦合力为系统提供有序性, 两者相互竞争, 从而使得系统输出关于噪声强度 σ 、耦合强度 ε 与系统规模 N 均表现出随机共振行为. 随着耦合强度的增加或系统规模的增大, 系统的有序性增强, 需要更大的噪声强度提供更强的随机性来与之实现最优匹配, 从而关于噪声强度 σ 的共振峰逐渐右移. 反之, 随着噪声强度 σ 的增大, 关于耦合强度 ε 与系统规模 N 的共振峰也会右移. 本文的研究工作虽然围绕特定耦合模型展开, 但相关结论具有很强的普适性, 对其他复杂耦合系统的研究具有很好的理论指导和参考意义. 后续, 将在本文工作的基础上, 进一步结合实际需求展开深入研究.

参考文献

- [1] Boccaletti S, Latora V, Moreno Y, Chavez M, Hwang D U 2006 *Phys. Rep.* **424** 175
- [2] He W, Cao J 2010 *IEEE Trans. Neural Networks* **21** 571
- [3] Yang B, Zhang X, Zhang L, Luo M K 2016 *Phys. Rev. E* **94** 022119
- [4] Ioannou P J, Farrell B F 2006 *Application of Generalized Stability Theory to Deterministic and Statistical Prediction* (New York: Cambridge University Press) pp113–126
- [5] Dorf R C, Bishop R H 2010 *Modern Control Systems* (12th Ed.) (Pearson: Prentice Hall) p387
- [6] Watts D J, Strogatz S H 1998 *Nature* **393** 440
- [7] Pikovsky A, Rosenblum M, Kurths J 2001 *Synchronization: A Universal Concept in Nonlinear Sciences* (New York: Cambridge University Press) pp1–7
- [8] Zheng Z G 2019 *Emergence Dynamics in Complex System: from Synchronization to Collective Transport* (Vol. 1) (Beijing: Science Press) p107 (in Chinese) [郑志刚 2019 复杂系统的涌现动力学——从同步到集体运输(上卷) (北京: 科学出版社) 第 107 页]
- [9] Benzi R, Sutera A, Vulpiani A 1981 *J. Phys. A* **14** L453
- [10] Benzi R, Parisi G, Sutera A, Vulpiani A 1982 *Tellus* **34** 10
- [11] Nicolis C 1982 *Tellus* **34** 1
- [12] Inchiosa M E, Bulsara A R 1996 *Phys. Rev. E* **53** R2021
- [13] McDonnell M D, Abbott D 2009 *PLoS Comput. Biol.* **5** e1000348
- [14] Gitterman M 2005 *Phys. A* **352** 309
- [15] Gammaitoni L, Hänggi P, Jung P, Marchesoni F 1998 *Rev.*

- Mod. Phys.* **70** 223
- [16] McNamara B, Wiesenfeld K 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4854
- [17] Fox R F 1989 *Phys. Rev. A* **39** 4148
- [18] Gang H, Ditzinger T, Ning C Z, Haken H 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 807
- [19] Tessone C J, Mirasso C R, Toral R, Gunton J D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 194101
- [20] Atsumi Y, Hata H, Nakao H 2013 *Phys. Rev. E* **88** 052806
- [21] Tang Y, Zou W, Lu J, Kurths J 2012 *Phys. Rev. E* **85** 046207
- [22] Pikovsky A, Zaikin A, de la Casa M A 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 050601
- [23] Cubero D 2008 *Phys. Rev. E* **77** 021112
- [24] Li J H 2002 *Phys. Rev. E* **66** 031104
- [25] Li J H, Han Y X 2006 *Phys. Rev. E* **74** 051115
- [26] Li J H, Han Y X 2007 *Commun. Theor. Phys.* **47** 672
- [27] Jiang S, Guo F, Zhou Y, Gu T 2007 *Phys. A* **375** 483
- [28] Li J H 2011 *Chaos* **21** 043115
- [29] He G T, Tian Y, Wang Y 2013 *J. Stat. Mech.* **2013** P09026
- [30] He G T, Luo R Z, Luo M K 2013 *Phys. Scr.* **88** 065009
- [31] Yu T, Zhang L, Luo M K 2013 *Phys. Scr.* **88** 045008
- [32] He G T, Tian Y, Luo M K 2014 *J. Stat. Mech.* **2014** P05018
- [33] Zhong S C, Ma H, Peng H, Zhang L 2015 *Nonlinear Dyn.* **82** 535
- [34] Berdichevsky V, Gitterman M 1996 *Europhys. Lett.* **36** 161
- [35] Chandrasekhar S 1943 *Rev. Mod. Phys.* **15** 1
- [36] Fulinski A 1993 *Phys. Lett. A* **180** 94
- [37] Robertson B and Astumian R D 1991 *J. Chem. Phys.* **94** 7414
- [38] Kubo R 1963 *J. Math. Phys.* **4** 174
- [39] Jiang S Q, Hou M J, Jia C H, He J R, Gu T X 2009 *Chin. Phys. B* **18** 2667
- [40] Nicolis C, Nicolis G 2017 *Phys. Rev. E* **96** 042214
- [41] Yu T, Zhang L., Zhong S C, Lai L 2019 *Nonlinear Dyn.* **96** 1735
- [42] Droste F, Lindner B 2014 *Biol. Cybern.* **108** 825
- [43] Reimann P, Elston T C 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 5328
- [44] Si M, Conrad N, Shin S, Gu J, Zhang J, Alam M, Ye P 2015 *IEEE Trans. Electron Devices* **62** 3508
- [45] Van Den Broeck C 1983 *J. Stat. Phys.* **31** 467
- [46] Astumian R D, Bier M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 1766
- [47] Li J H, Huang Z Q 1998 *Phys. Rev. E* **57** 3917
- [48] Bier M 1997 *Contemp. Phys.* **38** 371
- [49] Pleiss J, Jähnig F 1991 *Biophys. J.* **59** 795
- [50] Li J H, Chen Q H, Zhou X F 2010 *Phys. Rev. E* **81** 041104
- [51] Wang Q, Perc M, Duan Z, Chen G 2009 *Chaos* **19** 023112
- [52] Hendricks A G, Epureanu B I, Meyhofer E 2009 *Phys. Rev. E* **79** 031929
- [53] Stukalin E B, Phillips III H, Kolomeisky A B 2005 *Phys. Rev. Lett.* **94** 238101
- [54] Jiang L, Lai L, Yu T, Luo M K 2021 *Chin. Phys. B* **30** 060502
- [55] Shapiro V E, Loginov V M 1978 *Phys. A* **91** 563
- [56] Li J S, Zha J G, Wang X M 2010 *Linear Algebra* (2nd Ed.) (Hefei: University of Science and Technology of China Press) pp374–375 (in Chinese) [李炯生, 查建国, 王新茂 2010 线性代数 (第二版) (合肥: 中国科学技术大学出版社) 第374—375页]
- [57] Chen G D 1983 *Journal of Central China Teachers College* **2** 134 (in Chinese) [陈光大 1983 华中师学报 **2** 134]
- [58] Kim C, Lee E K, Talkner P 2006 *Phys. Rev. E* **73** 026101

Collective behaviors of globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations^{*}

Jiang Lei¹⁾ Lai Li¹⁾ Yu Tao^{1)†} Luo Mao-Kang¹⁾²⁾

1) (*College of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

2) (*School of Aeronautics and Astronautics, Sichuan University, Chengdu 610064, China*)

(Received 24 January 2021; revised manuscript received 13 February 2021)

Abstract

For multi-particle coupled systems, the effects of environmental fluctuations on each particle are often different in actual situations. To this end, this paper studies the collective dynamic behaviors in globally coupled harmonic oscillators driven by different frequency fluctuations, including synchronization, stability and stochastic resonance (SR). The statistical synchronicity between particles' behaviors is derived by reasonably grouping variables and using random average method, and then the statistical equivalence between behaviors of mean field and behaviors of single particle is obtained. Therefore, the characteristics of mean field's behaviors (that is, collective behaviors) can be obtained by studying behaviors of any single particle. Moreover, the output amplitude gain and the necessary and sufficient condition for the system stability are obtained by using this synchronization. The former lays a theoretical foundation for analyzing the stochastic resonance behavior of the system, and the latter gives the scope of adaptation of the conclusions in this paper. In terms of numerical simulation, the research is mainly carried out through the stochastic Taylor expansion algorithm. Firstly, the influence of system size N and coupling strength ε on the stability area and synchronization time is analyzed. The results show that with the increase of the coupling strength ε or the increase of the system size N , the coupling force between particles increases, and the orderliness of the system increases, so that the stable region gradually increases and the synchronization time gradually decreases. Secondly, the stochastic resonance behavior of the system is studied. Noises provide randomness for the system, and coupling forces provide orderliness for the system. The two compete with each other, so that the system outputs about the noise intensity σ , the coupling strength ε and the system size N exhibit stochastic resonance behavior. As the coupling strength increases or the system size increases, the orderliness of the system increases, and greater noise intensity is required to provide stronger randomness to achieve optimal matching with it, so as to the resonance of the noise intensity σ , the peak gradually shifts to the right. Conversely, as the noise intensity σ increases, the resonance peak of the coupling strength ε and the system size N will also shift to the right.

Keywords: stochastic resonance, globally coupled harmonic oscillators, synchronization, stability

PACS: 05.45.Xt, 05.40.-a, 05.40.Ca

DOI: 10.7498/aps.70.20210157

^{*} Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11501385, 11801385).

[†] Corresponding author. E-mail: scuyutao@163.com