

一种基于摄动理论的不连续系统Lyapunov指数算法

马召召 杨庆超 周瑞平

Lyapunov exponent algorithm based on perturbation theory for discontinuous systems

Ma Zhao-Zhao Yang Qing-Chao Zhou Rui-Ping

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 240501 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210492

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210492>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

一种基于摄动理论的不连续系统 Lyapunov 指数算法*

马召召¹⁾ 杨庆超^{2)†} 周瑞平¹⁾

1) (武汉理工大学能源与动力工程学院, 武汉 430063)

2) (海军工程大学舰船与海洋学院, 武汉 430033)

(2021年3月13日收到; 2021年8月17日收到修改稿)

Lyapunov 指数是识别系统非线性动力学特征的重要标志, 但是目前的算法通用性不足且计算流程复杂. 本文在经典的 Lyapunov 指数算法的基础上, 基于摄动理论提出了一种适用于不连续系统的 Lyapunov 指数计算方法. 首先, 以系统状态参数初始值和沿相空间每个基本矢量的扰动量为初始条件, 确定相轨迹. 其次, 采取差商近似导数法, 获得 Jacobi 矩阵的近似矩阵. 然后, 对 Jacobi 矩阵进行特征值提取, 得到系统的 Lyapunov 指数谱. 最后, 将新算法应用到二自由度干摩擦冲击振荡器系统实例中, 并将计算结果与同步方法的计算结果进行对比, 对新算法的有效性进行验证. 该算法不仅适用于离散系统和连续时间系统, 而且能够快速计算复杂不连续系统的 Lyapunov 指数, 为确定复杂不连续系统的动力学行为提供了新思路.

关键词: Lyapunov 指数, 不连续系统, 摄动理论

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq, 06.60.Mr

DOI: 10.7498/aps.70.20210492

1 引言

Lyapunov 指数是在局部和全局稳定性准则下确定系统稳定性的数值, 它表征了系统在相空间中相邻轨道间收敛或发散的指数率^[1]. 从数学角度, Lyapunov 指数是状态转移矩阵的特征值, 决定了系统吸引子上轨迹无穷小扰动的演化进程. 因此, Lyapunov 指数被认为是衡量系统对初始条件敏感性的重要指标. 所有 Lyapunov 指数值的和决定了系统在相空间中体积的发散度, 所有 Lyapunov 指数值的和为负值是存在全局稳定吸引子的充要条件, 并且表明系统是耗散的; 若所有 Lyapunov 指数均为负值, 则吸引子为稳定点; 对于 n 维系统, 如果前 m 个 Lyapunov 指数等于零而另外 $n - m$ 个 Lyapunov 指数均为负值, 则吸引子为 m 维环面;

若最大 Lyapunov 指数为正值, 则为混沌运动, 若存在不止 1 个 Lyapunov 指数为正值, 则为超混沌运动. 对于保守系统, 所有 Lyapunov 指数值的和为零, 若所有 Lyapunov 指数值的和为正值, 则表明系统是全局不稳定的, 相轨迹呈指数发散.

Benettin 等^[2]及 Shimada 和 Nagashima^[3]首先提出了 1 个基于 Oseledets 定理^[4]计算 Lyapunov 指数谱的有效算法, 文献^[5–8]对算法进行了改进. 近年来, 提出了基于系统扰动的数量积和导数计算 Lyapunov 指数的方法^[9–13], 该算法可以计算连续系统的 Lyapunov 指数谱, 但是如果系统中存在不连续性则会出现较大误差或数值溢出现象.

为了确定具有冲击或干摩擦的机械系统、分段线性特性电振荡器等不连续系统的 Lyapunov 指数, 可以采用等效的连续函数近似不连续分量^[14]、最小二乘阴影法^[15]和伪轨道法^[16]消除状态扰动

* 国家自然科学基金 (批准号: 51579242, 51839005) 和湖北省自然科学基金 (批准号: 2018CFB182) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: yangsuper1987@126.com

矢量的不连续性等方法, 虽然不需要重构相空间和 Jacobi 矩阵, 但容易引起系统动力学特性的质变. Takens^[17] 和 Wolf 等^[18] 根据时间序列信号重构系统吸引子, 提出了计算不连续系统最大 Lyapunov 指数的算法. 多年以来, 文献 [19–27] 针对该类方法的数据量、稳定性和计算速率等方面进行了评估改进, 该类方法的优点是物理意义明显, 便于理解, 计算结果不易受到拓扑复杂性的影响, 有一定的抗噪能力. 近年来, 部分学者又提出了映射法^[28–30]、补偿矩阵法^[31]、完全同步法^[32–36]、克隆动力学法^[37] 等, 这些方法对一些特性类型的不连续系统具有较高的准确性, 但算法通用性不强且计算流程较为复杂.

本文提出了一种计算不连续系统 Lyapunov 指数谱的新方法. 该方法基于摄动理论, 使用正交矢量型初始扰动计算 Jacobi 矩阵, 对 Jacobi 矩阵进行特征值提取, 得到系统的 Lyapunov 指数谱. 该方法仅需要选定初始条件, 无需确切知道系统的方程式, 便能够确定系统的最终状态, 而且对不连续系统和连续系统均适用.

2 方法

为了克服现有 Lyapunov 指数算法的不足, 以一般性的理论为依据, 使得新算法适用于更多的系统并更具通用性; 另一方面, 以经典的数值算法为基础, 对广泛应用的 Jacobi 法进行改进, 保证新算法计算的准确性.

2.1 算法理论

以常微分方程 (ODE) 形式描述一种 n 维自治连续时间系统:

$$\dot{\mathbf{x}} = \frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x}), \quad \mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T, \quad \mathbf{f} = (f_1, f_2, \dots, f_n)^T, \quad (1)$$

其中, $\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n$ 为状态向量, $t \in \mathbf{R}$ 为时间, \mathbf{f} 为 $\mathbf{R}^n \rightarrow \mathbf{R}^n$ 上的连续可微函数. 假设 $S_t(\mathbf{x}_0)$ 为满足 ODE(1) 初始条件 \mathbf{x}_0 的解 (轨迹), 则有

$$\dot{S}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}[S_t(\mathbf{x}_0)], \quad S_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0. \quad (2)$$

Lyapunov 指数的定义是基于以下 Jacobi 矩阵建立的:

$$\mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0) = \frac{dS_t(\mathbf{x}_0)}{d\mathbf{x}_0}. \quad (3)$$

(2) 式对 \mathbf{x}_0 进行微分获得如下变分方程:

$$\dot{\mathbf{U}}_t(\mathbf{x}_0) = \frac{\partial \mathbf{f}[S_t(\mathbf{x}_0)]}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0). \quad (4)$$

矩阵 $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)$ 显示了初始条件 \mathbf{x}_0 的无穷微扰对轨迹 $S_t(\mathbf{x}_0)$ 的影响:

$$\Delta \mathbf{s}(t) = \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x}_0, \quad (5)$$

其中 $\Delta \mathbf{s}(t)$ 是由初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 引起 $S_t(\mathbf{x}_0)$ 的扰动, 即: $\Delta \mathbf{s}(t) = S_t(\mathbf{x}_0 + \Delta \mathbf{x}_0) - S_t(\mathbf{x}_0)$. 向量 $\Delta \mathbf{s}(t)$ 的长度可以从下式中求得

$$|\Delta \mathbf{s}(t)| = \sqrt{\Delta \mathbf{s}(t)^T \Delta \mathbf{s}(t)} = \sqrt{\Delta \mathbf{x}_0^T \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0) \Delta \mathbf{x}_0}. \quad (6)$$

令 $u_i(t), i = 1, \dots, n$ 为 $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)$ 的特征值. $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)$ 是 1 个实矩阵, 所以 $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)$ 是实对称的. 因此, $u_i(t) \in \mathbf{R}$ 和对应的特征向量可以构成正交基 $\mathbf{v}_i(t), i = 1, \dots, n$. 由于任意 1 个 $\Delta \mathbf{x}_0 \in \mathbf{R}^n$, 都有 $|\Delta \mathbf{s}(t)|^2 \geq 0$, 可得到矩阵 $\mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)^T \mathbf{U}_t(\mathbf{x}_0)$ 为半正定, 且 $u_i(t) \geq 0$. 因此, 如果 $\Delta \mathbf{x}_0$ 与 $\mathbf{v}_i(t)$ 平行, 则 $|\Delta \mathbf{s}(t)| = |\Delta \mathbf{x}_0| \sqrt{u_i(t)}$. 可以得到: 若初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 的 1 个分量与 $\mathbf{v}_i(t)$ 平行, 则其轨迹长度的影响因子为 $\sqrt{u_i(t)}$. 可用以下公式表示:

$$[\mathbf{v}_i(t), \Delta \mathbf{s}(t)] = [\mathbf{v}_i(t), \Delta \mathbf{x}_0] \sqrt{u_i(t)}, \quad (7)$$

其中 $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ 表示向量 \mathbf{a}, \mathbf{b} 之间的数量积.

Lyapunov 指数的定义为

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \sqrt{u_i(t)} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{2t} \ln |u_i(t)|, \quad i = 1, \dots, n. \quad (8)$$

从 (8) 式可以得到, 在时间 t 足够长的情况下, $\sqrt{u_i(t)} \approx e^{\lambda_i t}$.

因此, 对于每个 Lyapunov 指数值 λ_i , 在相空间中都存在 1 个对应的方向, 使得初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 在该方向上的投影长度乘以 $e^{\lambda_i t}$ 作为系统在时间 t 内的演化. 可用以下公式表示:

$$[\mathbf{v}_i(t), \Delta \mathbf{s}(t)] \approx [\mathbf{v}_i(t), \Delta \mathbf{x}_0] e^{\lambda_i t}. \quad (9)$$

这意味着每个 Lyapunov 指数是初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 的分量沿相空间某个方向的平均指数收缩率 (如果 $\lambda_i < 0$) 或扩展率 (如果 $\lambda_i > 0$).

Lyapunov 指数的概念不仅适用于连续时间系统, 而且适用于离散时间系统. 上述理论为连续时间和离散时间系统提供了 Lyapunov 指数计算的一般方法. 首先, 对于足够长的时间 t , 使用 (4) 式计

算 Jacobi 矩阵 $U_t(\mathbf{x}_0)$; 然后, 计算 $U_t(\mathbf{x}_0)^T U_t(\mathbf{x}_0)$ 的特征值 u_i ; 最后, 应用 (8) 式计算每个 Lyapunov 指数值.

2.2 连续系统经典算法

基于以上推导公式建立了一种连续系统的经典算法^[8]. 该算法利用了最大的扰动子空间 W_i 中的每个初始扰动均以 $e^{\lambda_i t}$ 的速度变化这一特点, 即平行于 \mathbf{v}_i 的初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 分量的长度在时间 t 上以因数 $e^{\lambda_i t}$ 进行扩展或收缩.

假设 n 维系统的 Lyapunov 指数 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n$, 几乎任意 1 个初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 都具有与 \mathbf{v}_1 平行的分量, 则该分量长度的变化因数为 $e^{\lambda_1 t}$. 如果 λ_1 是最大 Lyapunov 指数, 则其分量将成为主导量. 由于扰动量 $\Delta \mathbf{x}_0$ 的方向与 \mathbf{v}_1 对齐, 则 $\Delta \mathbf{x}_0$ 的长度以近似指数速率 λ_1 变化, 即 $|\Delta \mathbf{s}(t)| \approx |\Delta \mathbf{x}_0| e^{\lambda_1 t}$. 这意味着 λ_1 决定了几乎所有初始扰动改变其长度的平均指数速率. 为了计算 n 个 Lyapunov 指数谱, 通过 Gram-Schmidt 正交归一化获得相互正交的初始扰动量 $\Delta \mathbf{x}$, 减少扰动量之间对齐的影响. 为了计算 λ_2 , 当 $\Delta \mathbf{x}_0$ 与 \mathbf{v}_1 对齐时, 必须计算另 1 个与 $\Delta \mathbf{x}_1$ 正交的新扰动, 且该扰动的长度以近似指数速率 λ_2 变化, 并与 \mathbf{v}_2 对齐, 如图 1 所示.

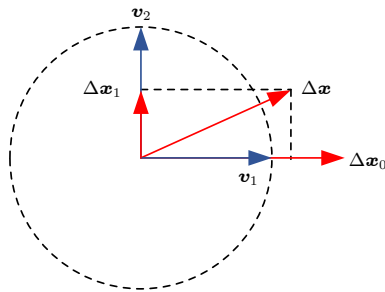


图 1 两个扰动量 $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{x}_0$ 的正交归一化
Fig. 1. Orthonormalization of two perturbations $\Delta \mathbf{x}$, $\Delta \mathbf{x}_0$.

以此类推, 为了计算 λ_3 , 必须计算 1 个与前面两个扰动量正交的新扰动, 则其与 \mathbf{v}_1 和 \mathbf{v}_2 正交, 以近似指数速率 λ_3 变化, 并与 \mathbf{v}_3 对齐. 总的来说, 若计算 n 个 Lyapunov 指数谱, 必须计算 n 个不同的扰动, 第 1 个是根据等式 (5) 自由演化的, 其他第 i 个新扰动都与第 $1, \dots, (i-1)$ 个扰动量保持正交.

该算法唯一的约束是正交向量必须与原始向量跨越相同的扰动子空间. 同时, 由于矩阵 $U_t(\mathbf{x}_0)$ 在时间 t 较长的情况下变得计算困难, 甚至无法计

算, 使得该经典算法在实践中效果不佳.

2.3 不连续系统 Lyapunov 指数的算法

2.3.1 算法思想

在连续系统 Lyapunov 指数经典算法^[8]的基础上, 基于算法理论详述利用差商近似导数法获得 Jacobi 矩阵计算不连续系统 Lyapunov 指数的具体算法.

算法思想: 首先设定初始条件 \mathbf{x}_0 和计算参数; 然后求解系统, 得到充分接近实际系统吸引子的轨迹; 再利用差商近似倒数方法计算不连续系统的 Jacobi 矩阵; 利用 Gram-Schmidt 正交归一化获得相互正交的初始扰动量, 并将不同的扰动量用于求解相应的 Lyapunov 指数, 进而得到系统的 Lyapunov 指数谱.

2.3.2 算法实现的具体方法

下面详述该算法在不连续系统中实现的具体方法.

对于连续系统, 方程 (1) 中的矢量场 \mathbf{f} 在相空间轨迹的任意点 \mathbf{x} 处是连续可微分的, 利用经典算法^[8]可以得出系统 Lyapunov 指数. 否则, 不能直接从变分方程 (4) 获得 Jacobi 矩阵 $U_t(\mathbf{x}_j)$. 针对不连续系统, 进行适应性修改. 首先考虑连续时间不连续系统, 系统 (1) 的解 $S_t(\mathbf{x})$ 实际上是将初始状态 \mathbf{x} 转换为时间 t 之后系统 (1) 状态的映射. $U_t(\mathbf{x})$ 为在点 \mathbf{x} 处求得轨迹 S_t 的 Jacobi 矩阵:

$$U_t(\mathbf{x}) = \frac{dS_t(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{S_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1) - S_t(\mathbf{x})}{\Delta} \dots \frac{S_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n) - S_t(\mathbf{x})}{\Delta} \right], \quad (10)$$

其中 $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n$ 是 \mathbf{R}^n 中的标准基, $U_t(\mathbf{x})$ 的列是 $S_t(\mathbf{x})$ 关于后续状态变量的偏导数. 根据导数定义, (10) 式中的偏导数可以表示为 $\Delta \rightarrow 0$ 时差商的极限. 因此, 可通过以下方式估算矩阵 $U_t(\mathbf{x})$:

$$U_t(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\Delta} [S_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1) - S_t(\mathbf{x}), \dots, S_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n) - S_t(\mathbf{x})]. \quad (11)$$

在选择 Δ 值时, 需要在与 Δ 成比例的截断误差和取决于实际使用数据类型的近似误差之间取得平衡, 矩阵 $U_t(\mathbf{x})$ 的近似算法如图 2 所示.

为了估计 Jacobi 矩阵 $U_t(\mathbf{x})$, 需要利用未扰动

的初始条件 \mathbf{x} 以及沿着相空间的每个受 Δ 值扰动的初始条件 $\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_i, i = 1, \dots, n$, 确定映射 $S_t(\mathbf{x})$ 的值. 总之, 估算一次矩阵 $U_t(\mathbf{x})$, 需要对映射 $S_t(\mathbf{x})$ 进行 $n + 1$ 次计算: $S_t(\mathbf{x}), S_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1), \dots, S_t(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n)$, 并代入 (11) 式得到近似 Jacobi 矩阵 $U_t(\mathbf{x})$. 新算法是将上述 Jacobi 矩阵的估算方法与经典 Lyapunov 指数算法^[8] 相结合, 其中的所有其他步骤都与经典 Lyapunov 指数算法相同, 主要区别在于 Jacobi 矩阵是从近似公式 (11) 而不是 (4) 式获得. 令 $t_j \in \mathbf{R}_+, j = 0, 1, \dots, J$ 为 1 个递增的时间序列, $\mathbf{x}^j = \mathbf{x}(t_j)$. 假设初始条件 $t_0 = 0$ 并且 $\mathbf{x}^0 = \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, 则 $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$ 和 $\mathbf{x}^{(j-1)}$ 代入 (11) 式中就可以得到矩阵 $U_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$ 的近似值. 这种方法的优点是, 不再要求轨迹上每个点的向量场 \mathbf{f} 必须连续. 应用 (11) 式时, 只要满足对于每个 t_j , 轨迹 $S_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$ 在点 $\mathbf{x}^{(j-1)}$ 处对于所有状态变量是可微的, 则系统中不论存在多少不连续性或不连续的类型均能满足要求. 同时, 对时间序列 t_j 仅要求 $t_j \in \mathbf{R}_+, j = 0, 1, \dots, J$ 是递增的, t_j 值大小没有限制. 而且, 不需要明确知道定义矢量场 \mathbf{f} 的方程式, 只要有一种计算轨迹 $S_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$ 的方法就足够了. $S_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$ 的值无论是从轨迹 $S_{\Delta t_j}(\mathbf{x})$ 的显式定义或隐式定义, 还是从数值过程, 甚至是从实验中获得都没有关系, 该算法均有效.

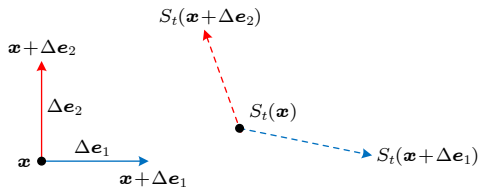


图 2 矩阵 $U_t(\mathbf{x})$ 逼近算法示意图

Fig. 2. Illustration of the algorithm of the $U_t(\mathbf{x})$ matrix approximation.

以上提出的方法可以通过调整使其适用于离散时间不连续系统. 与连续时间系统类似, 离散时间系统的 $U(\mathbf{x})$ 可以理解为在点 \mathbf{x} 处评估映射 \mathbf{F} 的 Jacobi 矩阵. 可以表示为

$$U(\mathbf{x}) = \frac{d\mathbf{F}(\mathbf{x})}{d\mathbf{x}} = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \left[\frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\Delta} \dots \frac{\mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n) - \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\Delta} \right]. \quad (12)$$

因此, 可以通过以下方式估算矩阵 $U(\mathbf{x})$:

$$U(\mathbf{x}) \approx \frac{1}{\Delta} [\mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1) - \mathbf{F}(\mathbf{x}), \dots, \mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n) - \mathbf{F}(\mathbf{x})]. \quad (13)$$

估算一次矩阵 $U(\mathbf{x})$, 需要对映射 \mathbf{F} 进行 $n + 1$ 次计算: $\mathbf{F}(\mathbf{x}), \mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_1), \dots, \mathbf{F}(\mathbf{x} + \Delta \mathbf{e}_n)$, 并代入 (13) 式得到近似 Jacobi 矩阵 $U(\mathbf{x})$.

基于以上分析, 以连续时间不连续系统为例, 不连续系统 Lyapunov 指数算法如图 3 所示.

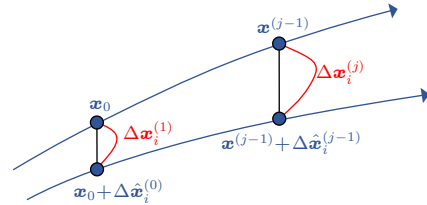


图 3 不连续系统 Lyapunov 指数算法的示意图

Fig. 3. Illustration of the algorithm of discontinuous system Lyapunov exponent.

不连续系统 Lyapunov 指数算法实现的步骤如下.

1) 令 $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ 为初始条件, $\Delta \mathbf{x}_i^{(0)}, i = 1, \dots, n$ 为初始扰动, $\Delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(0)} = \Delta \mathbf{x}_i^{(0)} / |\Delta \mathbf{x}_i^{(0)}|$ 为归一化初始扰动. 假设对于不连续系统 $\mathbf{x}^{(j)} = \mathbf{x}(t_j), \Delta \mathbf{x}_i^{(j)} = \Delta \mathbf{x}_i(t_j)$, 其中 t_j 是递增的时间序列, 使得 $t_0 = 0$ 和 $\Delta t_j = t_j - t_{j-1}$.

2) 使用初始条件 $\mathbf{x}^{(j-1)}$ 在不连续系统中获得新状态 $\mathbf{x}^{(j)}$.

3) 由 (11) 式计算得 Jacobi 矩阵 $U_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$.

4) 计算新的扰动:

$$\Delta \mathbf{s}_i^{(j)} = U_{\Delta t_j}(\mathbf{x}^{(j-1)}) \Delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(j-1)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

5) 扰动正交化:

$$\Delta \mathbf{x}_1^{(j)} = \Delta \mathbf{s}_1^{(j)},$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)} = \Delta \mathbf{x}_1^{(j)} / |\Delta \mathbf{x}_1^{(j)}|,$$

⋮

$$\Delta \mathbf{x}_i^{(j)} = \Delta \mathbf{s}_i^{(j)} - [\Delta \mathbf{s}_i^{(j)}, \Delta \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)}] \Delta \hat{\mathbf{x}}_1^{(j)} - \dots$$

$$- [\Delta \mathbf{s}_i^{(j)}, \Delta \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)}] \Delta \hat{\mathbf{x}}_{i-1}^{(j)},$$

$$\Delta \hat{\mathbf{x}}_i^{(j)} = \Delta \mathbf{x}_i^{(j)} / |\Delta \mathbf{x}_i^{(j)}|. \quad (14)$$

6) 对于 $j = 1, 2, \dots, T$, 重复以上 2)–5) 过程. 然后, 使用以下公式估算不连续系统的整个 Lyapunov 指数谱:

$$\lambda_i = \frac{1}{t_T} \sum_{j=1}^T \ln |\Delta \mathbf{x}_i^{(j)}|. \quad (15)$$

3 数值仿真研究

3.1 二自由度干摩擦冲击振荡器系统

二自由度干摩擦冲击振荡器系统由连接到刚度为 k_1 的弹簧的质量块 M 和阻尼系数为 c_1 的黏滞阻尼器组成, 另 1 个质量块 m 位于质量块 M 上, 其相对于 M 的位置由缓冲器 A 和 B 限制, 质量块之间存在摩擦力 F_T 和阻尼系数为 c_2 的黏性阻尼力. 两自由度冲击振子是 1 个质量-弹簧-阻尼系统, 其中两个质量块可以相互碰撞, 并在相对运动过程中存在干摩擦, 如图 4 所示.

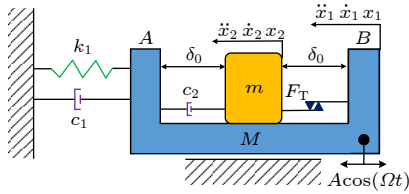


图 4 二自由度干摩擦冲击振荡器模型

Fig. 4. Model of the two-degrees-of-freedom (2-DoF) mechanical oscillator with impacts and friction.

二自由度冲击振荡器可由以下方程组描述:

$$\begin{cases} M\ddot{x}_1 = -k_1x_1 - c_1\dot{x}_1 + c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \\ \quad + F_T + A\cos(\Omega t), \\ m\ddot{x}_2 = -c_2(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) - F_T, \\ |x_2 - x_1| < \delta_0, \end{cases} \quad (16)$$

$$F_T = \begin{cases} mg\mu \cdot \text{sgn}(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \Leftrightarrow \dot{x}_2 \neq \dot{x}_1, \\ -mg\mu \cdot \text{sgn}(\ddot{x}_1) \Leftrightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1, \quad m\ddot{x}_1 \geq mg\mu, \\ -m\ddot{x}_1 \Leftrightarrow \dot{x}_2 = \dot{x}_1, \quad m\ddot{x}_1 < mg\mu, \end{cases} \quad (17)$$

$$\begin{cases} \lim_{t \rightarrow t_c^+} \dot{x}_1(t) \\ = \lim_{t \rightarrow t_c^-} \left[\frac{M\dot{x}_1 + m\dot{x}_2}{M+m} - \frac{Rm(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{M+m} \right], \\ \lim_{t \rightarrow t_c^+} \dot{x}_2(t) \\ = \lim_{t \rightarrow t_c^-} \left[\frac{M\dot{x}_1 + m\dot{x}_2}{M+m} + \frac{Rm(\dot{x}_1 - \dot{x}_2)}{M+m} \right], \\ \Leftrightarrow |x_2(t_c) - x_1(t_c)| = \delta_0, \end{cases} \quad (18)$$

其中 M 和 m 分别是外部和内部振动体的质量; x_1, x_2 是它们的位置; k_1 是弹簧刚度; c_1, c_2 是阻尼系

数; F_T 是摩擦力; A 是强迫振幅; Ω 是谐波激励的角频率; δ_0 是内部质量块 m 与外部质量块 M 之间的间隙; μ 是摩擦系数, R 是恢复系数; t_c 是发生碰撞的时间. 方程组 (16) 定义了振荡器系统的演化, 方程组 (18) 描述了在系统发生碰撞时刻 t_c 处不连续性的状态转换.

将 (16)–(18) 式转换为无量纲表示得到

$$\dot{\mathbf{y}} = \mathbf{f}(\mathbf{y}) = \frac{d}{d\tau} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \\ y_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_2 \\ -y_1 - 2\beta y_2 + 2\beta\sigma(y_4 - y_2) + f_T + p\cos y_5 \\ y_4 \\ -(2\beta\sigma(y_4 - y_2) + f_T)/\gamma \\ \eta \end{bmatrix} \Leftrightarrow |y_3 - y_1| < y_0, \quad (19)$$

$$f_T = \begin{cases} \mu\gamma \cdot \text{sgn}(y_4 - y_2) \Leftrightarrow y_4 \neq y_2, \\ -\mu\gamma \cdot \text{sgn}(dy_2/d\tau) \Leftrightarrow y_4 = y_2, \quad dy_2/d\tau \geq \mu, \\ -\gamma \cdot dy_2/d\tau \Leftrightarrow y_4 = y_2, \quad dy_2/d\tau < \mu, \end{cases} \quad (20)$$

$$\begin{cases} \lim_{\tau \rightarrow \tau_c^+} y_2(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_c^-} \left[\frac{y_2 + \gamma y_4}{1 + \gamma} - \frac{R\gamma(y_2 - y_4)}{1 + \gamma} \right], \\ \lim_{\tau \rightarrow \tau_c^+} y_4(\tau) = \lim_{\tau \rightarrow \tau_c^-} \left[\frac{y_2 + \gamma y_4}{1 + \gamma} + \frac{R(y_2 - y_4)}{1 + \gamma} \right], \\ \Leftrightarrow |y_2(\tau_c) - y_4(\tau_c)| = y_0, \end{cases} \quad (21)$$

其中,

$$\begin{aligned} \omega &= \sqrt{\frac{k_1}{M}}, \quad \tau = \omega t, \quad \eta = \frac{\Omega}{\omega} \beta = \frac{c_1}{2\sqrt{Mk_1}}, \quad \sigma = \frac{c_2}{c_1}, \\ f_T &= \frac{F_T}{Mg}, \quad p = \frac{A}{Mg}, \quad \gamma = \frac{m}{M}, \quad y_1 = \frac{k_1x_1}{Mg}, \quad y_2 = \frac{k_1\dot{x}_1}{\omega Mg}, \\ y_3 &= \frac{k_1x_2}{Mg}, \quad y_4 = \frac{k_1\dot{x}_2}{\omega Mg}, \quad y_5 = \Omega t, \quad y_0 = \frac{k_1\delta_0}{Mg}. \end{aligned}$$

在这个振荡器系统中, 冲击和干摩擦的两种不连续性都存在. 假设对于任何初始条件 $\mathbf{y}(0)$, 使得 $|y_3 - y_1| < y_0$, 可以数值估计轨迹 $S_\tau(\mathbf{y}(0))$. 唯一的限制是两个物体在碰撞过程中的速度没有定义. 此外, 还假设当 $|y_3(0) - y_1(0)| < y_0$ 和 $y_2 \neq y_4$ 时, 轨迹 $S_\tau(\mathbf{y}(0))$ 相对于初始条件是可微的.

3.2 数值仿真结果

为了将数值仿真结果与不同算法^[35]获得的结果进行比较验证, 控制参数 η 在 $[1.2, 1.45]$ 范围内变化, 并设定以下参数值: $\gamma = 0.693$, $\sigma = 0.50$, $\mu = 0.02$, $\beta = 0.05$, $y_0 = 0.80$, $p = 1.00$, $R = 0.60$, 初始条件为零. 采用自适应步长的龙格-库塔 (Runge-Kutta) 方法对二自由度冲击振荡器系统进行了数值求解. 在开始计算 Lyapunov 指数和将轨迹点保存到分岔图之前, 每组参数针对 $\tau = 400 \frac{2\pi}{\eta}$ 运行该振荡器系统, 以减少瞬态影响. 其中, Jacobi 矩阵 $U_{\Delta\tau_j}(\mathbf{x}^{(j-1)})$ 通过 (11) 式获得, 为了保持方法的准确性, Δ 值应与变分方程 (4) 的积分绝对误差处于同一阶或更低阶, 并考虑冲击振荡器系统中数据类型近似误差, 从而确定 Δ 值取 10^{-6} .

由于最小扰动 $\Delta\mathbf{y}_4$ 的收缩速度过快, 导致在计算自然对数时出现了数值问题. 因此, 仅给出了该振荡器系统的 3 个最大的 Lyapunov 指数. 为了观察 Lyapunov 指数值的稳定性, 在估算程序的每次迭代之后, 再利用 (15) 式计算结果. 在每 100 次迭代后, 估计最后 100 个 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 值的标准差. 当所有标准偏差低于阈值 10^{-4} 时, 终止计算, 并取最后 100 次迭代中 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ 的平均值作为最终值. 图 5 给出了 3 个最大 Lyapunov 指数图和系统状态分岔图. 可以观察到, Lyapunov 指数值恰当地反映了系统在分岔图中的行为. 因此, 通过新算法在二自由度干摩擦冲击振荡器系统 (19)–(21) 中的应用, 证明了该 Lyapunov 指数新算法的有效性.

最后, 对使用本文算法获得的 Lyapunov 指数计算结果与同步方法^[35]得到的计算结果进行比较, 可以得到, 使用两种算法获得的最大 Lyapunov 指数图高度一致. 从而, 两种方法也相互验证了算法的正确性.

4 讨论

在物理环境中, 具有冲击、干摩擦等因素的不连续系统, 难以直接从变分方程中获得 Jacobi 矩阵, 经典的 Lyapunov 指数算法^[8]变得难以实现, 因此, 本文算法基于摄动理论, 在经典 Lyapunov 指数算法基础上, 采用差商近似导数获得近似 Jacobi 矩阵的方法, 以损失一定 Jacobi 矩阵计算精度为代价提升算法普适性.

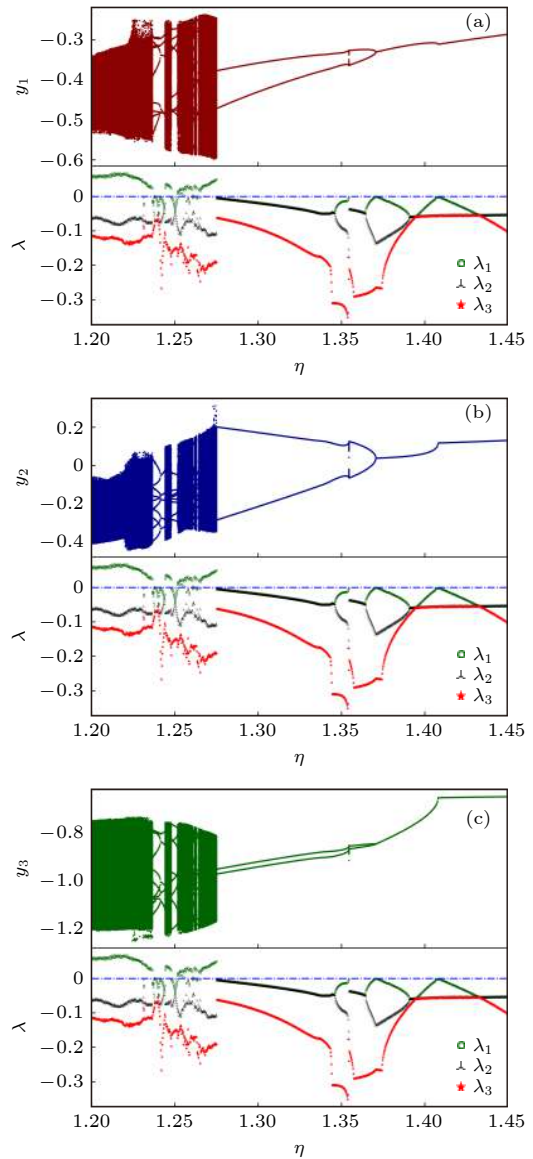


图 5 二自由度干摩擦冲击振荡器系统的分岔图和 3 个最大 Lyapunov 指数图 (a) 状态变量 y_1 ; (b) 状态变量 y_2 ; (c) 状态变量 y_3

Fig. 5. Bifurcation diagram and the corresponding diagram of the three largest Lyapunov exponents of the 2-DoF mechanical oscillator system with impacts and friction: (a) State variable y_1 ; (b) state variable y_2 ; (c) state variable y_3 .

本文算法应用于二自由度干摩擦冲击振荡器系统取得了较好的结果. 计算得到了 3 个 Lyapunov 指数谱图和系统中 3 个状态变量的分岔图, 其中最大 Lyapunov 指数也正确地反映了系统状态变量在分岔图中的轨迹变化, 表明可以采用差商近似导数的方式获得近似完备的 Jacobi 矩阵, 通过与连续系统经典 Lyapunov 指数算法相结合, 能够有效地应用于包含冲击、干摩擦等因素的不连续系统. 在本算法中, 差商近似导数法利用 $n + 1$ 个不同初

始条件向量: $\mathbf{x}_0, \mathbf{x}_0 + \Delta e_1, \dots, \mathbf{x}_0 + \Delta e_n$ 在时间 t 上对系统积分求解 $U_t(\mathbf{x})$, 因此, 求解 $U_t(\mathbf{x})$ 相当于求解 $n+1$ 阶非线性系统的计算量. 在经典算法中, 通常变分方程 (4) 与系统轨迹 $S_t(\mathbf{x})$ 一起求解, 可以将变分方程 (4) 视为 n 个线性时变系统, 因此, 求解 $U_t(\mathbf{x})$ 相当于求解 1 个 n 阶非线性系统和 n 个线性时变系统的计算量. 只要系统状态的时间导数值的计算量不比等式 (4) 中 $U_t(\mathbf{x})$ 后续列的时间导数的计算量大很多, 则两种算法的计算量是相当的. 同时, 许多非线性系统的矢量场 \mathbf{f} 是通过状态变量的和与积来定义的, 都能够满足这个条件, 例如著名的 Duffing 或 Lorenz 方程 [11]. 差商近似导数法获得近似 Jacobi 矩阵中所需的每个轨迹 $S_t(\mathbf{x}), S_t(\mathbf{x} + \Delta e_1), \dots, S_t(\mathbf{x} + \Delta e_n)$ 的积分是完全独立的, 每个轨迹都可以在使用单独处理器的独立进程中进行求解, 使得新算法非常适合于多处理器计算模式, 提升运算效率.

本文算法目前适应于对连续系统和不连续系统的 Lyapunov 指数谱进行提取, 而实际应用中不连续系统的不连续性是多样的, 这就使得 Lyapunov 指数的计算过程繁冗复杂. 后续研究将围绕如何绕过不连续系统的不连续点计算 Lyapunov 指数谱展开.

5 结 论

本文基于经典 Lyapunov 指数算法和摄动理论提出了一种计算不连续系统 Lyapunov 指数的新算法, 在经典 Lyapunov 指数算法基础上, 利用相轨迹上的正交矢量型初始微扰动获得近似 Jacobi 矩阵. 该算法不需要知道定义矢量场或者映射的方程式, 只需要有一种获得相轨迹的方法就足够了, 并且适用于连续或不连续的离散时间和连续时间系统. 通过数值仿真分析, 验证了本文 Lyapunov 指数算法简单、有效和鲁棒. 本文提出的算法可以应用于包括不连续滑动振荡器和许多其他不连续系统的大量不连续系统的研究.

参考文献

[1] Liu B Z, Peng J H 2004 *Nonlinear Dynamics* (Beijing: Higher

- Education Press) pp403–408 (in Chinese) [刘秉正, 彭建华 2004 非线性动力学 (北京: 高等教育出版社) 第403—408页]
- [2] Benettin G, Galgani L, Strelcyn J M 1976 *Phys. Rev. A* **14** 2338
- [3] Shimada I, Nagashima T 1979 *Prog. Theor. Phys.* **61** 1605
- [4] Oseledets V I 1968 *Tr. Mosk. Mat. Obs.* **19** 179
- [5] Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn J M 1980 *Meccanica* **15** 9
- [6] Benettin G, Galgani L, Giorgilli A, Strelcyn J M 1980 *Meccanica* **15** 21
- [7] Wolf A 1986 *Nonlinear Science: Theory and Applications* (Manchester: Manchester University Press) pp273–290
- [8] Parker T S, Chua L O 1989 *Practical Numerical Algorithms for Chaotic Systems* (Berlin: Springer-Verlag) pp73–81
- [9] Dabrowski A 2014 *Nonlinear Dyn.* **78** 1601
- [10] Balcerzak M, Pikunov D 2017 *Mech. Eng.* **21** 985
- [11] Balcerzak M, Dabrowski A, Pikunov D 2018 *Nonlinear Dyn.* **94** 3053
- [12] Dabrowski A, Balcerzak M, Pikunov D, Stefanski A 2020 *Nonlinear Dyn.* **102** 1869
- [13] Zhou S, Wang X Y 2021 *Physica A* **563** 125478
- [14] Hinrichs N, Oestreich M, Popp K 1998 *J. Sound Vib.* **216** 435
- [15] Liao H T 2016 *J. Comput. Phys.* **313** 57
- [16] Zhou S, Wang X Y, Wang Z, Zhang C 2019 *Chaos* **29** 033125
- [17] Takens F 1981 *Lect. Notes Math.* **898** 366
- [18] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [19] Rosenstein M T, Collins J J, De Luca C J 1993 *Physica D* **65** 117
- [20] Kantz H 1994 *Phys. Lett. A* **185** 77
- [21] Yang S Q, Zhang X H, Zhao C A 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 636 (in Chinese) [杨绍清, 章新华, 赵长安 2000 物理学报 **49** 636]
- [22] Lu S, Wang H Y 2006 *Acta Phys. Sin.* **55** 572 (in Chinese) [卢山, 王海燕 2006 物理学报 **55** 572]
- [23] Zhou S, Feng Y, Wu W Y, Wang W H 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 020502 (in Chinese) [周双, 冯勇, 吴文渊, 汪维华 2016 物理学报 **65** 020502]
- [24] Pathak J, Lu Z X, Hunt B R, Girvan M, Ott E 2017 *Chaos* **27** 121102
- [25] Zhou S, Wang X Y 2018 *Chaos* **28** 123118
- [26] Shimizu T P, Takeuchi K A 2018 *Chaos* **28** 121103
- [27] Krishnamurthy K, Manoharan S C, Swaminathan R 2020 *J. Ambient Intell. Humaniz. Comput.* **11** 3329
- [28] Stefański A, Kapitaniak T 2003 *Chaos Solitons Fractals* **15** 233
- [29] Jin L, Lu Q S, Twizell E H 2006 *J. Sound Vib.* **298** 1019
- [30] Gritli H, Belghith S 2015 *Chaos Solitons Fractals* **81** 172
- [31] Li Q D, Guo J L 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 100501 (in Chinese) [李清都, 郭建丽 2014 物理学报 **63** 100501]
- [32] Stefański A, Kapitaniak T 2000 *Discrete Dyn. Nat. Soc.* **4** 207
- [33] Stefański A 2000 *Chaos Solitons Fractals* **11** 2443
- [34] Stefański A, Dabrowski A, Kapitaniak T 2005 *Chaos Solitons Fractals* **23** 1651
- [35] Stefański A 2009 *Determining Thresholds of Complete Synchronization, and Application* (Singapore: World Scientific Publishing) pp162–180
- [36] Baumann M, Leine R I 2017 *Procedia IUTAM* **20** 26
- [37] Barreto Netto D M, Brandão A, Paiva A, Pacheco P M, Savi M A 2020 *J. Braz. Soc. Mech. Sci. Eng.* **42** 475

Lyapunov exponent algorithm based on perturbation theory for discontinuous systems*

Ma Zhao-Zhao¹⁾ Yang Qing-Chao^{2)†} Zhou Rui-Ping¹⁾

1) (*School of Energy and Power Engineering, Wuhan University of Technology, Wuhan 430063, China*)

2) (*College of Naval Architecture and Ocean Engineering, Naval University of Engineering, Wuhan 430033, China*)

(Received 13 March 2021; revised manuscript received 17 August 2021)

Abstract

Lyapunov exponent is a significant symbol to identify the nonlinear dynamic characteristics of the system. However, most of algorithms are not universal enough and complex. According to the classic Lyapunov exponent algorithm and perturbation theory, in this paper we propose a new algorithm which can be used to compute Lyapunov exponents for discontinuous systems. Firstly, the initial value of the system state parameter and the disturbance of each basic vector along the phase space are taken as initial conditions to determine the phase trajectory. Secondly, the method of difference quotient approximate derivative is adopted to obtain the Jacobi matrix. Thirdly, the eigenvalues of the Jacobi matrix are calculated to obtain the Lyapunov exponent spectrum of the system. Finally, the algorithm in a two-degree-of-freedom system with impacts and friction is used, showing its effectiveness and correctness by comparing its results with the counterparts from the synchronization method. The algorithm can not only be used for discrete systems and continuous-time dynamic systems, but also quickly calculate the Lyapunov exponent of complex discontinuous systems, which provides a new idea for determining the dynamic behavior of complex discontinuous systems.

Keywords: Lyapunov exponent, discontinuous system, perturbation theory

PACS: 05.45.-a, 05.45.Ac, 05.45.Pq, 06.60.Mr

DOI: [10.7498/aps.70.20210492](https://doi.org/10.7498/aps.70.20210492)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51579242, 51839005) and the Natural Science Foundation of Hubei Province, China (Grant No. 2018CFB182).

† Corresponding author. E-mail: yangsuper1987@126.com