物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

时间尺度上非迁移Birkhoff系统的Mei对称性定理

张毅

Mei's symmetry theorems for non-migrated Birkhoffian systems on a time scale

Zhang Yi

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 70, 244501 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210372
在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.70.20210372
当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理*

张毅†

(苏州科技大学土木工程学院, 苏州 215011)

(2021 年 2 月 25 日收到; 2021 年 9 月 9 日收到修改稿)

研究并证明时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理. 首先, 建立任意时间尺度上 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Pfaff-Birkhoff 原理, 由此导出时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统 (包括自由 Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统) 的动力学方程. 其次, 基于非迁移 Birkhoff 方程中的动力学函数经历变换后仍满足原方程的不变性, 给出了时间尺度上 Mei 对称性的定义, 导出了相应的判据方程. 再次, 建立并证明了时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理, 得到了时间尺度上 Birkhoff 系统的 Mei 守恒量. 并通过 3 个算例说明了结果的应用.

关键词: Birkhoff 系统, Mei 对称性定理, 时间尺度, 非迁移变分学

PACS: 45.20.Jj, 11.30.Na, 02.30.Xx **DOI:** 10.7498/aps.70.20210372

1 引 言

Birkhoff 力学起源于 Birkhoff[1] 的著作《动力系统》. Santilli[2] 首次提出 Birkhoff 力学一词, 并详细地讨论了 Birkhoff 方程的构造、变换理论及其对强子物理的应用. 梅凤翔等 [3] 和 Galiullin 等 [4] 从各自角度分别独立地研究了 Birkhoff 系统动力学, 他们的研究各具特色且更侧重于分析力学. 文献 [5] 构建了广义 Birkhoff 系统动力学. 梅凤翔先生 [6] 指出 Birkhoff 力学是分析力学发展的第 4 个阶段. 近年来, Birkhoff 力学在对称性理论 [7−13]、几何动力学 [14,15]、全局分析与稳定性 [16,17]、数值计算 [18−22] 等研究方向上都取得了重要进展.

时间尺度, 即实数集的任意非空闭子集, 最早是由 Hilger 博士 [23] 引进的. 由于实数集和整数集本身就是一类特殊的时间尺度, 因而在时间尺度上不仅可以统一地处理连续系统和离散系统, 而且可以处理既有连续又有离散的复杂动力学过程. 近 20 年来, 时间尺度分析理论不仅在理论上不断完善 [24−26], 其应用领域也在不断拓广 [27−34]. 文献 [35] 最早提出并研究了时间尺度上基于 delta 导数的自由 Birkhoff 系统动力学及其 Noether 对称性. 文献 [36] 利用对偶原理将文献 [35] 的结果拓展到 nabla 导数情形. 文献 [37] 给出了时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Noether 定理. 但是, 这些研究尚限于: 1) 自由 Birkhoff 系统; 2) Noether 对称性; 3) 守恒量是 Noether 型的. 文献 [38, 39] 初步研究了时间尺度上 Birkhoff 系统的 Lie 对称性和 Mei 对称性, 但是其守恒量的证明基于第二 Euler-Lagrange 方程, 而数值计算表明该方程并不成立 [34]. 此外, 根据 Bourdin[33] 的研究, 在离散层面非迁移情形的结果是保变分结构及其相关性质的, 尽管迄今时间尺度上非迁移变分问题研究还很少. 本文研

* 国家自然科学基金 (批准号: 11972241, 11572212) 和江苏省自然科学基金 (批准号: BK20191454) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn

 http://wulixb.iphy.ac.cn

究时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Mei 对称性, 包括自由 Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统, 建立并证明上述 3 类 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理, 给出时间尺度上新型守恒量, 称之为 Mei 守恒量.

2 时间尺度上非迁移 Birkhoff 方程

关于时间尺度上微积分及其基本性质, 读者可参阅文献 [24, 25].

2.1 Pfaff-Birkhoff 原理及其推广

在时间尺度上, 非迁移 Pfaff 作用量为

$$A=\int_{t_1}^{t_2}\left[R_\beta\left(t,a_\gamma\left(t\right)\right)a_\beta^\Delta-B\left(t,a_\gamma\left(t\right)\right)\right]\Delta t, \quad (1)$$

其中 $R_\beta:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是时间尺度上 Birkhoff 函数组, $B:\mathbb{T}\times\mathbb{R}^{2n}\to\mathbb{R}$ 是时间尺度上 Birkhoff 函数, a_β^Δ 是 Birkhoff 变量 a_β 对时间的 delta 导数. 设所有函数都是 $C_{\rm rd}^{1,\Delta}(\mathbb{T})$ 函数. $\beta,\gamma=1,2,\cdots,2n$. 非迁移是指作用量 (1) 中的变量 a_γ 没有经过前跳算子 σ 或后跳算子 ρ 的作用而发生跃迁[33].

等时变分原理

$$\delta A=0, \quad (2)$$

且满足端点条件

$$\delta a_\beta|_{t=t_1}=\delta a_\beta|_{t=t_2}=0, \quad (3)$$

以及互易关系

$$\delta a_\beta^\Delta=(\delta a_\beta)^\Delta. \quad (4)$$

原理 (2) 称为时间尺度上非迁移 Pfaff-Birkhoff 原理.

等时变分原理 (2) 可推广为

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[\delta\left(R_\beta a_\beta^\Delta-B\right)+\varPhi_\beta\delta a_\beta\right]\Delta t=0, \quad (5)$$

式中 $\varPhi_\beta=\varPhi_\beta\left(t,a_\gamma\right)$ 表示附加项[5]. 原理 (5) 式可称为时间尺度上非迁移广义 Pfaff-Birkhoff 原理.

2.2 自由 Birkhoff 系统

由原理 (2), 容易导出

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[R_\beta+\int_{t_1}^{\sigma(t)}\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)\Delta\tau\right]\delta a_\beta^\Delta\Delta t=0, \quad (6)$$

其中 $\sigma(t)$ 是前跳算子. 考虑到 δa_β^Δ 的独立性, 由时间尺度上 Dubois-Reymond 引理[24], 得到

$$R_\beta+\int_{t_1}^{\sigma(t)}\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)\Delta\tau=C_\beta, \quad (7)$$

其中 C_β 为常数. 因此有

$$\frac{\nabla}{\nabla t}R_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=0 \quad (\beta=1,2,\cdots,2n). \quad (8)$$

方程 (8) 为时间尺度上非迁移 Birkhoff 方程.

2.3 广义 Birkhoff 系统

由原理 (5), 可导出

$$\int_{t_1}^{t_2}\left[R_\beta+\int_{t_1}^{\sigma(t)}\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta-\varPhi_\beta\right)\Delta\tau\right]\times\delta a_\beta^\Delta\Delta t=0. \quad (9)$$

类似于方程 (8), 有

$$\frac{\nabla}{\nabla t}R_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=\sigma^\nabla\varPhi_\beta \quad (\beta=1,2,\cdots,2n). \quad (10)$$

方程 (10) 可称为时间尺度上非迁移广义 Birkhoff-方程.

2.4 约束 Birkhoff 系统

约束方程为

$$f_j\left(t,a_\beta\right)=0 \quad (j=1,2,\cdots,2g), \quad (11)$$

将 (11) 式取变分, 得

$$\frac{\partial f_j}{\partial a_\beta}\delta a_\beta=0. \quad (12)$$

由 (6) 式和 (12) 式, 容易导出

$$\frac{\nabla}{\nabla t}R_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=\sigma^\nabla\lambda_j\frac{\partial f_j}{\partial a_\beta}, \quad (13)$$

其中 $\lambda_j=\lambda_j\left(t,a_\beta\right)$ 为约束乘子. 假设约束 (11) 式相互独立, 则由 (11) 式和 (13) 式可解出 λ_j. 于是方程 (13) 可写成

$$\frac{\nabla}{\nabla t}R_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=\sigma^\nabla P_\beta, \quad (14)$$

其中 $P_\beta=\lambda_j\dfrac{\partial f_j}{\partial a_\beta}$. 方程 (14) 可视作与约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11) 相应的自由 Birkhoff 系统. 只要初始条件满足约束方程 (11), 那么方程 (14) 的解就给出约束 Birkhoff 系统的运动.

3 Mei 对称性

3.1 自由 Birkhoff 系统

引进无限小变换

$$\bar{t}=t+\upsilon\xi_0(t,a_\gamma),$$
$$\bar{a}_\beta(\bar{t})=a_\beta(t)+\upsilon\xi_\beta(t,a_\gamma)$$
$$(\beta,\gamma=1,2,\cdots,2n),\tag{15}$$

其中映射$t\mapsto\vartheta(t)=t+\upsilon\xi_0+o(\upsilon)$是 1 个严格递增$C_{\rm rd}^{1,\Delta}$函数, $\upsilon\in\mathbb{R}$是无限小参数, $\vartheta(t)$是一个新的时间尺度$\bar{\mathbb{T}}$, 前跳算子为$\bar{\sigma}$, delta 导数为$\bar{\Delta}$.

在变换 (15) 下, 动力学函数B和R_β变换为$\bar{B}$和$\bar{R}_\beta$, 有

$$\bar{B}=B(\bar{t},\bar{a}_\gamma(\bar{t}))=B(\vartheta(t),(\bar{a}_\gamma\circ\vartheta)(t)),$$
$$\bar{R}_\beta=R_\beta(\bar{t},\bar{a}_\gamma(\bar{t}))=R_\beta(\vartheta(t),(\bar{a}_\gamma\circ\vartheta)(t)).\tag{16}$$

将 (16) 式在$\upsilon=0$处 Taylor 级数展开, 得到

$$\bar{B}=B(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(B)+O(\upsilon^2),$$
$$\bar{R}_\beta=R_\beta(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(R_\beta)+O(\upsilon^2),\tag{17}$$

其中$Y^{(0)}=\xi_0\partial/\partial t+\xi_\beta\partial/\partial a_\beta$.

定义 1 对于时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统 (8), 如果

$$\frac{\nabla}{\nabla t}\bar{R}_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial\bar{B}}{\partial a_\beta}-\frac{\partial\bar{R}_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=0\tag{18}$$

成立, 则变换 (15) 称为 Mei 对称性的.

判据 1 如果变换 (15) 满足如下判据方程:

$$\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(R_\beta)+\sigma^\nabla\left[\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial a_\beta}-\frac{\partial Y^{(0)}(R_\gamma)}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right]=0,\tag{19}$$

则变换相应于时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统 (8) 的 Mei 对称性.

3.2 广义 Birkhoff 系统

设时间尺度上动力学函数B, R_β和$\varPhi_\beta$经历变换 (15) 后, 成为$\bar{B}$, $\bar{R}_\beta$和$\bar{\varPhi}_\beta$, 有

$$\bar{B}=B(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(B)+O(\upsilon^2),$$
$$\bar{R}_\beta=R_\beta(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(R_\beta)+O(\upsilon^2),$$
$$\bar{\varPhi}_\beta=\varPhi_\beta(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(\varPhi_\beta)+O(\upsilon^2).\tag{20}$$

于是有下述定义 2 和判据 2.

定义 2 对于时间尺度上非迁移广义 Birkhoff 系统 (10), 如果

$$\frac{\nabla}{\nabla t}\bar{R}_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial\bar{B}}{\partial a_\beta}-\frac{\partial\bar{R}_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=\sigma^\nabla\bar{\varPhi}_\beta\tag{21}$$

成立, 则变换 (15) 称为 Mei 对称性的.

判据 2 如果变换 (15) 满足如下判据方程:

$$\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(R_\beta)+\sigma^\nabla\left[\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial a_\beta}-\frac{\partial Y^{(0)}(R_\gamma)}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right]$$
$$=\sigma^\nabla Y^{(0)}(\varPhi_\beta),\tag{22}$$

则变换相应于时间尺度上非迁移广义 Birkhoff 系统 (10) 的 Mei 对称性.

3.3 约束 Birkhoff 系统

设时间尺度上动力学函数B, R_β和P_β, 以及约束f_j经历变换 (15) 后, 成为$\bar{B}$, $\bar{R}_\beta$, $\bar{P}_\beta$和$\bar{f}_j$, 有

$$\bar{B}=B(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(B)+O(\upsilon^2),$$
$$\bar{R}_\beta=R_\beta(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(R_\beta)+O(\upsilon^2),$$
$$\bar{P}_\beta=P_\beta(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(P_\beta)+O(\upsilon^2),$$
$$\bar{f}_j=f_j(t,a_\gamma)+\upsilon Y^{(0)}(f_j)+O(\upsilon^2),\tag{23}$$

于是有下述定义 3 和判据 3.

定义 3 对于时间尺度上与约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11) 相应的自由 Birkhoff 系统 (14), 如果

$$\frac{\nabla}{\nabla t}\bar{R}_\beta+\sigma^\nabla\left(\frac{\partial\bar{B}}{\partial a_\beta}-\frac{\partial\bar{R}_\gamma}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right)=\sigma^\nabla\bar{P}_\beta\tag{24}$$

成立, 则变换 (15) 称为 Mei 对称性的.

判据 3 如果变换 (15) 满足如下判据方程:

$$\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(R_\beta)+\sigma^\nabla\left[\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial a_\beta}-\frac{\partial Y^{(0)}(R_\gamma)}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right]$$
$$=\sigma^\nabla Y^{(0)}(P_\beta),\tag{25}$$

则变换相应于时间尺度上相应自由 Birkhoff 系统 (14) 的 Mei 对称性.

定义 4 对于时间尺度上约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11), 如果方程 (24) 以及如下方程

$$\bar{f}_j=f_j(\bar{t},\bar{a}_\gamma(\bar{t}))=0\quad(j=1,2,\cdots,g)\tag{26}$$

成立, 则变换 (15) 称为 Mei 对称性的.

判据 4 如果变换 (15) 满足判据方程 (25) 和如下限制方程:

$$Y^{(0)}(f_j)=0,\tag{27}$$

则变换相应于时间尺度上约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11) 的 Mei 对称性.

4 Mei 对称性定理

4.1 自由 Birkhoff 系统

定理 1 假设变换 (15) 满足判据方程 (19), 则时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统 (8) 存在新型守恒量

$$I_{\mathrm{M}}=Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta^\sigma-Y^{(0)}(B)\,\xi_0^\sigma+G_{\mathrm{M}}^\sigma+\int_{t_1}^t\xi_0\left\{\sigma^\nabla a_\beta^\Delta\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial t}+\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\sigma^\nabla\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t}\right\}\nabla t,\tag{28}$$

其中 G_{M} 是规范函数, 满足

$$Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\right]a_\beta^\Delta-Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right]+Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta^\Delta-Y^{(0)}(B)\,\xi_0^\Delta+G_{\mathrm{M}}^\Delta=0.\tag{29}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{\nabla t}I_{\mathrm{M}}=&\ \xi_\beta\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}\left(R_\beta\right)+\sigma^\nabla\xi_\beta^\Delta Y^{(0)}\left(R_\beta\right)-\xi_0\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\sigma^\nabla\xi_0^\Delta Y^{(0)}(B)+\frac{\nabla}{\nabla t}G_{\mathrm{M}}^\sigma\\&+\xi_0\sigma^\nabla a_\beta^\Delta\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial t}+\xi_0\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\xi_0\sigma^\nabla\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t}\\=&\ \sigma^\nabla\left\{Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\right]a_\beta^\Delta-Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right]+Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta^\Delta-Y^{(0)}(B)\,\xi_0^\Delta+G_{\mathrm{M}}^\Delta\right\}\\&+\xi_\beta\left\{\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}\left(R_\beta\right)+\sigma^\nabla\left[\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial a_\beta}-\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\gamma\right)}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right]\right\}.\end{aligned}\tag{30}$$

将方程 (19) 和 (29) 代入 (30) 式, 得到

$$\frac{\nabla}{\nabla t}I_{\mathrm{M}}=0.\tag{31}$$

因此, (28) 式是系统的守恒量. 证毕.

定理 1 可称为时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统 (8) 的 Mei 对称性定理, (28) 式称为 Mei 守恒量.

4.2 广义 Birkhoff 系统

定理 2 假设变换 (15) 满足判据方程 (22), 则时间尺度上非迁移广义 Birkhoff 系统 (10) 存在新型守恒量

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}}=&\ Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta^\sigma-Y^{(0)}(B)\xi_0^\sigma+G_{\mathrm{M}}^\sigma\\&+\int_{t_1}^t\xi_0\left[-\sigma^\nabla Y^{(0)}\left(\varPhi_\beta\right)a_\beta^\Delta+\sigma^\nabla\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial t}a_\beta^\Delta+\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\sigma^\nabla\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t}\right]\nabla t,\end{aligned}\tag{32}$$

其中 G_{M} 是规范函数, 满足

$$Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\right]a_\beta^\Delta-Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right]+Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta^\Delta-Y^{(0)}(B)\xi_0^\Delta+Y^{(0)}\left(\varPhi_\beta\right)\left(\xi_\beta-a_\beta^\Delta\xi_0\right)+G_{\mathrm{M}}^\Delta=0.\tag{33}$$

证明

$$\begin{aligned}\frac{\nabla}{\nabla t}I_{\mathrm{M}}=&\ \xi_\beta\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}\left(R_\beta\right)+\sigma^\nabla\xi_\beta^\Delta Y^{(0)}\left(R_\beta\right)-\xi_0\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\sigma^\nabla\xi_0^\Delta Y^{(0)}(B)+\frac{\nabla}{\nabla t}G_{\mathrm{M}}^\sigma-\xi_0\sigma^\nabla Y^{(0)}\left(\varPhi_\beta\right)a_\beta^\Delta\\&+\xi_0\sigma^\nabla a_\beta^\Delta\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial t}+\xi_0\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\xi_0\sigma^\nabla\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t}\\=&\ \sigma^\nabla\left\{Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\right]a_\beta^\Delta-Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right]+Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta^\Delta-Y^{(0)}(B)\xi_0^\Delta+Y^{(0)}\left(\varPhi_\beta\right)\left(\xi_\beta-a_\beta^\Delta\xi_0\right)+G_{\mathrm{M}}^\Delta\right\}\\&+\xi_\beta\left\{\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}\left(R_\beta\right)+\sigma^\nabla\left[\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial a_\beta}-\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\gamma\right)}{\partial a_\beta}a_\gamma^\Delta\right]-\sigma^\nabla Y^{(0)}\left(\Phi_\beta\right)\right\}.\end{aligned}\tag{34}$$

将方程 (22) 和方程 (33) 代入 (34) 式, 得到 $\frac{\nabla}{\nabla t}I_{\mathrm{M}}=0$, 于是 (32) 式是系统的守恒量.

定理 2 可称为时间尺度上非迁移广义 Birkhoff 系统 (10) 的 Mei 对称性定理, (32) 式称为 Mei 守恒量. 证毕.

4.3 约束 Birkhoff 系统

定理 3 假设变换 (15) 满足判据方程 (25), 则时间尺度上与约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11) 相应的自由 Birkhoff 系统 (14) 存在新型守恒量

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{M}} = & Y^{(0)}\left(R_{\beta}\right) \xi_{\beta}^{\sigma} - Y^{(0)}(B) \xi_{0}^{\sigma} + G_{\mathrm{M}}^{\sigma} \\ & + \int_{t_1}^{t} \xi_0 \left[-\sigma^{\nabla} Y^{(0)}\left(P_{\beta}\right) a_{\beta}^{\Delta} + \sigma^{\nabla} a_{\beta}^{\Delta} \frac{\partial Y^{(0)}\left(R_{\beta}\right)}{\partial t} \right. \\ & \left. + \frac{\nabla}{\nabla t} Y^{(0)}(B) - \sigma^{\nabla} \frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t} \right] \nabla t, \end{aligned} \tag{35}$$

其中 G_{M} 是规范函数, 满足

$$\begin{aligned} & Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_{\beta}\right)\right] a_{\beta}^{\Delta} - Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right] \\ & + Y^{(0)}\left(R_{\beta}\right) \xi_{\beta}^{\Delta} - Y^{(0)}(B) \xi_{0}^{\Delta} \\ & + Y^{(0)}\left(P_{\beta}\right)\left(\xi_{\beta} - a_{\beta}^{\Delta} \xi_0\right) + G_{\mathrm{M}}^{\Delta} = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

定理 4 假设变换 (15) 满足判据方程 (25) 和限制条件 (27) 式, 则时间尺度上约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11) 存在新型守恒量 (35), 其中规范函数 G_{M} 满足方程 (36).

定理 3 为时间尺度上与约束 Birkhoff 系统 (13) 和 (11) 相应的自由 Birkhoff 系统 (14) 的 Mei 对称性定理. 定理 4 为时间尺度上非迁移约束 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理, (35) 式是 Mei 守恒量.

5 算 例

例 1 研究时间尺度上 Birkhoff 系统, 设 Birkhoff 函数和 Birkhoff 函数组为

$$\begin{aligned} & B = \frac{1}{2}\left[\left(a_3\right)^2 + 2 a_2 a_3 - \left(a_4\right)^2\right], \\ & R_1 = a_2 + a_3, R_2 = 0, R_3 = a_4, R_4 = 0. \end{aligned} \tag{37}$$

试研究该系统的 Mei 对称性与守恒量.

由方程 (8) 得到

$$\begin{aligned} & \frac{\nabla}{\nabla t} a_2 + \frac{\nabla}{\nabla t} a_3 = 0, -\sigma^{\nabla}\left(a_1^{\Delta} - a_3\right) = 0, \\ & \frac{\nabla}{\nabla t} a_4 - \sigma^{\nabla}\left(a_1^{\Delta} - a_3 - a_2\right) = 0, \\ & -\sigma^{\nabla}\left(a_3^{\Delta} + a_4\right) = 0. \end{aligned} \tag{38}$$

如取 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, 则方程 (38) 成为

$$\begin{aligned} & \dot{a}_2 + \dot{a}_3 = 0, \dot{a}_1 - a_3 = 0, \\ & \dot{a}_4 - \dot{a}_1 + a_3 + a_2 = 0, \dot{a}_3 + a_4 = 0. \end{aligned} \tag{39}$$

这是著名的 Hojman-Urrutia 问题[3,4]. 该问题本质上不是自伴随的, 因此没有 Lagrange 结构或 Hamilton 结构.

下面来计算 Mei 对称性. 经计算, 有

$$\begin{aligned} & Y^{(0)}(B) = \xi_2 a_3 + \xi_3\left(a_2 + a_3\right) - \xi_4 a_4, \\ & Y^{(0)}\left(R_1\right) = \xi_2 + \xi_3, \quad Y^{(0)}\left(R_2\right) = 0, \\ & Y^{(0)}\left(R_3\right) = \xi_4, \quad Y^{(0)}\left(R_4\right) = 0. \end{aligned} \tag{40}$$

取生成函数为

$$\begin{aligned} & \xi_0 = 1, \quad \xi_1 = a_2^{\rho} + a_3^{\rho} + \rho(t), \\ & \xi_2 = 2\left(1 + \frac{a_3}{a_2}\right), \quad \xi_3 = -\frac{2 a_3}{a_2}, \quad \xi_4 = 0, \end{aligned} \tag{41}$$

则

$$\begin{aligned} & Y^{(0)}(B) = 0, \quad Y^{(0)}\left(R_1\right) = 2, \\ & Y^{(0)}\left(R_2\right) = Y^{(0)}\left(R_3\right) = Y^{(0)}\left(R_4\right) = 0. \end{aligned} \tag{42}$$

生成函数 (41) 满足判据方程 (19), 因此它相应于系统的 Mei 对称性. 将 (41) 式代入方程 (29), 可解得

$$G_{\mathrm{M}} = -2 \rho(t). \tag{43}$$

由定理 1, 系统有 Mei 守恒量, 形如

$$I_{\mathrm{M}} = 2\left(a_2 + a_3\right) = \text{const.} \tag{44}$$

(44) 式表明, 对于任意的时间尺度, (44) 式都是 Birkhoff 系统 (37) 的守恒量. 如取生成函数为

$$\begin{aligned} & \xi_0 = 0, \quad \xi_1 = a_2^{\rho} \sin \rho(t) + a_4^{\rho} \cos \rho(t) + \rho(t), \\ & \xi_2 = 1 + \frac{a_3}{a_2}, \quad \xi_3 = -\frac{a_3}{a_2}, \quad \xi_4 = 0, \end{aligned} \tag{45}$$

那么生成函数 (45) 也是 Mei 对称的, 由方程 (29) 得

$$G_{\mathrm{M}} = a_3^{\rho} - a_3 - \rho(t). \tag{46}$$

由定理 1, 得到 Mei 守恒量

$$I_{\mathrm{M}} = a_2 \sin t + a_4 \cos t + a_3 - a_3^{\sigma} = \text{const.} \tag{47}$$

对于守恒量 (47), 如果系统是通常的 Birkhoff 系统, 即取 $\mathbb{T} = \mathbb{R}$, 则 $\sigma(t) = t$, 从而 (47) 式给出

$$I_{\mathrm{M}} = a_2 \sin t + a_4 \cos t = \text{const.} \tag{48}$$

这是通常意义下 Hojman-Urrutia 问题的守恒量[3]. 如果是离散情形, 即取 $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, 这里 $h > 0$, 则 $\sigma(t) = t + h$, 从而 (47) 式成为

$$\begin{aligned} I_{\mathrm{M}} = & a_2(t) \sin t + a_4(t) \cos t + a_3(t) \\ & - a_3(t + h) = \text{const.} \end{aligned} \tag{49}$$

这是步长为 h 的离散版本的 Mei 守恒量.

例 2 研究时间尺度上广义 Birkhoff 系统

$$B=\frac{1}{2}(a_3)^2+a_2,\ R_1=a_3,\ R_2=a_4,$$
$$R_3=R_4=0,\ \varPhi_1=\varPhi_2=\varPhi_3=0,\ \varPhi_4=-a_4 \quad (50)$$

的 Mei 对称性与守恒量.

广义 Birkhoff 方程 (10) 给出

$$\frac{\nabla}{\nabla t}a_3=0,\ \frac{\nabla}{\nabla t}a_4+\sigma^\nabla=0,$$
$$-\sigma^\nabla\left(a_1^\Delta-a_3\right)=0,\ -\sigma^\nabla a_2^\Delta=-\sigma^\nabla a_4. \quad (51)$$

计算 Mei 对称性, 由于

$$Y^{(0)}(B)=\xi_3a_3+\xi_2,\ Y^{(0)}(R_1)=\xi_3,$$
$$Y^{(0)}(R_2)=\xi_4,\ Y^{(0)}(R_3)=Y^{(0)}(R_4)=0,$$
$$Y^{(0)}(\varPhi_1)=Y^{(0)}(\varPhi_2)=Y^{(0)}(\varPhi_3)=0,$$
$$Y^{(0)}(\varPhi_4)=-\xi_4, \quad (52)$$

将 (52) 式代入判据方程 (22), 有解

$$\xi_0=0,\ \xi_1=a_4^\rho+2t,\ \xi_2=-a_3,\ \xi_3=1,\ \xi_4=0, \quad (53)$$

$$\xi_0=0,\ \xi_1=a_3^\rho+2t,\ \xi_2=-a_3,\ \xi_3=1,\ \xi_4=0. \quad (54)$$

(53) 式和 (54) 式相应于系统的 Mei 对称性. 将 (53) 式代入方程 (33), 解得

$$G_{\mathrm{M}}=-t. \quad (55)$$

由定理 2, 系统有 Mei 守恒量, 形如

$$I_{\mathrm{M}}=a_4+\sigma(t)=\mathrm{const}. \quad (56)$$

同理, 相应于生成函数 (54), $G_{\mathrm{M}}=-2t$, 由定理 2 得

$$I_{\mathrm{M}}=a_3=\mathrm{const}. \quad (57)$$

(56) 式和 (57) 式是由 Mei 对称性 (53) 和 (54) 导致的 Mei 守恒量.

例 3 研究时间尺度上约束 Birkhoff 系统

$$B=\frac{1}{2}(a_3)^2+(a_4)^2-ga_1\sin\varphi,$$
$$R_1=a_3,R_2=a_4,R_3=R_4=0, \quad (58)$$

约束为

$$f_1=a_1-a_2=0,$$
$$f_2=a_3-2a_4=0. \quad (59)$$

试研究其 Mei 对称性与守恒量, 其中 g 和 φ 是常数.

方程 (13) 给出

$$\frac{\nabla}{\nabla t}a_3-\sigma^\nabla g\sin\varphi=\sigma^\nabla\lambda_1,\ \frac{\nabla}{\nabla t}a_4=-\sigma^\nabla\lambda_1,$$
$$-\sigma^\nabla\left(a_1^\Delta-a_3\right)=\sigma^\nabla\lambda_2,$$
$$-\sigma^\nabla\left(a_2^\Delta-2a_4\right)=-2\sigma^\nabla\lambda_2. \quad (60)$$

由方程 (59) 和方程 (60), 解得

$$\lambda_1=-\frac{1}{3}g\sin\varphi,\ \lambda_2=\frac{1}{3}(a_3-2a_4), \quad (61)$$

因此有

$$P_1=-\frac{1}{3}g\sin\varphi,\ P_2=\frac{1}{3}g\sin\varphi,$$
$$P_3=\frac{1}{3}(a_3-2a_4),\ P_4=-\frac{2}{3}(a_3-2a_4). \quad (62)$$

做计算

$$Y^{(0)}(B)=\xi_3a_3+\xi_4a_4-\xi_1g\sin\varphi,\ Y^{(0)}(R_1)=\xi_3,$$
$$Y^{(0)}(R_2)=\xi_4,\ Y^{(0)}(R_3)=Y^{(0)}(R_4)=0,$$
$$Y^{(0)}(P_1)=Y^{(0)}(P_2)=0,\ Y^{(0)}(P_3)=\frac{1}{3}(\xi_3-2\xi_4),$$
$$Y^{(0)}(P_4)=-\frac{2}{3}(\xi_3-2\xi_4). \quad (63)$$

取生成函数为

$$\xi_0=0,\ \xi_1=\frac{2a_3^\rho+a_4^\rho}{g\sin\varphi},$$
$$\xi_2=\frac{2a_3^\rho+a_4^\rho}{g\sin\varphi},\ \xi_3=2,\ \xi_4=1, \quad (64)$$

则

$$Y^{(0)}(B)=2a_3+a_4-2a_3^\rho-a_4^\rho$$
$$=2\nu(t)a_3^\nabla+\nu(t)a_4^\nabla=\frac{5}{3}g\mu(t)\sin\varphi,$$
$$Y^{(0)}(R_1)=2,$$
$$Y^{(0)}(R_2)=1,\ Y^{(0)}(R_3)=Y^{(0)}(R_4)=0,$$
$$Y^{(0)}(P_\beta)=0\quad(\beta=1,\cdots,4), \quad (65)$$

其中 $\mu(t)=\sigma(t)-t$ 为向前互差函数, $\nu(t)=t-\rho(t)$ 为向后互差函数. 由判据 4, 生成函数 (64) 相应于系统的 Mei 对称性. 将 (65) 式代入方程 (36), 解得

$$G_{\mathrm{M}}=-5t. \quad (66)$$

由定理 4, 系统有 Mei 守恒量, 形如

$$I_{\mathrm{M}}=\frac{3}{g\sin\varphi}(2a_3+a_4)-5\sigma(t)=\mathrm{const}. \quad (67)$$

6 讨 论

如果取时间尺度 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, 则前跳算子 $\sigma(t)=t$, 互差函数 $\mu(t)=0$, 因此上述结果退化为通常意义下 Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统连续版本的变分原理、Birkhoff 方程和 Mei 对称性定理.

例如, 对于自由 Birkhoff 系统, 当取 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$时, 原理 (2) 成为

$$\delta A=\delta\int_{t_1}^{t_2}\left[R_\beta\left(t,a_\gamma(t)\right)\dot{a}_\beta-B\left(t,a_\gamma(t)\right)\right]\mathrm{d}t=0. \tag{68}$$

方程 (8) 成为

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}R_\beta+\frac{\partial B}{\partial a_\beta}-\frac{\partial R_\gamma}{\partial a_\beta}\dot{a}_\gamma=0. \tag{69}$$

由判据方程 (19) 容易得到

$$\begin{aligned}&\sigma^\nabla a_\beta^\Delta\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial t}+\frac{\nabla}{\nabla t}Y^{(0)}(B)-\sigma^\nabla\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t}\\&=\dot{a}_\beta\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial t}+\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}Y^{(0)}(B)-\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial t}\\&=\left[\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\gamma\right)}{\partial a_\beta}-\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial a_\gamma}\right]\dot{a}_\beta\dot{a}_\gamma=0,\end{aligned} \tag{70}$$

于是, 定理 1 退化为下述推论 1.

推论 1 假设变换 (15) 满足判据方程 (19), 则自由 Birkhoff 系统 (69) 的 Mei 对称性导致如下形式的守恒量:

$$I_{\mathrm{M}}=Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta-Y^{(0)}(B)\,\xi_0+G_{\mathrm{M}}, \tag{71}$$

其中 G_{M}是规范函数, 满足

$$\begin{aligned}&Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\right]\dot{a}_\beta-Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right]\\&+Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\dot{\xi}_\beta-Y^{(0)}(B)\,\dot{\xi}_0+G_{\mathrm{M}}=0.\end{aligned} \tag{72}$$

推论 1 是通常意义下自由 Birkhoff 系统连续版本的 Mei 对称性与守恒量定理[7]. 而方程 (68)、方程 (69) 和方程 (71) 就是通常意义下自由 Birkhoff 系统连续版本的 Pfaff-Birkhoff 原理、Birkhoff 方程和 Mei 守恒量.

如果取时间尺度 $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$, 常数 $h>0$, 则前跳算子 $\sigma(t)=t+h$, 互差函数 $\mu(t)=h$. 此时, 原理 (2) 成为

$$\begin{aligned}\delta A=\delta\sum_{\tau=t_1}^{t_2-h}&\left\{R_\beta\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)\left[a_\beta(\tau+h)-a_\beta(\tau)\right]\right.\\&\left.-B\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)h\right\}=0,\end{aligned} \tag{73}$$

方程 (8) 成为

$$\begin{aligned}&R_\beta\left(t,a_\gamma(t)\right)-R_\beta\left(t-h,a_\gamma(t-h)\right)\\&+\frac{\partial B}{\partial a_\beta}\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)h-\frac{\partial R_\alpha}{\partial a_\beta}\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)\\&\times\left[a_\alpha(\tau+h)-a_\alpha(\tau)\right]=0,\end{aligned} \tag{74}$$

则定理 1 退化为下述推论 2.

推论 2 假设变换 (15) 满足判据方程 (19), 则自由 Birkhoff 系统 (74) 的 Mei 对称性导致如下形式的守恒量:

$$\begin{aligned}I_{\mathrm{M}}=&\,Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\xi_\beta(t+h)-Y^{(0)}(B)\,\xi_0(t+h)+G_{\mathrm{M}}(t+h)\\&+\sum_{\tau=t_1}^{t-h}\xi_0(\tau)\left\{\left[a_\beta(\tau+h)-a_\beta(\tau)\right]\frac{\partial Y^{(0)}\left(R_\beta\right)}{\partial\tau}\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)+Y^{(0)}(B)\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)\right.\\&\left.-Y^{(0)}(B)\left(\tau-h,a_\gamma(\tau-h)\right)-h\frac{\partial Y^{(0)}(B)}{\partial\tau}\left(\tau,a_\gamma(\tau)\right)\right\},\end{aligned} \tag{75}$$

其中 G_{M}是规范函数, 满足

$$\begin{aligned}&Y^{(0)}\left[Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\right]\left[a_\beta(t+h)-a_\beta(t)\right]-Y^{(0)}\left[Y^{(0)}(B)\right]h+Y^{(0)}\left(R_\beta\right)\left[\xi_\beta(t+h)\right.\\&\left.-\xi_\beta(t)\right]-Y^{(0)}(B)\left[\xi_0(t+h)-\xi_0(t)\right]+\left[G_{\mathrm{M}}(t+h)-G_{\mathrm{M}}(t)\right]=0.\end{aligned} \tag{76}$$

推论 2 是通常意义下自由 Birkhoff 系统离散版本的 Mei 对称性与守恒量定理. 而方程 (73)—(75) 就是通常意义下自由 Birkhoff 系统离散版本步长为 h的 Pfaff-Birkhoff 原理、Birkhoff 方程和 Mei 守恒量.

7 结 论

对称性和守恒量一直是分析力学研究的一个重要方面. 经典的对称性主要有 Noether 对称性

和 Lie 对称性. Mei 对称性是本质上不同于前两种对称性的一种不变性, 它可以导致 Mei 守恒量. Mei 守恒量不同于 Noether 守恒量, 是一种新的守恒量. 本文提出并研究了时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理.

一是提出了时间尺度上非迁移 Pfaff-Birkhoff 原理和广义 Pfaff-Birkhoff 原理, 导出了时间尺度上 Birkhoff 系统, 包括自由 Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的动力学方程. 主要结果是原理 (2) 和 (5), Birkhoff 方程 (8), (10) 和 (13).

二是定义了时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统的 Mei 对称性, 并导出了它的判据方程. 主要结果是 4 个定义和 4 个判据.

三是提出并证明了时间尺度上非迁移 Birkhoff 系统、非迁移广义 Birkhoff 系统和非迁移约束 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理. 主要结果是 4 个定理, Mei 守恒量 (28), (32) 和 (35).

当取时间尺度 $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ 和 $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}$ 时, 文中定理给出通常意义下自由 Birkhoff 系统、广义 Birkhoff 系统和约束 Birkhoff 系统的连续版本和离散版本的 Mei 对称性与守恒量定理. 由于除了实数集和整数集以外, 时间尺度还可以有很多选择, 因此时间尺度上 Birkhoff 系统的 Mei 对称性定理具有一般性.

参考文献

[1] Birkhoff G D 1927 *Dynamical Systems* (Providence: AMS College Publ.) pp59–96

[2] Santilli R M 1983 *Foundations of Theoretical Mechanics II* (New York: Springer-Verlag) pp1–280

[3] Mei F X, Shi R C, Zhang Y F, Wu H B 1996 *Dynamics of Birkhoffian System* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp1–228

[4] Galiullin A S, Gafarov G G, Malaishka R P, Khwan A M 1997 *Analytical Dynamics of Helmholtz, Birkhoff and Nambu Systems* (Moscow: UFN) pp118–226

[5] Mei F X 2013 *Dynamics of Generalized Birkhoffian Systems* (Beijing: Science Press) pp1–206

[6] Mei F X, Wu H B, Li Y M, Chen X W 2016 *J. Theor. Appl. Mech.* **48** 263 (in Chinese) [梅凤翔, 吴惠彬, 李彦敏, 陈向炜 2016 力学学报 **48** 263]

[7] Mei F X 2004 *Symmetries and Conserved Quantities of Constrained Mechanical Systems* (Beijing: Beijing Institute of Technology Press) pp1–482 (in Chinese) [梅凤翔 2004 约束力学系统的对称性与守恒量 (北京: 北京理工大学出版社) 第1—482页]

[8] Wang P, Xue Y, Liu Y L 2012 *Chin. Phys. B* **21** 070203

[9] Zhang Y, Zhai X H 2015 *Nonlinear Dyn.* **81** 469

[10] Zhang H B, Chen H B 2017 *J. Math. Anal. Appl.* **456** 1442

[11] Zhang Y 2018 *Int. J. Non-Linear Mech.* **101** 36

[12] Xu X X, Zhang Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 220401 (in Chinese) [徐鑫鑫, 张毅 2020 物理学报 **69** 220401]

[13] Zhang L J, Zhang Y 2020 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **91** 105435

[14] Guo Y X, Liu C, Liu S X 2010 *Commun. Math.* **18** 21

[15] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Chin. Phys. B* **20** 034501

[16] Chen X W, Li Y M 2013 *Acta Mech.* **224** 1593

[17] Luo S K, He J M, Xu Y L 2016 *Int. J. Non-Linear Mech.* **78** 105

[18] Liu S X, Liu C, Guo Y X 2011 *Acta Phys. Sin.* **60** 064501 (in Chinese) [刘世兴, 刘畅, 郭永新 2011 物理学报 **60** 064501]

[19] Liu S X, Liu C, Hua W, Guo Y X 2016 *Chin. Phys. B* **25** 114501

[20] Kong X L, Wu H B, Mei F X 2013 *Appl. Math. Comput.* **225** 326

[21] Kong X L, Wu H B 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 084501 (in Chinese) [孔新雷, 吴惠彬 2017 物理学报 **66** 084501]

[22] He L, Wu H B, Mei F X 2017 *Nonlinear Dyn.* **87** 2325

[23] Hilger S 1990 *Results Math.* **18** 18

[24] Bohner M, Peterson A 2001 *Dynamic Equations on Time Scales* (Boston: Birkhäuser) pp1–353

[25] Bohner M, Georgiev S G 2016 *Multivariable Dynamic Calculus on Time Scales* (Switzerland: Springer International Publishing AG) pp1–600

[26] Georgiev S G 2018 *Fractional Dynamic Calculus and Fractional Dynamic Equations on Time Scales* (Switzerland: Springer International Publishing AG) pp1–357

[27] Atici F M, Biles D C, Lebedinsky A 2006 *Math. Comput. Modell.* **43** 718

[28] Bohner M 2004 *Dyn. Syst. Appl.* **13** 339

[29] Bartosiewicz Z, Torres D F M 2008 *J. Math. Anal. Appl.* **342** 1220

[30] Benkhettou N, Brito da Cruz A M C, Torres D F M 2015 *Signal Process.* **107** 230

[31] Dryl M, Torres D F M 2017 *Springer Proceedings in Mathematics & Statistics* **195** 223

[32] Han Z L, Sun S R 2014 *Oscillation Theory of Dynamic Equations on Time Scales* (Jinan: Shandong University Press) pp1–232 (in Chinese) [韩振来, 孙书荣 2014 时间尺度上动态方程振动理论 (济南: 山东大学出版社) 第1—232页]

[33] Bourdin L 2014 *J. Math. Anal. Appl.* **411** 543

[34] Anerot B, Cresson J, Belgacem K H, Pierret F 2020 *J. Math. Phys.* **61** 113502

[35] Song C J, Zhang Y 2015 *J. Math. Phys.* **56** 102701

[36] Song C J, Zhang Y 2017 *J. Nonlinear Sci. Appl.* **10** 2268

[37] Song C J, Cheng Y 2020 *Appl. Math. Comput.* **374** 125086

[38] Zhang Y 2019 *Chaos, Solitons Fractals* **128** 306

[39] Zhang Y, Zhai X H 2019 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **75** 251

Mei's symmetry theorems for non-migrated Birkhoffian systems on a time scale*

Zhang Yi †

(*College of Civil Engineering, Suzhou University of Science and Technology, Suzhou* 215011, *China*)

(Received 25 February 2021; revised manuscript received 9 September 2021)

Abstract

The Mei symmetry and its corresponding conserved quantities for non-migrated Birkhoffian systems on a time scale are proposed and studied. Firstly, the dynamic equations of non-migrated Birkhoffian systems (including free Birkhoffian systems, generalized Birkhoffian systems and constrained Birkhoffian systems) on a time scale are derived based on the time-scale Pfaff-Birkhoff principle and time-scale generalized Birkhoff principle. Secondly, based on the fact that the dynamical functions in the non-migrated Birkhoff's equations still satisfy the original equations after they have been transformed, the definitions of Mei symmetry on an arbitrary time scale are given, and the corresponding criterion equations are derived. Thirdly, Mei's symmetry theorems for non-migrated Birkhoffian systems on a time scales are established and proved, and Mei conserved quantities of Birkhoffian systems on a time scale are obtained. The results are illustrated by three examples.

Keywords: Birkhoffian system, Mei's symmetry theorem, time scale, non-migrated variational calculus

PACS: 45.20.Jj, 11.30.Na, 02.30.Xx **DOI:** 10.7498/aps.70.20210372

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11972241, 11572212) and the Natural Science Foundation of Jiangsu Province, China (Grant No. BK20191454).

† Corresponding author. E-mail: zhy@mail.usts.edu.cn