物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

单面双极性磁铁空间磁感应强度模型

苏徐昆　冷永刚　张雨阳　范胜波

Study on the model of space magnetic induction of a bi-pole magnet

Su Xu-Kun　Leng Yong-Gang　Zhang Yu-Yang　Fan Sheng-Bo

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 70, 167501 (2021)　DOI: 10.7498/aps.70.20210448

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.70.20210448

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于旋转永磁体的超低频机械天线电磁特性分析

Performance analysis of spinning magnet as mechanical antenna

物理学报. 2019, 68(18): 188401　https://doi.org/10.7498/aps.68.20190339

基于表面磁感应强度的铁磁构件应力恒磁表征方法

A method of characterizing axial stress in ferromagnetic members using superficial magnetic flux density obtained from static magnetization by permanent magnet

物理学报. 2018, 67(17): 178103　https://doi.org/10.7498/aps.67.20180560

采用永磁铁的钠原子二维磁光阱的设计和研究

Design and research of two-dimensional magneto-optical trap of sodium atom using permanent magnets

物理学报. 2020, 69(12): 126701　https://doi.org/10.7498/aps.69.20200266

稀土永磁体及复合磁体反磁化过程和矫顽力

Magnetization reversal and coercivity in rare-earth permanent magnets and composite magnets

物理学报. 2019, 68(17): 177501　https://doi.org/10.7498/aps.68.20190364

空心圆柱形永磁体内径对单畴GdBCO超导块材磁悬浮力的影响

Effect of inner diameter of hollow cylindrical permanent magnet on levitation force of single domain GdBCO bulk superconductor

物理学报. 2018, 67(7): 077401　https://doi.org/10.7498/aps.67.20172418

基于中继传输的海-空跨界磁感应通信覆盖范围与可用带宽分析

Coverage and transmission bandwidth analyses of undersea-to-air magnetic induction communication with relay transmission

物理学报. 2020, 69(24): 248401　https://doi.org/10.7498/aps.69.20200882

单面双极性磁铁空间磁感应强度模型*

苏徐昆 冷永刚† 张雨阳 范胜波

(天津大学机械工程学院, 天津 300350)

(2021 年 3 月 8 日收到; 2021 年 4 月 6 日收到修改稿)

两个尺寸差异较大的永磁体在同极性相对时, 若迫使二者间距减小, 磁铁间的相互作用力会由斥力转变为吸引力, 大磁铁局部退磁, 从而形成单面双极性磁铁. 本文基于磁化电流理论, 构建了单面双极性磁铁空间磁感应强度的分析模型, 该模型能计算表面局部退磁的单面双极性磁铁的空间磁感应强度. 以中心局部退磁的圆柱形永磁体为例, 探讨了小磁铁尺寸和磁化强度对于该类单面双极性磁铁空间磁场的影响, 证明了该单面双极性磁铁可等效为一种可调控局部空间磁场的环形磁铁, 因而可为应用环形磁铁的机电系统提供新思路和理论依据.

关键词: 磁感应强度计算, 局部退磁, 永磁体, 单面双极性

PACS: 75.50.Ww, 41.20.Gz, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.70.20210448

1 引 言

基于磁体间相互作用的应用可追溯至上千年前. 如今, 永磁体也被广泛应用在工业界和日常生活中[1]. 例如, 永磁体被大量应用于振动控制[2]和振动能量采集装置[3,4]中, 利用磁力的非线性性质使系统产生双稳或多稳状态[5,6]. 在各类应用永磁体的装置中, 磁力的计算显得尤为重要, 而磁感应强度的计算是磁力计算中关键的一步. 目前, 除去采用有限元算法或经验公式的办法外[7], 计算永磁体空间磁感应强度或永磁体间相互作用力的理论模型主要有磁化电流法和磁荷法[8–10], 二者本质上是等效的[11].

本课题组最近的研究发现, 尺寸差异较大的成对永磁体相互作用时, 若两磁铁相同的极性互相靠近到一定距离, 斥力会转变为吸力, 小磁铁最终会吸附在大磁铁上. 大磁铁在小磁铁磁场的作用下发生局部退磁[12]. 在撤掉小磁铁后, 大磁铁形成单面双极性磁铁而小磁铁保持不变. 定性层面上, 小尺寸磁铁在退磁曲线上负载线斜率的绝对值更大, 因而它对外加磁场的敏感性要小于大尺寸磁铁[13,14], 小尺寸磁铁仅用于产生方向和大磁铁磁化强度方向相反的外加退磁场. 在机电系统中利用该单面双极性磁铁, 能够产生近场局部可调控的磁场而不影响远场的值, 在多稳态非线性装置[15]、直流电机[16]和新型位移传感器[17]等研发领域中可能有一定应用前景. 但目前在定量层面, 缺乏计算单面双极性磁铁空间磁感应强度的理论模型.

为了解决单面双极性磁铁空间磁感应强度分析计算的问题, 本文基于磁化电流法构建了理论模型, 并推导了该类磁铁空间磁场分布的表达式. 经大量实验检验, 该模型直观且有效. 以圆柱形磁铁为例, 计算结果表明, 单面双极性磁铁可等效看作可调控内环位置、尺寸和等效磁化强度的多环环形磁铁. 此外, 本文固定大磁铁尺寸, 分析了小磁铁尺寸的改变对单面双极性磁铁的影响, 结果表明, 小磁铁尺寸的改变影响到单面双极性磁铁的局域等效磁化强度和反向电流环的位置, 从而影响空间磁场的分布. 本文解释了单面双极性磁铁的成因, 给出了空间磁场分布定量的结果, 为单面双极性磁

* 国家重点研发计划 (批准号: 2018YFD0700704) 和国家自然科学基金 (批准号: 51675370) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn

© 2021 中国物理学会 Chinese Physical Society

铁的应用提供了理论依据.

2 理论模型

由于磁铁形状的影响主要体现在磁化电流的计算方面, 并不影响本模型的构建. 为简洁起见, 本文大磁铁和小磁铁均采用圆柱形磁铁. 其他形状[18–20]的磁铁亦可参照本方法得出对应的结果. 由于大磁铁与小磁铁同极性相对并无限接近, 大磁铁的磁化强度受到小磁铁与之反向的磁场的影响, 因此大磁铁发生不可逆的局部退磁现象, 小磁铁会吸附在大磁铁上, 且大磁铁以其与小磁铁接触的表面为界限形成反常区域. 当撤掉小磁铁后, 小磁铁不发生变化, 再用小磁铁与此时的大磁铁同极性相对并慢慢靠近时, 磁铁间的作用力逐渐由斥力转变为吸力, 大磁铁形成单面双极性磁铁. 为简洁起见, 上述大磁铁的局部退磁过程简称接触反磁化过程, 而经由接触反磁化过程形成的单面双极性磁铁本文简称为反常磁铁, 反之称为正常磁铁.

设大磁铁经过 N 个小磁铁分别在不同位置接触反磁化后, 形成如图 1 所示的单面双极性磁铁. 其中大磁铁和小磁铁的半径分别为 $r_{\rm a}$ 和 $r_{{\rm b}i}$, 磁化强度分别为 $M_{\rm a}$ 和 $M_{{\rm b}i}$, 下标 $i=1,2,\cdots,N$ 用于标记小磁铁. 反常区域的中心分别为 $O_1,O_2,\cdots,O_N$, 半径分别为 $r_1,r_2,\cdots,r_N$, O_1 与大磁铁中心 O 点重合.

大量的实验结果表明, 反常磁铁的反常区域具有和大小磁铁接触面几乎相同的形状和尺寸, 因而反常区域的半径 r_i 等于在此处用于接触反磁化的小磁铁的半径 $r_{{\rm b}i}$. 在反常磁铁表面上, 反常区域的边界处出现尺寸十分小的带状过渡区域, 本模型忽略过渡区域的宽度, 并做出如下假定: 单面双极性磁铁具有分块均匀的磁化强度 $\boldsymbol{M}$, 即:

$$\boldsymbol{M}=\begin{cases}\boldsymbol{M}_i, & \text{where } d_i\leqslant r_i \quad i=1,2,\cdots,N,\\ \boldsymbol{M}_0, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{1}$$

其中, 坐标原点 $O:(0,0)$ 为大磁铁的圆心; $O_i:(x_i,y_i)$, r_i 分别为反常区域的圆心和半径, $i=1,2,\cdots,N$. $d_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2}$ 为参考点到第 i 个反常区域圆心 O_i 的距离. 假定 $\boldsymbol{M}_0=\boldsymbol{M}_{\rm a}$, 即未接触区域保持原有的磁化强度, 而反常区域的局域磁化强度 $\boldsymbol{M}_i$ 的取值与用于接触反磁化的小磁铁的磁化强度大小 $M_{{\rm b}i}$ 有关. 设大磁铁有退磁系数 α, 满足 $|\alpha|<1$, 且反常区域局域磁化强度大小满足 $M_i=\alpha(M_{{\rm b}i})M_{\rm a}$. 一般而言, 小磁铁磁化强度越大时, 大磁铁遭受外部退磁场越强, 因而退磁系数 α 越小. 经过简化后, 单面双极性磁铁可看作磁化强度分段均匀的磁介质. 考虑不存在自由电流的宏观恒定磁场:

$$\begin{cases}\nabla\cdot\boldsymbol{B}=0,\\ \nabla\times\boldsymbol{B}=\mu_0\boldsymbol{j},\end{cases} \tag{2}$$

其中 $\boldsymbol{B}$ 为磁感应强度, μ_0 为真空磁导率, $\boldsymbol{j}=\nabla\times\boldsymbol{M}$ 为磁化电流密度. 在分界面处, 磁感应强度的法向分量连续, 且切向分量的突变可由分界面上的面电流密度描述[21,22]. 设 $\boldsymbol{g}_i$ 为第 i 个反常区域分界面上的面电流密度, 有

$$\boldsymbol{g}_i=\int\boldsymbol{j}_i{\rm d}l. \tag{3}$$

则磁感应强度的突变和分界面电流密度的关系为

$$\mu_0\boldsymbol{g}_i=\boldsymbol{n}_i\times(\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{B}_0), \tag{4}$$

其中, $\boldsymbol{n}_i$ 为第 i 个分界面处的单位法向矢量, 由未接触区域指向反常区域. 由于磁场强度 $\boldsymbol{H}=1/\mu_0\boldsymbol{B}-\boldsymbol{M}$, 代入方程 (2), 它是无旋的, 因而它的切向分量是连续的. 即有:

$$\begin{cases}\boldsymbol{H}=\boldsymbol{H}_{\rm t}+\boldsymbol{H}_{\rm n},\\ \boldsymbol{H}_{{\rm t}i}=\boldsymbol{H}_{{\rm t}0},\end{cases} \tag{5}$$

其中 $\boldsymbol{H}_{{\rm t}i},\boldsymbol{H}_{{\rm n}i}$ 分别为磁场在第 i 个分界面上沿切向和法向的分量. 代入方程 (4) 即可得到:

$$\begin{aligned}\mu_0\boldsymbol{g}_i&=\boldsymbol{n}_i\times(\boldsymbol{B}_i-\boldsymbol{B}_0)\\ &=\mu_0\boldsymbol{n}_i\times(\boldsymbol{H}_i+\boldsymbol{M}_i-\boldsymbol{H}_0-\boldsymbol{M}_0)\\ &=\mu_0\boldsymbol{n}_i\times(\boldsymbol{H}_{{\rm n}i}+\boldsymbol{M}_i-\boldsymbol{H}_{{\rm n}0}-\boldsymbol{M}_0),\end{aligned} \tag{6}$$

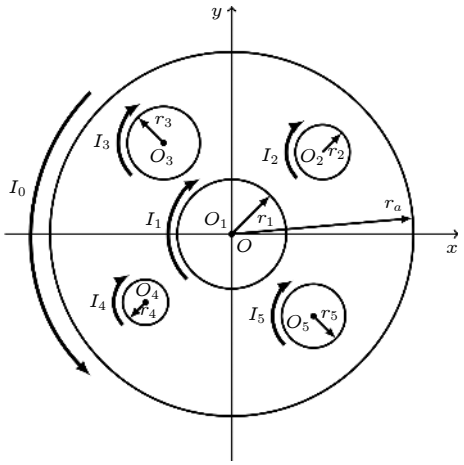

图 1 圆柱形磁铁表面多处接触反磁化示意图

Fig. 1. Schematic diagram of a cylindrical magnet with multiple local demagnetization on the surface.

则分界面上面电流密度和磁化强度的关系为

$$\boldsymbol{g}_i = \boldsymbol{n}_i \times (\boldsymbol{M}_i - \boldsymbol{M}_0). \tag{7}$$

而磁铁本身的边界条件, 令方程 (7) 中 $\boldsymbol{M}_i = 0$ 即可得到. 设全局坐标系以圆心 O 为原点, 全局坐标系下参考点为 $\boldsymbol{r}(x, y, z)$, 各个反常区域圆心相对于坐标原点的坐标平移矢量为 $\boldsymbol{t}_i = \overline{OO_i} = (x_i, y_i)$, 在各个反常区域圆心 $O_1, O_2, \cdots, O_N$ 处建立局部坐标系, 它们由全局坐标系沿着 $\boldsymbol{t}_i$ 平移得到. 由于场方程的线性性, 空间磁场来源于各个电流环贡献的线性叠加, 即参考点的磁感应强度 $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r})$ 由各个电流环在参考点产生的磁感应强度独立叠加而得:

$$\boldsymbol{B}(\boldsymbol{r}) = \sum_i^N \int \frac{\mu_0 I_i}{4\pi} \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i \times \boldsymbol{r}'}{(\boldsymbol{r}')^3}, \tag{8}$$

其中, $\mathrm{d}\boldsymbol{l}_i$ 为第 i 个电流环的局部坐标系下的线元, $\boldsymbol{r}' = (\boldsymbol{r} - \boldsymbol{t}_i) - \mathrm{d}\boldsymbol{l}_i$ 为该局部坐标系下, 参考点到电流线元的位置矢量. 特别地, 若考虑轴向充磁的圆柱形磁铁, 在 z 轴, 即圆心所在轴上的轴向磁感应强度 $B_z(z)$ 有简单的表达式:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + R^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + R^2}} \right], \tag{9}$$

其中 R, L 分别为圆柱形磁铁的半径和轴向厚度.

通过接触反磁化形成的反常磁铁存在两种简单的极限情况, 当 $N = 1$, 且 $O_1 = O$ 时, 即由大磁铁和小磁铁对心接触反磁化而形成的反常磁铁, 简称为只存在中心反磁化的反常磁铁. 以 z 轴上的轴向磁感应强度为例, 方程 (9) 应包含外环电流和内环电流两项的贡献:

$$B_z(z) = \frac{\mu_0 M_0}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + r_{\mathrm{a}}^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_{\mathrm{a}}^2}} \right] + \frac{\mu_0 (M_1 - M_0)}{2} \left[\frac{z+L}{\sqrt{(z+L)^2 + r_1^2}} - \frac{z}{\sqrt{z^2 + r_1^2}} \right]. \tag{10}$$

参考方程 (7), 当 $M_1 = M_0$ 时, $\boldsymbol{g}_1 = 0$, 内部不存在电流, 模型内部磁化强度处处均匀, 此时模型退化为正常圆柱形磁铁, 方程 (10) 退化为方程 (9); 而当 $M_1 = 0$ 时, 反常区域可视作不存在磁介质的空气, 模型退化成环形磁铁.

要特别指出的是, 本节提出的模型建立在反常磁铁具有分块均匀的磁化强度这一假设上. 当小磁铁半径比较大, 它在表面附近产生的磁场不能认为是匀强磁场, 模型计算的结果可能会产生误差. 此外, 原则上本模型只能计算反常区域彼此分离的情况, 同一块大磁铁接触反磁化所产生的反常区域不能有交集. 并且当接触反磁化次数 N 增多时, 磁铁内部磁畴分布会变得复杂, 可能将不得不考虑过渡区域对于反常磁铁的影响.

3 实验验证

本节采取两组实验模型加以验证, 用到的永磁铁均为商业 N35 钕铁硼磁铁. 两组模型分别标记为 A, B. 其中模型 A 仅中心反磁化, 模型 B 除中心反磁化外, 在半径 $r = 12.5$ mm 处的圆周上均匀分布四个接触反磁化点, 简称为中心及轨道接触反磁化, 两组模型材料细节见表 1. 通过分别测量两组反常磁铁轴向的磁感应强度与轴向相对距离的关系, 验证第 2 节理论计算结果的准确性.

表 1 A, B 两组模型材料参数

Table 1. Material parameters of the two models.

组别	A	B
大磁铁尺寸/mm	Φ 40 × 2.5	Φ 40 × 2.5
小磁铁a尺寸/mm	Φ 12 × 18	Φ 12 × 18
小磁铁b尺寸/mm	Null	Φ 6 × 20

实验过程分为大磁铁的接触反磁化过程和反常磁铁磁感应强度的测量两步. 以模型 A 的接触反磁化过程为例, 如图 2 所示, 图 2(a) 和图 2(b) 为用于实验的轴向充磁正常磁铁, 在磁显片下能观察

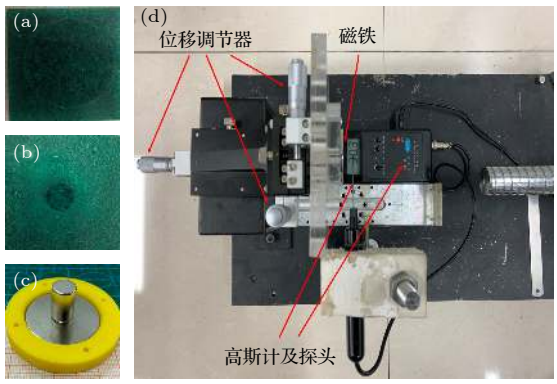

图 2 (a), (b) 磁显片下 Φ 40 × 2.5 和 Φ 12 × 18 的正常磁铁; (c) 中心接触反磁化结果: 小磁铁被吸附在大磁铁中心; (d) 磁感应强度测量实验装置

Fig. 2. (a), (b) Normal magnets of size Φ 40 × 2.5 and Φ 12 × 18 under magnetic field viewing film; (c) the small magnet is observed to be attracted to the center of the large magnet after the local demagnetization process at the center of the large magnet; (d) experiment setup for the measurement of magnetic induction intensity.

到表面均匀分布的磁场. 将大磁铁和小磁铁同极性相对并固定在对中器件后, 使二者缓慢靠近. 如图 2(c) 所示, 当相对距离足够小时小磁铁会吸附到大磁铁上. 测量磁感应强度的实验装置如图 2(d) 所示, 将高斯计 (型号 BST100) 探测头和磁铁中心对齐后, 通过调节螺旋测距仪测得不同位置处的磁感应强度.

3.1 中心接触反磁化

在远场情况下, 反常磁铁的磁感应强度应和正常磁铁具有相近的值. 本节先测量了大、小两个正常磁铁 ($\Phi 40\times 2.5$和$\Phi 12\times 18$) 在z轴上的轴向磁感应强度 $B_z(z)$. 这样, 一方面在方程 (8) 中令 $N=0$即可验证磁化电流法的准确性, 另一方面也可作为估算磁化强度的依据. 如图 3(a) 和图 3(b) 所示, 大磁铁和小磁铁的磁化强度分别为 $M_{\rm a}=6.8818\times 10^5$ A/m和 $M_{\rm b}=6.1387\times 10^5$ A/m. 实验结果和磁化电流模型符合较好. 除了实验测量误差外, 整体实验误差主要来源于磁铁尺寸误差和磁化强度误差. 在轴向充磁圆柱形磁铁中, 依据方程 (9), 轴向磁感应强度 $B_z(z)$计算结果与真实值应只相差常数倍. 在我们选用的大磁铁$\Phi 40\times 2.5$中, 磁铁高度的变化对磁感应强度的影响较大, 高度每变化 1 mm, 表面中心磁感应强度改变约 21.23 mT; 而磁铁半径每变化 1 mm, 表面中心磁感应强度约改变 2.63 mT, 半径带来的影响可以忽略不计. 因而靠近表面时, 磁铁高度和磁化强度的误差会被放大.

本模型中, 大磁铁接触反磁化后, 具有一个同心的反常圆形区域. 如图 4(a) 所示, 反常磁铁中有两个电流环对空间磁场做出贡献. 磁显片下的反常磁铁如图 4(b) 所示, 在中心出现了宽度 1 mm 左右的带状过渡区域, 其内部包含一个直径恰好为 12 mm 的圆形反常区域.

在本例中取退磁系数$\alpha=0.6471$进行计算. 如图 5(a) 所示, 方程 (10) 计算的结果和实验结果相

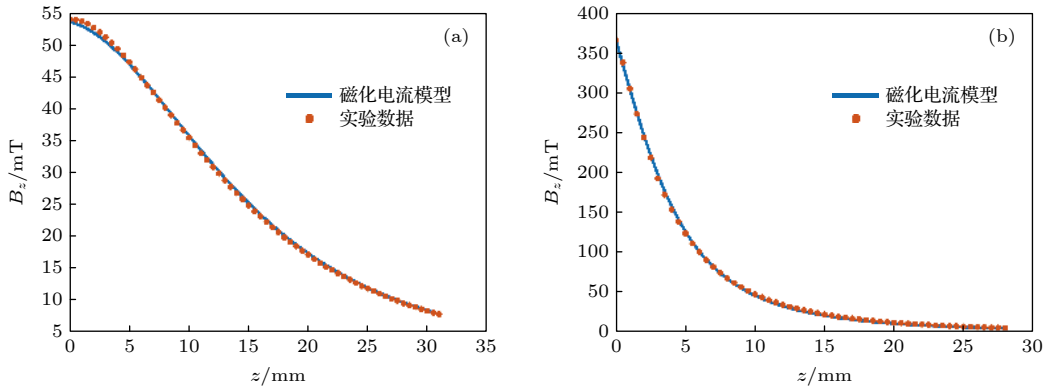

图 3 正常磁铁轴向磁感应强度 $B_z(z)$. 红色圆点为实验测量结果, 蓝色直线为磁化电流模型计算结果 (a) 大磁铁 Φ 40 × 2.5; (b) 小磁铁 Φ 12 × 18

Fig. 3. The axial magnetic induction intensity $B_z(z)$ of a normal magnet. Red dot denotes the experimental data whereas the blue line denotes the theoretical results: (a) Larger magnet Φ 40 × 2.5; (b) smaller magnet Φ 12 × 18.

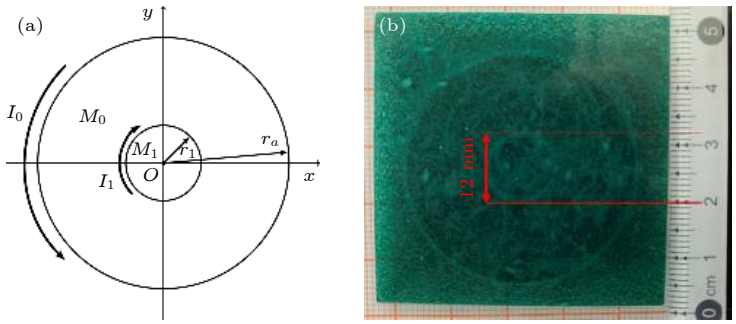

图 4 模型 A: 仅中心接触反磁化的圆柱磁铁 (a) 反常磁铁示意图; (b) 磁显片下的反常磁铁

Fig. 4. Model A: Cylindrical magnet with local demagnetization at the center: (a) Diagram of the abnormal magnet; (b) the abnormal magnet under magnetic field viewing film.

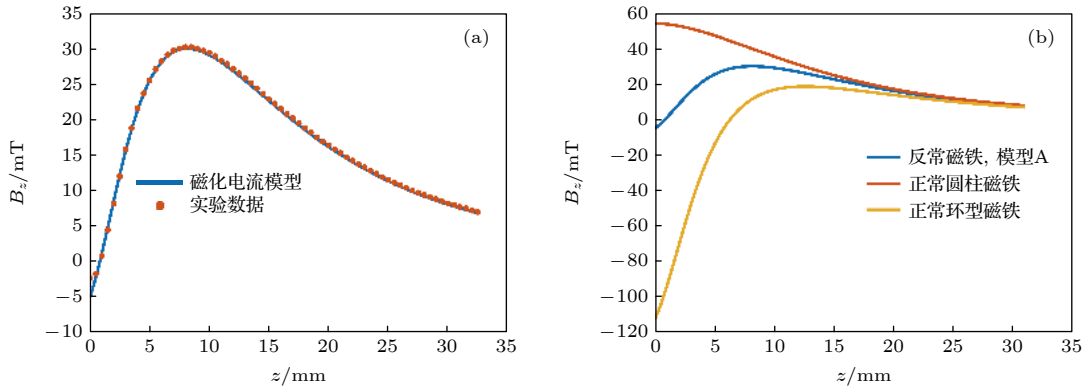

图 5 (a) 模型 A 反常磁铁轴向磁感应强度 $B_z(z)$. 红色圆点为实验测量结果, 蓝色直线为磁化电流模型计算结果. (b) 正常圆柱形磁铁, 反常磁铁和正常环形磁铁轴向磁感应强度, 其中三种磁铁外形尺寸均一致

Fig. 5. (a) The axial magnetic induction intensity $B_z(z)$ for the abnormal magnet. Red dot denotes the experimental data whereas the blue line denotes the theoretical results. (b) The axial magnetic induction intensity $B_z(z)$ of a normal cylindrical magnet, an abnormal magnet and a normal ring magnet, of which the dimensions of the three are the same.

符合, 随着离磁铁表面距离的减小, 反常区域的作用逐渐体现出来, 从而转变了磁感应强度的增长方向. 即使内环电流的强度相较于外环电流的强度要小一些, 接触反磁化的作用在近场处仍旧很明显. 这是因为, 相较于外环电流, 内环电流到 z 轴上参考点的距离要小得多, 因而外环电流的贡献实际要小一些. 考虑第 2 节所述的模型的两种极限情况, 图 5(b) 分别绘制了相同尺寸下正常磁铁、环形磁铁和反常磁铁的轴向磁感应强度随轴向距离改变关系的模拟结果, 其中环形磁铁的内环直径与单面双极性磁铁反常区域的直径相同.

很显然, 在远场时, 三者的磁感应强度相差无几. 若从磁化电流模型考虑, 如图 4(a) 所示, 正常磁铁对应只有最外圈的电流环做贡献的情形, 而环形磁铁和单面双极性磁铁除此之外还有内圈反向电流环的贡献, 但由于远场时内环电流和外环电流到 z 轴上参考点的距离几乎一致, 而内环电流的强度要小得多. 因而在远场时, 内圈电流环的贡献几乎可以忽略不记. 另外, 只有在距离较靠近磁铁表面时, 反常效应才显现出来. 如方程 (7) 所示, 环形磁铁对应于 $M_i = 0$ 的情况, 其反向电流强度最大, 因而其在近场处的磁感应强度最小. 在 z 轴上, 可参考方程 (10) 的第二项, 它对应于反向电流环产生的轴向磁感应强度. 方程 (10) 第二项的系数为 $(M_1 - M_0)$, 由于环形磁铁的这一系数为 $(-M_0)$, 小于反常磁铁的系数 $(\alpha - 1)M_0$, 因而整体上环形磁铁的反向磁感应强度要更小. 反常磁铁实际上因为反常区域的存在, 抵消了环形磁铁的一部分反向电流. 从这个角度看, 仅中心接触反磁化的单面双极性磁铁可看作可调控近场磁感应强度的环形磁铁, 其中磁感应强度的调节范围介于正常圆柱形磁铁和环形磁铁之间. 且该调控可通过改变小磁铁的磁化强度来实现.

3.2 中心及轨道接触反磁化

第 2 节的理论模型能够处理多处接触反磁化的情况, 每个电流环独立贡献. 参考方程 (8), 相对于某个固定的参考点, 各个电流环的贡献彼此只相差一个坐标平移. 如图 6(a) 所示, 在模型 A 的基础上, 分别在点 $O_2(12.5, 0), O_3(-12.5, 0), O_4(0, 12.5), O_5(0, -12.5)$ 处用小磁铁 (尺寸 Φ 6 × 20) 对准圆心进行局部接触反磁化就得到了模型 B 的反常磁铁. 其中 Φ 6 × 20 小磁铁的磁化强度为 $M_{\rm b2} = 8.3393 \times 10^5$ A/m. 如图 6(b) 所示, 在磁显片下, 反常磁铁共有 5 处反常区域, 直径均和用于接触反磁化的小磁铁的直径相当. 首先, 仍考虑 z 轴上的轴向磁感应强度 $B_z(z)$, 以图 6(a) 中的示意图为参照, 相较于模型 A 的反常磁铁, 模型 B 的反常磁铁多出 4 个完全对称的反向电流环, 但由于 z 轴位于这些电流环的外部, 因而他们在 z 轴上的磁感应强度方向沿 z 轴的负方向, 而 z 轴位于外环电流 I_0 的内部, 则这四个电流环及外环电流在 z 轴上的轴向磁感应强度方向一致, 而和内环电流 I_1 产生的 $B_z(z)$ 的方向相反. 因而在 z 轴上, 在反常效应起作用的范围内, 模型 B 的轴向磁感应强度 $B_z(z)$ 反而由于四个电流环的存在, 要大于模型 A 的 $B_z(z)$.

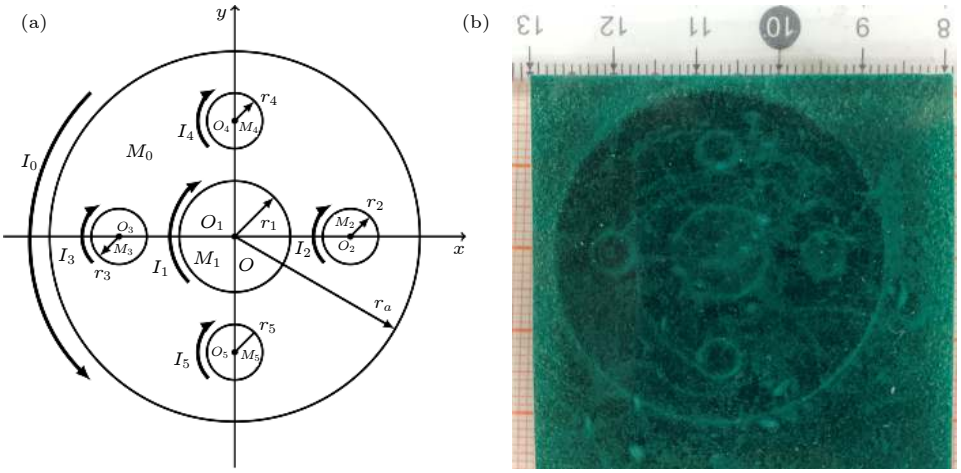

图 6 模型 B: 中心及轨道反磁化的圆柱形磁铁 (a) 反常磁铁示意图. 为便于阅读, 图中四个小圆的半径放大了一倍. (b) 磁显片下的反常磁铁

Fig. 6. Model B: Cylindrical magnet with local demagnetization at both the center and the orbit: (a) Diagram of the abnormal magnet. For the convenience of reading, the radii of the four small circles in the figure are doubled. (b) The abnormal magnet under magnetic field viewing film.

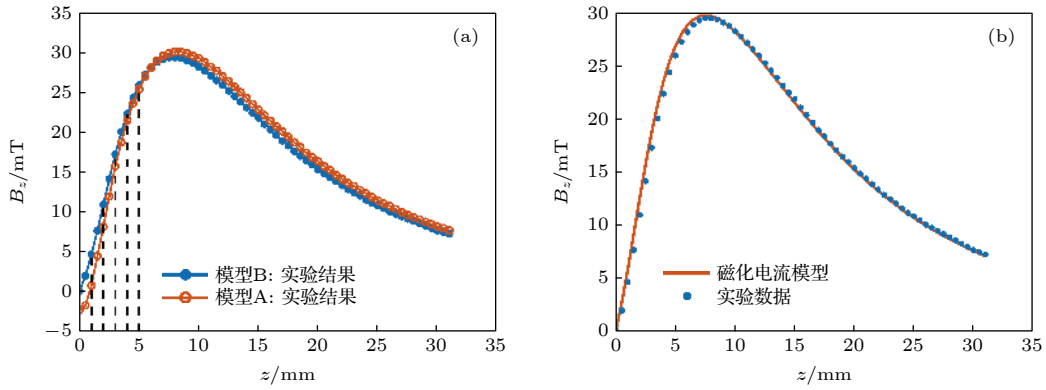

图 7 (a) 模型 A, B 反常磁铁轴向磁感应强度的实验数据; (b) 模型 B 反常磁铁轴向磁感应强度. 蓝色圆点为实验测量结果, 红色直线为磁化电流模型计算结果

Fig. 7. (a) Experimental data of axial magnetic induction for abnormal magnets of type A and B; (b) the axial magnetic induction intensity of the abnormal magnet of type B. Blue circle denotes the experimental data whereas the red line denotes the theoretical results.

图 7(a) 给出了模型 A 和模型 B 反常磁铁 z 轴上的轴向磁感应强度 $B_z(z)$的实验数据, 二者均在距离磁铁表面相同处测量磁感应强度, 在图 7(a) 上二者 x 轴上的数据点相同. 在远场时二者磁感应强度 $B_z(z)$几乎一致, 而在距离相对近一些时, 模型 B 对称的四个电流环 I_2, I_3, I_4, I_5的作用开始显现出来, 如图 7(a) 中虚线标注所示, 在 $z \in (1, 5)$ mm 的相同位置处, 模型 B 的磁感应强度显著高于模型 A 的磁感应强度. 而当距离趋近于 0, 即靠近磁铁上表面时, 起作用的主要是内环的反向电流 I_1, 因而二者磁感应强度差异值又开始减小. 模型 B 包含中心 Φ 12的反常区域和轨道上四个 Φ 6的全同反常区域, 各自区域内取退磁系数 $\alpha_{12} = 0.6471$, $\alpha_6 = 0.5016$. 计算得到的 $B_z(z)$和实验测得的数据绘制于图 7(b) 中, 理论计算和实验测量结果符合良好.

以上选取的计算轴 (z轴) 刚好在轨道四个电流环 I_2, I_3, I_4, I_5所形成的反常区域的外部, 并且距离这四个电流环的中心 O_2, O_3, O_4, O_5较远, 这四个电流环对整个磁感应强度 $B_z(z)$的贡献并不太大. 为清晰地区别模型 A 和 B, 选取在距离反常磁铁表面 3 mm 处的 xy 平面上, 沿 x 轴方向的线段为计算轴, 计算并测量其 x 方向的磁感应强度 $B_x(x)$. 这样, 该计算轴刚好经过了两个轨道电流环 I_2和 I_3.

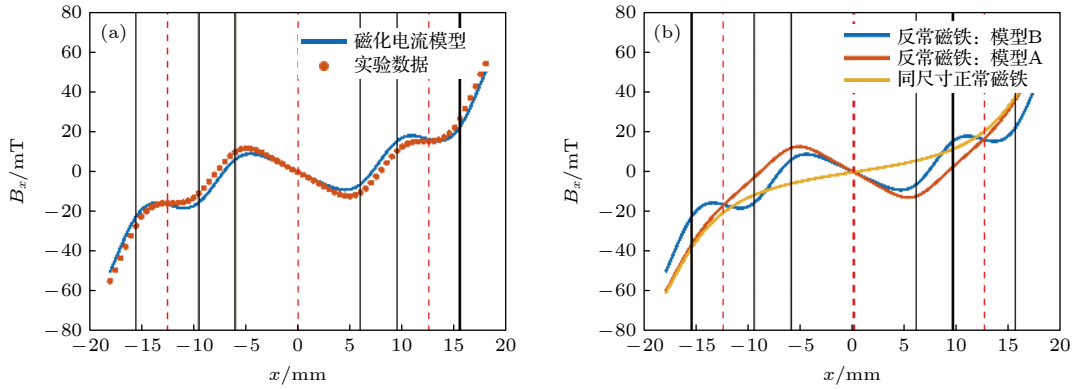

图 8 (a) 在 $z=3$ mm 平面上, 模型 B 反常磁铁的水平磁感应强度 $B_x(x)$, 红色圆点为实验测量结果, 蓝色直线为磁化电流模型计算结果; (b) 在 $z=3$ mm 平面上, 模型 A, B 反常磁铁及正常磁铁的水平磁感应强度 $B_x(x)$ 的对比

Fig. 8. (a) The horizontal magnetic induction intensity $B_x(x)$ of the abnormal magnet of type B at $z=3$ mm. Red circle denotes the experimental data whereas the blue line denotes the theoretical results. (b) Comparison of horizontal magnetic induction intensity $B_x(x)$ of the abnormal magnets of type A and B and a normal magnet with the same size at $z=3$ mm.

图 8(a) 给出了 $B_x(x)$ 的实验和计算结果, 二者符合良好. 其中, 沿竖直方向的黑色实线标注了反常区域的边界位置, 红色虚线为反常区域的圆心. 当 $z=3$ mm, $y=0$ 时, 沿着 x 轴方向, 反常区域的边界点出现在中心反常区域 $x=\pm6$ mm 和轨道反常区域 $x=\pm9.5$ mm, ±15.5 mm, 且各自的圆心分别为 $x=0$, ±12.5 mm. 图 8(b) 给出了相同情况下模型 A, B 及正常磁铁在 $z=3$ mm 平面处的水平磁感应强度 $B_x(x)$. 参考图 4(a) 和图 6(a), 模型 A, B 的反常磁铁都存在一个相同的中心反向电流环, 在该电流环所包围的圆域内部二者的磁感应强度相差无几. 脱离该圆域后, 模型 A 的反常磁铁逐渐回归到正常磁铁的趋势, 意味着随着半径 $|x|$ 的增大, 中心反向电流环的影响逐渐减小. 而由于模型 B 的反常磁铁在半径 $r=12.5$ mm 的圆上还存在四个对称的反向电流环, 相应地, 在 $|x|$ 增大到脱离中心反常区域时, 又受到轨道上反常区域的影响. 特别注意到图 8(b) 中磁感应强度 $B_x(x)$ 与三条红色虚线的交点, 它们是反常磁铁模型 A、B 和正常磁铁的水平磁感应强度在反常区域中心的值. 在第一个交点 $x=-12.5$ mm 处, 模型 A 与模型 B 的水平磁感应强度 B_x 相等并且高于正常磁铁在此处的水平磁感应强度. 这是由于模型 B 轨道上的电流环 I_2, I_4 和 I_5 距离点 $x=-12.5$ 太远, 他们产生的磁感应强度可以忽略, 且电流环 I_3 在中心产生的水平磁感应强度 $B_x=0$. 在其他交点处, 也有类似的结果. 因而, 模型 B 的反常磁铁亦可看作可调控局部磁感应强度的多孔磁铁.

4 参数分析

第 3 节的结果表明, 接触反磁化形成的圆柱形反常磁铁可以视作可调控局部空间磁感应强度的多孔环形磁铁. 若已知大磁铁退磁曲线, 调控措施主要通过改变小磁铁的尺寸和磁化强度来实现. 一般来说, 在其他条件都保持不变时, 小磁铁半径的改变主要影响反向电流环的大小, 小磁铁高度的改变可能影响磁化强度的大小. 为更细致地探究小磁铁半径及磁化强度的变化对反常磁铁的影响, 本节选取了半径和高度各不相同的多组小磁铁来中心接触反磁化尺寸为 Φ 40 × 2.5 的大磁铁, 小磁铁的尺寸及磁化强度信息如表 2 所列. 实验仍测量反常磁铁沿 z 轴的轴向磁感应强度 $B_z(z)$.

本节定义两个指标: 反常磁铁表面中心轴向磁感应强度 B_{sz} 和转变点的位置, 即轴向上 $\partial B_z/\partial z=0$ 的位置. 二者用于衡量反常区域的强度, 后者可

表 2 小磁铁尺寸、磁化强度及相应反常磁铁指标

Table 2. The size and magnetization of small magnet and the indicators of corresponding abnormal magnet.

小磁铁尺寸/mm	小磁铁磁化强度/(A·m^{-1})	反常磁铁转变点位置/mm	反常磁铁的 B_{sz}/mT
Φ15 × 10	6.565×10^5	7.5	9.9
Φ15 × 15	6.614×10^5	8.0	8.9
Φ15 × 20	6.712×10^5	8.2	3.4
Φ10 × 10	6.103×10^5	7.1	–13.9
Φ10 × 15	6.207×10^5	8.0	–18.8
Φ10 × 20	6.365×10^5	8.3	–24.3

根据方程 (10) 计算. 反常磁铁的空间磁场随小磁铁磁化强度的改变是简单的, 由于小磁铁半径及接触反磁化的位置皆保持不变, 小磁铁的磁化强度 $M_{\rm b}$ 只影响了反常区域的等效磁化强度 M_1. 在本节选取的半径相同的小磁铁中, 小磁铁高度越大它的磁化强度 $M_{\rm b}$ 就越大, 因而大磁铁反常区域受到的外部退磁场越大, 最终使得大磁铁反常区域的等效磁化强度 M_1 越小. 由方程 (7) 和方程 (10) 可知 M_1 越小, 反向电流环强度的绝对值越大, 因而轴向磁感应强度 $B_z(z)$ 越小.

图 9(a) 和图 9(b) 绘制了反常区域直径分别为 15 和 10 mm 的反常磁铁的轴向磁感应强度 $B_z(z)$, 图中对应颜色的竖直虚线标注了三组反常磁铁转变点的位置, 数值见表 2.

实验结果和本文模型给出的预测一致, 即小磁铁高度的改变影响到反常磁铁的等效磁化强度时, 由于小磁铁半径不变, 结果上只改变了反向电流强度的大小, 因此反常磁铁空间磁感应强度的变化也只受到反向电流环强度改变的影响. 因而一般来说, 小磁铁半径不变, 但磁化强度越大时, 反常磁铁的空间磁感应强度受到反向电流环的影响越大, 因而 $B_{\rm sz}$ 越小, 而转变点的位置也越远离磁铁表面.

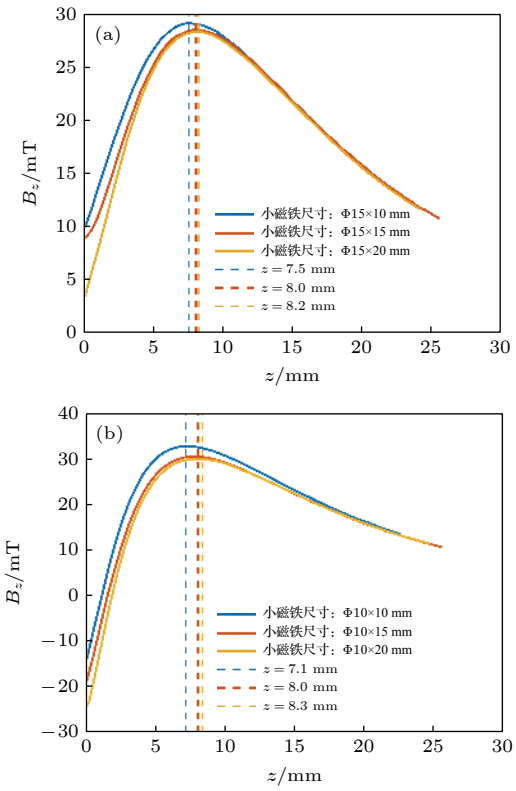

图 9 不同厚度小磁铁 (a) Φ15 × 10, Φ15 × 15 和 Φ15 × 20 以及 (b) Φ10 × 10, Φ10 × 15 和 Φ10 × 20 接触反磁化大磁铁 Φ40 × 2.5 后得到的反常磁铁, 其沿 z 轴的轴向磁感应强度 $B_z(z)$

Fig. 9. The axial magnetic induction $B_z(z)$ of larger magnet Φ40 × 2.5 demagnetized by smaller magnets of different heights with (a) Φ15 × 10, Φ15 × 15, Φ15 × 20 and (b) Φ10 × 10, Φ10 × 15, Φ10 × 20.

而当小磁铁半径改变时, 不仅会影响反常磁铁中反常区域的等效磁化强度, 还会影响到反向电流环的位置. 考虑小磁铁半径在小范围内变化, 因而可以忽略为此带来的磁化强度的变化, 依据方程 (10), 对小磁铁半径 r_1 求导有:

$$f_r(r_1,z)=\frac{\partial B_z}{\partial r_1}=\frac{(M_1-M_0)\mu_0}{2}\times\left[\frac{r_1 z}{(r_1^2+z^2)^{3/2}}-\frac{r_1(L+z)}{(r_1^2+(L+z)^2)^{3/2}}\right],\tag{11}$$

注意到, 当距离 $z\to+\infty$ 时, $f_r(r_1,z)\to 0$, 对于轴向磁感应强度 $B_z(z)$, 在远场处, 小磁铁半径的改变带来的影响可以忽略. 若考虑反常磁铁表面中心轴向磁感应强度 $B_{\rm sz}$, 在方程 (11) 中令 $z=0$, 当 $r_1>0$ 时有 $f_r(r_1,z)>0$ 恒成立, 因而随着半径 r_1 的增大, $B_{\rm sz}$ 也会增大, 这也符合我们实验观测的结果. 从电流模型也能直观地得出这一结论, 当反向电流环强度几乎一致时, 小磁铁半径越大对应反常磁铁的反向电流环越远离中心, 因而在表面中心处反向电流环的效果越弱, 因此 $B_{\rm sz}$ 也会越大.

以上结果均表明, 接触反磁化形成的反常磁铁, 其反常效果仅仅在近场处体现, 在远场处表现得和正常磁铁一样. 不仅如此, 由于大磁铁几乎只在反常区域内受到小磁铁产生的外部退磁场的影响, 反常效果也仅在反向电流环所包围的区域内体现. 正如图 8(b) 的结果, 在反常区域内部, 磁感应强度受到反向电流环的影响较大, 而在反常区域外, 磁感应强度的变化逐渐回归到正常磁铁的变化趋势. 由于本文模型的圆对称性, 这一规律在任何水平方向都是成立的.

在距离磁铁表面 $z_0=5$ mm 的平面上, 计算了两个反常磁铁的磁感应强度, 他们由直径均为 15 mm, 高度分别为 20 和 10 mm 的小磁铁接触反磁化而形成. 以这两块反常磁铁磁感应强度的差值: $B_\beta(x,y,z_0)=B_{\beta h20}(x,y,z_0)-B_{\beta h10}(x,y,z_0)$ 来表现这两块反常磁铁反常效应的差别. 其中等式左边的下标 $\beta=$ t, n, abs 分别代表磁感应强度切向, 法向大小的差值和磁感应强度绝对值的差值, 法向对应于 z 轴的正向. 等式右边的下标 $h20, h10$ 对应小

磁铁的高度为20和10 mm. 在$B_\beta(x,y,z_0)=0$的区域, 是外环电流起主导的区域. 除此之外的区域, 我们认为是反常效应起作用的区域. 如图 10(a)—(c) 所示, 图中红虚线标注的圆为反常区域的边界, 它是直径为 15 mm 的圆弧. 很显然在远离反常区域时, 磁感应强度的差异值迅速衰减, 反常磁铁在此时表现得和正常磁铁一致.

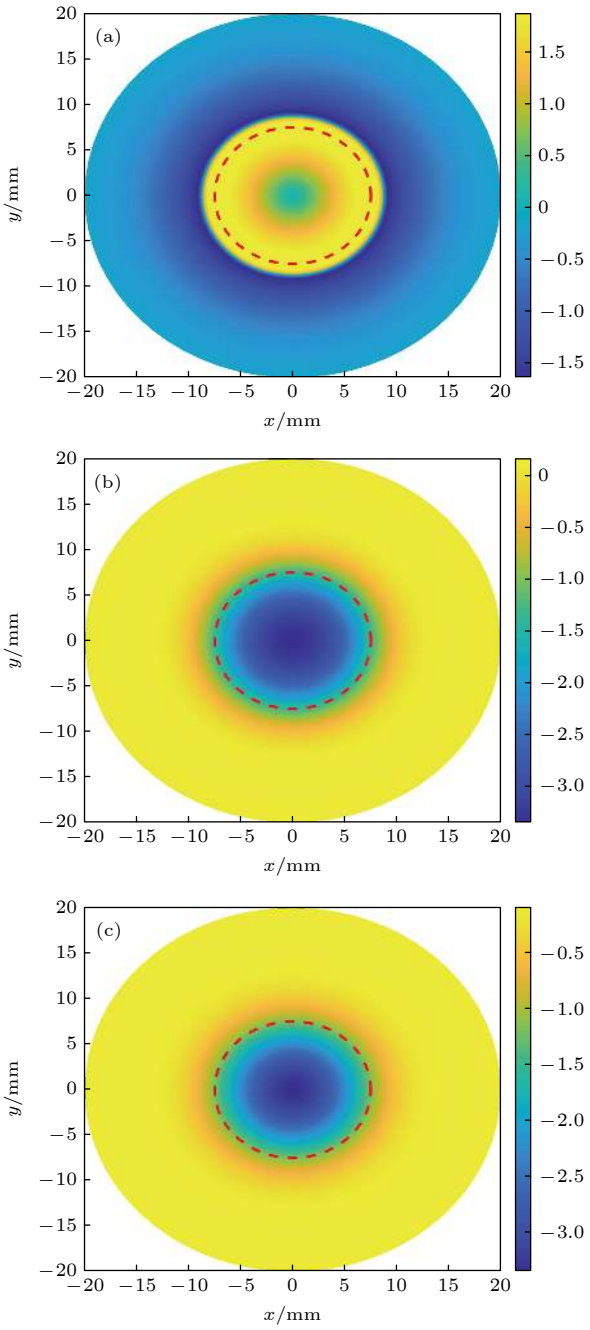

图 10 由小磁铁 Φ15 × 20 和 Φ15 × 10 接触反磁化形成的反常磁铁 C, D, 在远离磁铁表面 $z=5$ mm 处二者磁感应强度的差值: (a) 反常磁铁 C 与 D 的切向磁感应强度差值 $B_{\rm t}$; (b) 反常磁铁 C 与 D 的法向磁感应强度差值 $B_{\rm n}$; (c) 反常磁铁 C 与 D 的磁感应强度的绝对值的差值 $B_{\rm abs}$

Fig. 10. Abnormal magnets C, D are locally demagnetized by smaller magnets of size Φ15 × 20 and Φ15 × 10 at the center, the difference of magnetic induction between C and D at the plane 5 mm away from the abnormal magnets' surface: (a) The tangential difference B_t; (b) the axial difference $B_{\rm n}$; (c) the difference of absolute value $B_{\rm abs}$.

可以总结, 对于由接触反磁化形成的反常磁铁而言, 它的反常效应只体现在近场且比反常区域略大一些的区域内. 而在远离这些区域时, 反向电流环的作用迅速衰减. 在调节这一反常效应时, 用于接触反磁化, 提供反向磁场的小磁铁和大磁铁的接触面积决定了反常区域的大小, 而小磁铁的磁化强度决定了反常区域边界上反向电流环的强度. 因而当需要有更大反常区域, 且有更强的反常效应的反常磁铁时, 应选用磁化强度较大且大小磁铁接触面积更大的小磁铁作为反向磁场的提供者. 但是需要指明, 若小磁铁的半径过大, 就不能看作匀强磁场源, 实际情况会更复杂.

5 结 论

本文研究了一类由同极性相面对的大小磁铁, 在外力作用下相互接触后形成的单面双极性反常磁铁, 其中局部反常区域具有和两个磁铁接触面一样的形状和尺寸. 需要说明的是, 本文研究的单面双极性磁铁不同于多极充磁形成的单面多极性磁铁 (它的极性由磁化强度的方向来定义), 由于小磁铁在整个接触反磁化过程中几乎不发生改变, 因此本文反常磁铁的双极性指代的是在反常磁铁表面上, 既有和小磁铁相吸引, 又有和小磁铁相排斥的区域. 至于接触反磁化形成的反常磁铁, 它的局部磁化强度原则上可从大磁铁的退磁曲线上得到. 本文研究取得了以下结论:

1) 推导并建立了反常磁铁的等效磁化电流模型, 可以有效计算反常磁铁的空间磁感应强度. 其中, 反常区域分界面上的电流可由磁化强度的突变描述, 反常磁铁所产生的空间磁场可看作由多个电流环的贡献叠加而成.

2) 设计了仅中心反磁化和多处反磁化两组实验来检验等效模型的准确性, 实验测量结果和理论计算模型相符合. 模型表明, 对于大小永磁铁均为圆柱形磁铁的情况, 接触反磁化形成的反常磁铁可等效为可调节局部磁场的多环环形磁铁.

3) 给出了小磁铁尺寸变化对于反常磁铁的影响规律. 小磁铁尺寸的变化主要影响到小磁铁的磁

化强度和小磁铁与大磁铁的接触面积. 小磁铁的磁化强度越大, 则反常区域具有更小的等效磁化强度, 分界面上的反向电流强度绝对值越大, 因而反常效应越明显. 而小磁铁和大磁铁的接触面积决定了反常区域的大小.

4) 在垂直于反常磁铁表面的方向上, 反常效应是近场效应, 在平行于磁铁表面的平面内, 反常效应几乎只在反常区域内体现, 远离反常区域后便迅速衰减.

参考文献

[1] Coey J M D 2002 *J. Magn. Magn. Mater.* **248** 3
[2] Lu Z, Wang Z X, Zhou Y, Lu X L 2018 *J. Sound Vib.* **423** 18
[3] Fu H L, Theodossiades S, Gunn B, Abdallah I, Chatzi, E 2020 *Nonlinear Dyn.* **101** 4
[4] Cottone F, Vocca H, Gammaitoni L 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 080601
[5] Lai S K, Wang C, Zhang L H 2019 *Mech. Syst. Signal Process* **122** 87
[6] Leng Y G, Tan D, Liu J J, Zhang Y Y, Fan S B 2017 *J. Sound Vib.* **406** 146
[7] Schomburg W K, Reinertz O, Sackmann J, Schmitz K 2020 *J. Magn. Magn. Mater.* **506** 166694
[8] Peng Q L 2007 *J. Magn. Magn. Mater.* **309** 1
[9] Zhang Y Y, Leng Y G, Tan D, Liu J J 2018 *J. Magn.* **23** 4
[10] Caciagli A, Baars R J, Philipse A P, Kuipers B W 2018 *J. Magn. Magn. Mater.* **456** 423
[11] Zhang Y Y, Leng Y G, Liu J J, Tan D 2019 *J. Magn.* **24** 3
[12] Zhang Y Y, Leng Y G 2020 *Int. J. Appl. Electromagn. Mech.* **62** 2
[13] Ruoho S, Arkkio A 2008 *IEEE Trans. Magn.* **44** 7
[14] Campbell P 1996 *Permanent Magnet Materials and Their Application* (Cambridge, U.K.: Cambridge University Press) pp64–65
[15] Sun S L, Leng Y G, Zhang Y Y, Su X K, Fan S B 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 140502 (in Chinese) [孙帅令, 冷永刚, 张雨阳, 苏徐昆, 范胜波 2020 物理学报 **69** 140502]
[16] Shin H S, Jang G H, Choi J Y 2020 *AIP Adv.* **10** 1
[17] Ponce E A, Leeb S B 2020 *IEEE Trans. Magn.* **56** 3
[18] O'Connell J L, Robertson W S, Cazzolato B S 2020 *J. Magn. Magn. Mater.* **510** 166894
[19] De Visschere P 2005 *J. Phys. D: Appl. Phys.* **38** 3
[20] Nguyen V T, Lu T F 2019 *J. Magn. Magn. Mater.* **491** 165569
[21] Landau L D, Lifschitz E M 1975 *The Classical Theory of Fields* (Vol. 2) (Oxford: Pergamon Press) pp89–108
[22] Landau L D, Lifschitz E M 1984 *Electrodynamics of Continuous Media* (Vol. 8) (Oxford: Pergamon Press) pp105–113

Study on the model of space magnetic induction of a bi-pole magnet*

Su Xu-Kun Leng Yong-Gang† Zhang Yu-Yang Fan Sheng-Bo

(*School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin* 300350, *China*)

(Received 8 March 2021; revised manuscript received 6 April 2021)

Abstract

This article proposed an equivalent model to calculate the magnetic field of a special multipole magnet. The special multipole magnet is formed when two permanent magnets of large dimension differences are forced into contact with the same polarity, after the removal of the small magnet, the large magnet becomes the multipole magnet. In the process, the interacting force between the two magnets changes from repulsive force to attractive force as the two magnets approach. Moreover, the reversed pole of the multipole magnet occupies an area roughly the same as the contact area of the two magnets. Qualitatively, the large magnet possesses a lower load line than the small magnet, which suggests that the large magnet is prone to irreversible demagnetization, whereas the small magnet tends to remain unperturbed. Quantitatively, taking axially magnetized cylindrical magnets as examples, the equations for the magnetic fields were derived based on the magnetizing current theory under the assumption that the magnetization of the multipole magnet is locally homogeneous. To validate our equivalent model, two special multipole magnets (model A and model B) have been studied both theoretically and experimentally. Model A was obtained by a large magnet ($\Phi 40 \times 2.5$) demagnetized at the center by a small magnet ($\Phi 12 \times 18$), model B was obtained by demagnetizing model A with 4 extra small magnets ($\Phi 6 \times 20$) at specific symmetrical positions around the center. Measurements for the magnetic induction intensity of the special multipole magnets are in good agreement with the theoretical calculations. The results suggested that the special multipole magnets of model A and B are equivalent to ring magnets and porous magnets, where the near field magnetic induction of the multipole magnets can be adjusted by the small magnets. In addition, a parameter analysis was carried out to study the influence of small magnets on the special multipole magnets. The results indicated that the reversed pole behavior of the special multipole magnet works mainly at positions near the magnet, and decreases rapidly as the observation point moves away from the reversed area. Our model may provide a theoretical basis and alternative solutions for electromechanical systems using multipole magnets.

Keywords: magnetic field calculation, local demagnetization, permanent magnet, bi-pole magnet

PACS: 75.50.Ww, 41.20.Gz, 02.60.Cb **DOI:** 10.7498/aps.70.20210448

* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2018YFD0700704) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 51675370).

† Corresponding author. E-mail: leng_yg@tju.edu.cn