



新的具有宽参数范围的五维保守超混沌系统的动力学研究

张泽峰 黄丽莲 项建弘 刘帅

Dynamic study of a new five-dimensional conservative hyperchaotic system with wide parameter range

Zhang Ze-Feng Huang Li-Lian Xiang Jian-Hong Liu Shuai

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 230501 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210592

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210592>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

新的具有宽参数范围的五维保守超混沌系统的动力学研究*

张泽峰¹⁾²⁾ 黄丽莲^{1)2)†} 项建弘^{1)2)‡} 刘帅¹⁾²⁾

1) (哈尔滨工程大学信息与通信工程学院, 哈尔滨 150001)

2) (哈尔滨工程大学, 先进船舶通信与信息技术工业和信息化部重点实验室, 哈尔滨 150001)

(2021年3月30日收到; 2021年6月28日收到修改稿)

保守系统因为没有吸引子, 与常见的耗散系统相比, 它的遍历性更好, 伪随机性更强, 安全性更高, 更适用于混沌保密通信等领域. 基于此, 设计了一个新的具有宽参数范围的五维保守超混沌系统. 首先, 进行 Hamilton 能量和 Casimir 能量分析, 证明了新系统满足 Hamilton 能量守恒且能够产生混沌. 然后进行动力学分析, 包括保守性证明、平衡点分析、Lyapunov 指数谱和分岔图分析, 证明了新系统具有保守系统的特点, 且能够在宽参数范围内一直保持超混沌状态, 同时对比宽参数范围内系统的相图和 Poincaré 截面图, 结果表明随着参数增大, 系统的随机性和遍历性得到增强. 接着, 对新系统进行 NIST 测试, 结果显示该系统在宽参数范围内产生的混沌随机序列具有很强的伪随机性. 最后对保守超混沌系统进行电路仿真和硬件电路实验, 实验结果证实了新系统具有良好的遍历性和可实现性.

关键词: 宽参数范围, 保守超混沌系统, 随机性, 遍历性

PACS: 05.45.-a, 05.45.Jn

DOI: 10.7498/aps.70.20210592

1 引言

混沌系统具有遍历性、伪随机性和初始敏感性等典型特征, 这些特征使混沌理论在混沌保密通信等多领域中具有重要的应用价值^[1]. 从 1963 年 Lorenz^[2] 提出第一个混沌系统开始, 新的系统不断被提出, 如 Sprott 系统^[3]、Chen 系统^[4]、Lü 系统^[5] 等, 这些系统大多数是耗散系统. 但是混沌系统的丰富特性, 不仅仅只存在于耗散系统中^[6-8], 还应该包括保守系统和量子系统^[9,10].

与耗散系统相比, 保守系统的相体积恒定, 不存在吸引子, 系统维数为整数维, 遍历性更好, 伪

随机性更强, 安全性更高^[11], 因而保守混沌系统逐渐引起学者们的注意. 2015 年 Vaidyanathan 和 Volos^[12] 构造了一个三维无平衡点的保守混沌系统, 2017 年 Cang 等^[13] 构造了两个保守混沌系统并进行了电路仿真. 2018 年 Qi^[11] 通过构建四维欧拉方程提出 6 个不同的四维 Hamilton 保守混沌系统, 为构建保守混沌系统提供了新的思路. 2019 年 Dong 等^[14] 提出一类新的具有多稳定性的 Hamilton 保守混沌系统, 并设计和开发了伪随机数信号发生器, 证明了保守混沌系统的应用前景. 2020 年 Gu 等^[15] 提出一个新的四维非 Hamilton 保守超混沌系统, 并对其动力学特性进行了详细分析. 2021 年 Chen 等^[16] 提出了一个二维非自治保守系统并在积

* 国家自然科学基金 (批准号: 61203004)、黑龙江省自然科学基金 (批准号: F201220) 和黑龙江省自然科学基金联合引导项目 (批准号: LH2020 F022) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: lilian_huang@163.com

‡ 通信作者. E-mail: xiangjianhong@hrbeu.edu.cn

分域上进行了重构,使保守运动有了更充分的解释.

在工程应用中,如果有一类混沌系统能够随着某个参数变化,在更宽的范围内一直保持混沌状态,那么这类系统在保密通信^[17]、密码学^[18]、混沌控制^[19]等领域中将更有优势. 2007年 Barboza^[20] 提出一个线性扩展的四维 Lorenz 系统,并证明了该系统在宽范围下是超混沌的. 2009年 Jia 等^[21] 提出一个大范围超混沌系统并用模拟电路验证了系统的复杂性. 2013年 Liu 和 Zhang^[22] 提出一个宽参数范围的双涡卷混沌系统. 2018年 Xian 等^[23] 提出一个大范围参数下具有共存吸引子的混沌系统,并用模拟电路和 FPGA 验证了系统的混沌特性. 2019年 Xu 等^[19] 提出一个超大范围混沌系统并进行了自适应滑模控制. 同年, Xu 和 Li^[24] 又构建了一个具有共存混沌吸引子的超大范围参数混沌系统.

以上研究都是关于宽参数范围耗散混沌系统的,对于宽参数范围保守混沌系统却鲜有报道. 2011年 Sprott^[25] 提出三条标准,新构建的混沌系统应该至少符合其中的一条. 对比近些年关于保守混沌系统的文献^[11–16]发现,尚未有学者专门针对宽参数范围的保守混沌系统进行研究. 文献^[15]虽然提到系统的混沌区域具有较大的参数空间,但是并没有进行更深入的研究. 因此,本文基于五维欧拉方程构造了一个新的具有宽参数范围的五维保守超混沌系统,它符合 Sprott 提出的第二条标准“系统应该表现出一些以前没有观察到的行为”. 新系统满足 Hamilton 能量守恒和相体积守恒,具有保守系统特有的中心平衡点,只有混沌轨道而不存在吸引子,并且可以在宽参数范围内一直保持超混沌状态和良好的遍历性. 同时还对新系统在宽参数范围内产生的混沌随机序列进行了 NIST 测试,测试结果表明序列的伪随机性良好,基于新系统设计伪随机数发生器是可行的. 最后对新系统进行了硬件电路设计与实现,实验结果与数值仿真结果一致,证实了系统是无吸引子和具有优越遍历性的保守超混沌系统,同时也是可实现的.

2 系统模型

2.1 五维欧拉方程的建模

本文参考文献^[26]的方法,将子刚体 S_{123} 和 S_{145} 耦合共轴于轴 1 得到五维刚体 Σ_1 , 它的五维

欧拉方程的 Hamilton 向量场形式可以描述为

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{J}_1(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x}), \quad (1)$$

其中

$$\mathbf{J}_1(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & 0 & 0 \\ x_3 & 0 & -x_1 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -x_5 & x_4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \\ -x_4 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & -x_5 & x_4 \\ x_3 & 0 & -x_1 & 0 & 0 \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & 0 \\ x_5 & 0 & 0 & 0 & -x_1 \\ -x_4 & 0 & 0 & x_1 & 0 \end{bmatrix}; \quad (2)$$

$H(\mathbf{x})$ 是 Hamilton 能量函数,

$$H(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}(\Pi_1 x_1^2 + \Pi_2 x_2^2 + \Pi_3 x_3^2 + \Pi_4 x_4^2 + \Pi_5 x_5^2), \quad (3)$$

式中, $\Pi_i = I_i^{-1}$, I_i 是主转动惯量, x_i 是角动量. 此时,对应的系统 Σ_1 可以描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\Pi_3 - \Pi_2)x_2x_3 + (\Pi_5 - \Pi_4)x_4x_5, \\ \dot{x}_2 = (\Pi_1 - \Pi_3)x_1x_3, \\ \dot{x}_3 = (\Pi_2 - \Pi_1)x_1x_2, \\ \dot{x}_4 = (\Pi_1 - \Pi_5)x_1x_5, \\ \dot{x}_5 = (\Pi_4 - \Pi_1)x_1x_4. \end{cases} \quad (4)$$

因为 $\mathbf{J}_1(\mathbf{x})$ 是斜对称矩阵,所以系统 Σ_1 的 Hamilton 能量和 Casimir 能量都是保守的.

证明 1 系统 Σ_1 Hamilton 能量守恒.

能量的变化可以通过 Hamilton 函数 $H(\mathbf{x})$ 关于时间的微分表示,因为 $\mathbf{J}_1(\mathbf{x})$ 是斜对称矩阵,可得

$$\dot{H}(\mathbf{x}) = \nabla H(\mathbf{x})^T \cdot \dot{\mathbf{x}} = \nabla H(\mathbf{x})^T \cdot \mathbf{J}_1(\mathbf{x})\nabla H(\mathbf{x}) = 0, \quad (5)$$

所以系统 Σ_1 满足 Hamilton 能量守恒.

证明 2 系统 Σ_1 Casimir 能量守恒.

Casimir 能量是刚体动力学中一个重要的物理量. Casimir 能量的变化率称为 Casimir 功率,它反映了一个系统供应能量和消耗能量的功率差. 当外部转矩和耗散转矩不存在时,即 $\dot{C} \equiv 0$ 和 $C \neq 0$,

Casimir 能量是保守的. 定义 Casimir 函数为

$$C(x) = \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + x_5^2), \quad (6)$$

(6) 式满足 Lie-Poisson 括号, $\dot{C} = \{C, H\} = 0, \forall H \in C^\infty(g^*)$.

对于系统 Σ_1 , 可得

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \{C, H\} \\ &= \nabla C^T(x) \cdot \dot{x} \\ &= \nabla C^T(x) \cdot J_1(x) \cdot \nabla H(x) \\ &= 0, \end{aligned} \quad (7)$$

所以系统 Σ_1 满足 Casimir 能量守恒.

由上述分析可知, 本节构造的五维欧拉方程满足 Hamilton 能量和 Casimir 能量双守恒, 从而不会产生混沌, 但可以为下一步构造 Hamilton 保守超混沌系统提供框架.

2.2 Hamilton 保守超混沌系统的建模

为了产生混沌, 必须破坏系统 Σ_1 Hamilton 能量和 Casimir 能量的双守恒. 因为要构造的系统满足 Hamilton 能量守恒, 所以可以通过在 $J_1(x)$ 中引入常数来破坏系统 Σ_1 的 Casimir 能量守恒, 使 Casimir 功率进行无规则振荡, 从而为产生混沌创造条件.

系统 Σ_1^H : 引入 3 个常数 a, b, c , 系统 Σ_1 变为

$$\Sigma_1^H \dot{x} = J_1^H(x) \nabla H(x), \quad (8)$$

其中

$$J_1^H(x) = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 & -x_5 & x_4 \\ x_3 & 0 & -x_1 & b & c \\ -x_2 & x_1 & 0 & 0 & a \\ x_5 & -b & 0 & 0 & -x_1 \\ -x_4 & -c & -a & x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9)$$

系统 Σ_1^H 可以描述为:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = (\Pi_3 - \Pi_2)x_2x_3 + (\Pi_5 - \Pi_4)x_4x_5, \\ \dot{x}_2 = (\Pi_1 - \Pi_3)x_1x_3 + b\Pi_4x_4 + c\Pi_5x_5, \\ \dot{x}_3 = (\Pi_2 - \Pi_1)x_1x_2 + a\Pi_5x_5, \\ \dot{x}_4 = (\Pi_1 - \Pi_5)x_1x_5 - b\Pi_2x_2, \\ \dot{x}_5 = (\Pi_4 - \Pi_1)x_1x_4 - c\Pi_2x_2 - a\Pi_3x_3. \end{cases} \quad (10)$$

修改后的系统是 Hamilton 能量守恒系统, 因

为 $J_1^H(x)$ 是斜对称矩阵, 代入 $\dot{H}(x) = \nabla H(x)^T \cdot \dot{x}$ 中, 可知 $\dot{H}(x) = 0$. 但是 Casimir 能量不是保守的.

证明

$$\begin{aligned} \dot{C} &= \nabla C^T(x) \cdot \dot{x} \\ &= \nabla C^T(x) \cdot J_1^H(x) \cdot \nabla H(x) \\ &= a(\Pi_5 - \Pi_3)x_3x_5 + b(\Pi_4 - \Pi_2)x_2x_4 \\ &\quad + c(\Pi_5 - \Pi_2)x_2x_5. \end{aligned} \quad (11)$$

因此, 当

$$\begin{aligned} a(\Pi_5 - \Pi_3)x_3x_5 + b(\Pi_4 - \Pi_2)x_2x_4 \\ + c(\Pi_5 - \Pi_2)x_2x_5 \neq 0 \end{aligned}$$

时, 系统 Σ_1^H 的 Casimir 能量不守恒.

2.3 能量分析与数值验证

设置 $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5) = (3, 2, 4, 5, 8)$, 初始值为 $(0.5, 0.1, 0.5, 0.1, 0.5)$, 当 $a = b = c = 0$ 时, 系统 Σ_1^H 是五维欧拉方程对应的系统 Σ_1 , 此时 Hamilton 能量和 Casimir 能量都是保守的, 系统 Σ_1 只能产生周期轨道, 它的时域波形和 Casimir 功率都在有规则地振荡, 如图 1(a) 和图 1(b) 中的红色曲线所示. 当 $(a, b, c) = (0.5, 0.4, 0.2)$ 时, 系统 Σ_1 变为系统 Σ_1^H , Hamilton 能量仍然是保守的, 但是 Casimir 功率开始不规则的振荡, Casimir 能量的保守状态最终被打破, 为系统 Σ_1^H 产生混沌创造了条件. 图 1(a) 和图 1(b) 的蓝色曲线分别表示系统 Σ_1^H 的时域波形和 Casimir 功率, 可以看出曲线的变化是随机的. 图 1(c) 和图 1(d) 分别给出了两个系统在三维平面和二维平面下产生的相图, 红色曲线表示系统 Σ_1 产生的周期轨道, 蓝色曲线表示系统 Σ_1^H 产生的混乱轨道. 数值仿真的结果验证了 2.1 节和 2.2 节理论分析的正确性.

3 动力学分析

3.1 保守性

系统 Σ_1^H 的 Jacobi 矩阵如 (12) 式所示, 主对角线上的元素均为零, 即它的迹为零, 对应的散度 $\nabla \cdot F = \sum_{i=1}^5 \frac{\partial \dot{x}_i}{\partial x_i} = 0$, 说明系统 Σ_1^H 是相体积保守的.

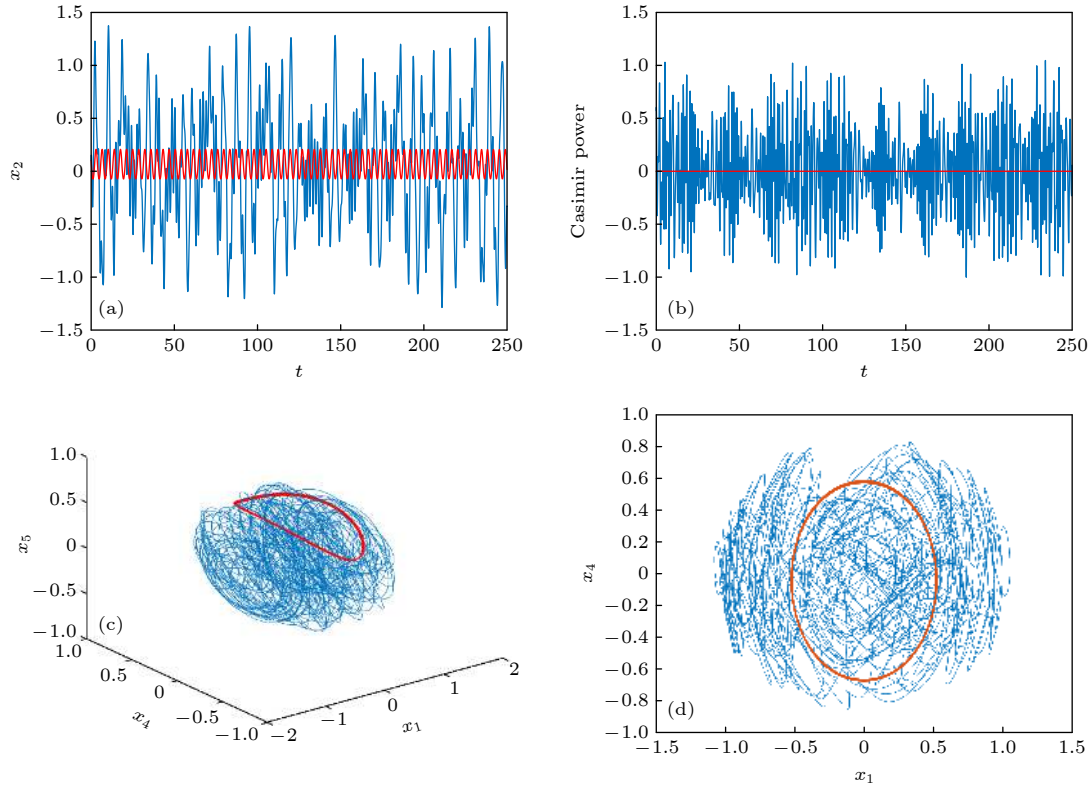


图 1 数值仿真, 红色部分为系统 Σ_1 , 蓝色部分为系统 Σ_1^H : (a) 时域波形; (b) Casimir 功率; (c) x_1 - x_4 - x_5 相图; (d) x_1 - x_4 相图
 Fig. 1. Numerical simulation, the red part is system Σ_1 , the blue part is system Σ_1^H : (a) Time domain waveforms; (b) Casimir power; (c) x_1 - x_4 - x_5 plane; (d) x_1 - x_4 plane.

$$\mathbf{J}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 0 & (\Pi_3 - \Pi_2)x_3 & (\Pi_3 - \Pi_2)x_2 & (\Pi_5 - \Pi_4)x_5 & (\Pi_5 - \Pi_4)x_4 \\ (\Pi_1 - \Pi_3)x_3 & 0 & (\Pi_1 - \Pi_3)x_1 & b\Pi_4 & c\Pi_5 \\ (\Pi_2 - \Pi_1)x_2 & (\Pi_2 - \Pi_1)x_1 & 0 & 0 & a\Pi_5 \\ (\Pi_1 - \Pi_5)x_5 & -b\Pi_2 & 0 & 0 & (\Pi_1 - \Pi_5)x_1 \\ (\Pi_4 - \Pi_1)x_4 & -c\Pi_2 & -a\Pi_3 & (\Pi_4 - \Pi_1)x_1 & 0 \end{bmatrix}. \quad (12)$$

3.2 平衡点

设置 (10) 式中

$$\begin{aligned} & (\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, a, b, c) \\ & = (3, 2, 4, 5, 8, 0.5, 0.4, 0.2), \end{aligned}$$

令 $x_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4, 5$, 可得系统 Σ_1^H 的平衡点 $(0, 0, 0, 0, 0)$, $(k_1, 0, 0, 0, 0)$, $(\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}k_4, k_4, 0)$ 和 $(-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}k_4, k_4, 0)$, 其中 $k_1, k_4 \in \mathbb{R}$. 令 (12) 式的 Jacobi 矩阵写作 $|\lambda \mathbf{I} - \mathbf{J}(\mathbf{x})| = 0$ 的形式, 再将平衡点和设置好的参数一起代入, 可得对应的特征多项式

$$f_1(\lambda) = \frac{1}{25}\lambda(25\lambda^4 + 256\lambda^2 + 320), \quad (13)$$

$$\begin{aligned} f_2(\lambda) &= \frac{1}{25}\lambda(25\lambda^4 + 256\lambda^2 + 225k_1^2\lambda^2 + 156k_1\lambda \\ &\quad - 250k_1^4 + 340k_1^2 + 320), \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} f_3(\lambda) &= \frac{1}{25}\lambda(25\lambda^4 + 706\lambda^2 - 50k_4^2\lambda^2 + 156\sqrt{2}\lambda \\ &\quad + 190\sqrt{2}k_4^2\lambda + 5720k_4^2), \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} f_4(\lambda) &= \frac{1}{25}\lambda(25\lambda^4 + 706\lambda^2 - 50k_4^2\lambda^2 - 156\sqrt{2}\lambda \\ &\quad - 190\sqrt{2}k_4^2\lambda + 5720k_4^2). \end{aligned} \quad (16)$$

令 $f_i(\lambda) = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$, 可以得到对应的特征值. 表 1 列出了部分特征值和对应的平衡点类型, 从中可以看出, 平衡点 $(0, 0, 0, 0, 0)$ 对应的特征值是 $(0, j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2)$, 由 0 和纯虚数组成, 可以判定 $(0, 0, 0, 0, 0)$ 是中心平衡点, 满足保守系统的特点.

表 1 系统 Σ_1^H 的平衡点和特征值
Table 1. Equilibrium points and characteristic values of system Σ_1^H .

系统	平衡点 ($k_1, k_4 \in \mathbb{R}$)	特征值 ($\sigma, \omega \in \mathbb{R}^+$)	平衡点类型
Σ_1^H	(0, 0, 0, 0, 0)	(0, $j\omega_1, -j\omega_1, j\omega_2, -j\omega_2$)	中心点
	(0, 0, 0, 0, 0)	(0, $\sigma_1, -\sigma_2, \sigma_3 + j\omega, \sigma_3 - j\omega$)	鞍焦点
		(0, $\sigma_1, -\sigma_2, -\sigma_3 + j\omega, -\sigma_3 - j\omega$)	鞍焦点
	(0, 0, 0, 0, 0)	(0, $\sigma + j\omega_1, \sigma - j\omega_1, -\sigma + j\omega_2, -\sigma - j\omega_2$)	鞍焦点
		(0, $\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_4$)	鞍焦点
	($\sqrt{2}, 0, \sqrt{2}k_4, k_4, 0$)	(0, 0, $-\sigma_1, \sigma_2 + j\omega, \sigma_2 - j\omega$)	鞍焦点
		(0, $\sigma + j\omega_1, \sigma - j\omega_1, -\sigma + j\omega_2, -\sigma - j\omega_2$)	鞍焦点
	($-\sqrt{2}, 0, -\sqrt{2}k_4, k_4, 0$)	(0, $\sigma_1, \sigma_2, -\sigma_3, -\sigma_4$)	鞍焦点
		(0, 0, $\sigma_1, -\sigma_2 + j\omega, -\sigma_2 - j\omega$)	鞍焦点
		(0, $\sigma + j\omega_1, \sigma - j\omega_1, -\sigma + j\omega_2, -\sigma - j\omega_2$)	鞍焦点

事实上因为系统 Σ_1^H 是 Hamilton 保守系统, 不能渐进的到达平衡点, 所以系统中只存在中心和鞍型平衡点 [27], 表 1 也验证了这一点.

3.3 宽参数范围的 Lyapunov 指数谱和分岔图

当全局只有一个 Lyapunov 指数为正时, 系统定义为混沌系统. 当有超过一个正的 Lyapunov 指数时, 系统定义为超混沌系统 [28]. 此外, 保守系统的 Lyapunov 指数是关于零对称的, 因此所有 Lyapunov 指数之和为零, 这意味着整个相空间体积是守恒的.

对于系统 Σ_1^H , 设置参数 ($\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, a, b, c$) = (3, 2, 4, 5, 8, 0.5, 0.4, 0.2), 初值 (0.5, 0.1, 0.5, 0.1, 0.5). 计算 Lyapunov 指数的方法有很多, 本文选择 Jacobi 矩阵法求 Lyapunov 指数 [29,30]. 图 2(a) 是系统 Σ_1^H 随着参数 Π_2 变化的 Lyapunov 指数谱, 图中有 6 条曲线, 其中红色曲线表示 Lyapunov 指数之和, 与 x 轴完全重合, 恒等于零, 再次证明系统 Σ_1^H 是保守的. 其余 5 条曲线从大到小记为 $L_1 > L_2 > 0, L_3 \approx 0, 0 > L_4 > L_5$, 满足超混沌系统的条件, 系统 Σ_1^H 是超混沌系统. 图 2(b) 是对应的分岔图, 没有出现分岔现象, 只有 1 条由无数点连成的粗线, 符合超混沌状态的特性, 同时还可以看出系统几乎是瞬间进入超混沌状态且能够一直保持, 与 Lyapunov 指数谱相符. Lyapunov 指数谱和分岔图还有一个特点是横坐标 $\Pi_2 \in [0, 1600]$, 具有很宽的参数范围, 说明系统 Σ_1^H 是具有宽参数范围的 Hamilton 保守超混沌系统.

此外, 通过 Lyapunov 指数谱也可以验证保守

系统 Σ_1^H 的整数维特性. 定义 Lyapunov 维数为 $D_L = k + \frac{S_k}{|L_{k+1}|}$, 其中 $S_k = \sum_{i=1}^k L_i > 0$, k 是保证 $S_k > 0$ 的最大 k 值. 因为系统 Σ_1^H 的 Lyapunov 指数和为 0, 且最小的 $L_5 < 0$, 所以最大 k 值应为 4, $S_4 = 0 - L_5 = -L_5 > 0, D_L = 4 + (-L_5/|L_5|) = 5$, 说明系统 Σ_1^H 是整数维系统, 且维数等于系统状态变量的个数.

3.4 参数 Π_2 对系统 Σ_1^H 的影响

宽参数范围的混沌系统最显著的优势就是混沌状态可以任由参数在宽范围内改变而一直保持. 我们利用相图和 Poincaré 截面图分析参数 Π_2 在 [0, 1600] 变化时对系统 Σ_1^H 的影响. 仿真参数调为一致, 设置参数 ($\Pi_1, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, a, b, c$) = (3, 4, 5, 8, 0.5, 0.4, 0.2), 初值 (0.5, 0.1, 0.5, 0.1, 0.5), 选取 $\Pi_2 = 2, 500, 1000, 1500$ 时的四种情况, 系统 Σ_1^H 的相图和 Poincaré 截面图如图 3 所示. 左侧是 Π_2 取不同值时在 x_3-x_4 平面上的相图, 随着 Π_2 的增大, 混沌轨道越来越密集. 右侧是对应的 Poincaré 截面图, 可以看出 4 个截面上都有大量的面状点, 结合 3.3 节的分析, 说明系统始终处于超混沌状态. 通过右侧 4 张图对比, 还可以发现随着 Π_2 的增大, 点组成的面的范围也在变大, 这说明系统不仅可以在大范围内保持超混沌状态, 而且随机性和遍历性也都在增强.

值得一提的是, 保守系统因为相体积守恒, 它的运动轨道永远不会吸引附近的轨迹, 所以没有吸引子 [27], 图 3 和图 4 的相图可以很好地说明这一点. 从图上还可以看出混沌轨道填满了大部分平面, 证明了保守超混沌系统的遍历性良好.

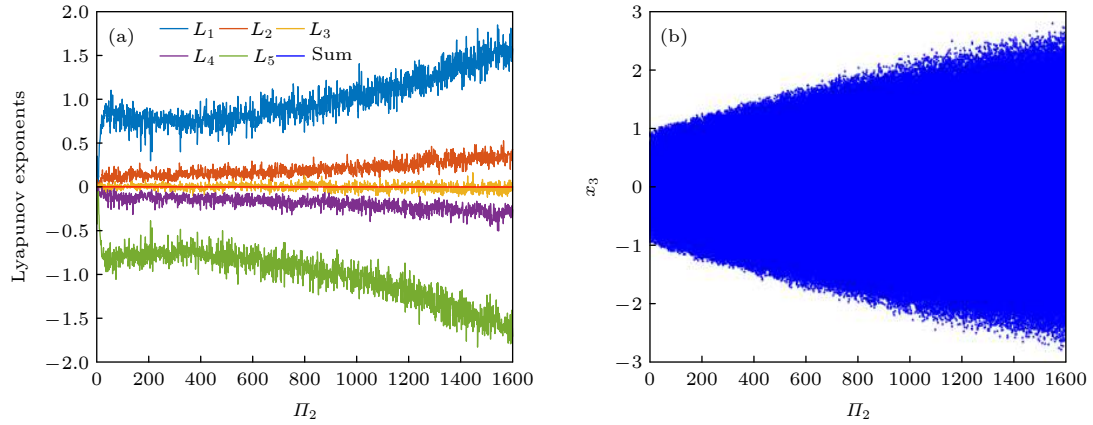


图 2 数值仿真 (a) 系统 Σ_1^H 的 Lyapunov 指数谱; (b) 系统 Σ_1^H 的分岔图

Fig. 2. Numerical simulation: (a) Lyapunov exponent spectrum of system Σ_1^H ; (b) bifurcation diagram of system Σ_1^H .

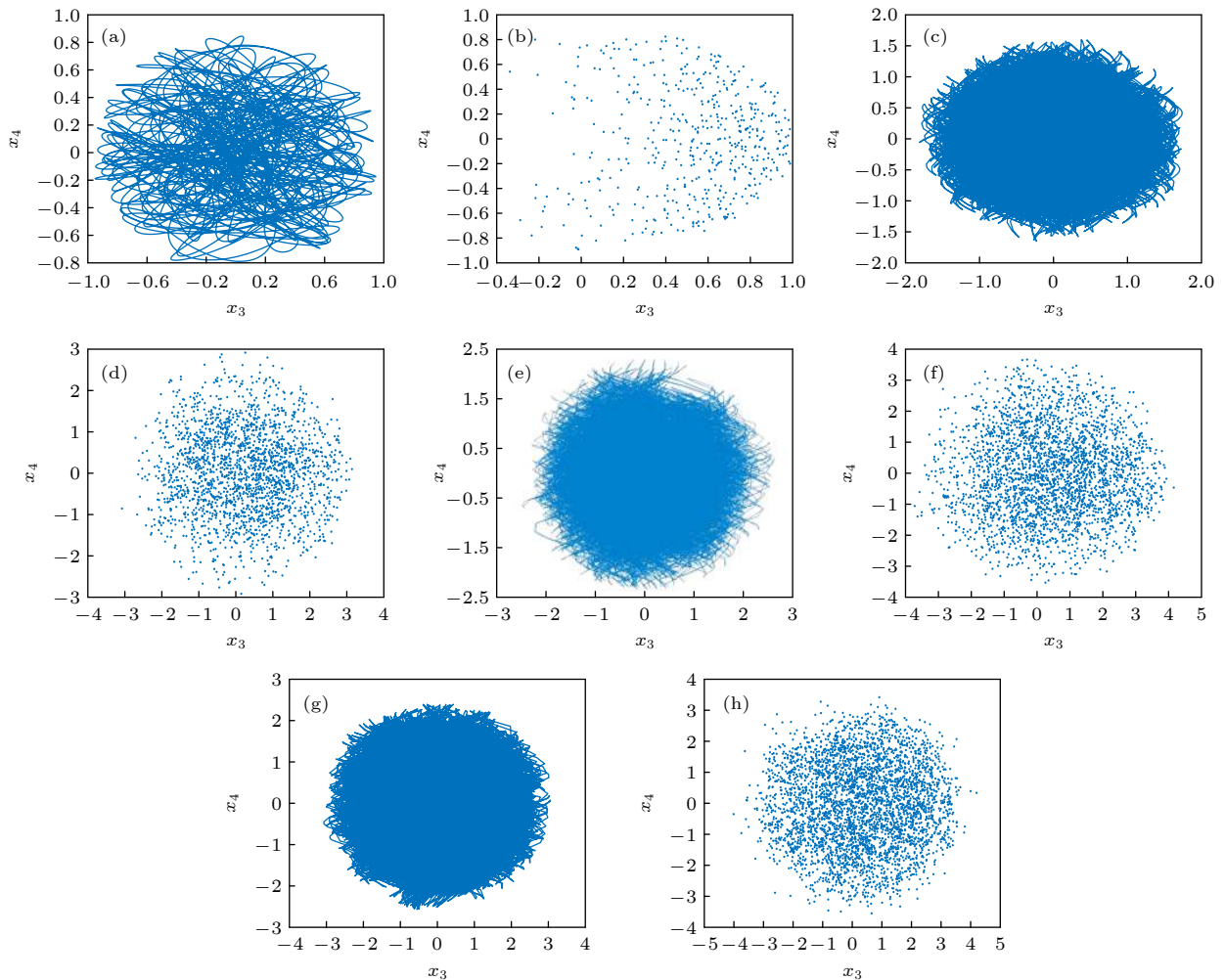


图 3 系统 Σ_1^H 的相图和 Poincaré 截面图 (a) $\Pi_2 = 2$ 时的相图; (b) $\Pi_2 = 2$ 时的 Poincaré 截面图; (c) $\Pi_2 = 500$ 时的相图; (d) $\Pi_2 = 500$ 时的 Poincaré 截面图; (e) $\Pi_2 = 1000$ 时的相图; (f) $\Pi_2 = 1000$ 时的 Poincaré 截面图; (g) $\Pi_2 = 1500$ 时的相图; (h) $\Pi_2 = 1500$ 时的 Poincaré 截面图

Fig. 3. Phase diagrams and Poincaré maps of system Σ_1^H : (a) The phase diagram when $\Pi_2 = 2$; (b) the Poincaré map when $\Pi_2 = 2$; (c) the phase diagram when $\Pi_2 = 500$; (d) the Poincaré map when $\Pi_2 = 500$; (e) the phase diagram when $\Pi_2 = 1000$; (f) the Poincaré map when $\Pi_2 = 1000$; (g) the phase diagram when $\Pi_2 = 1500$; (h) the Poincaré map when $\Pi_2 = 1500$.

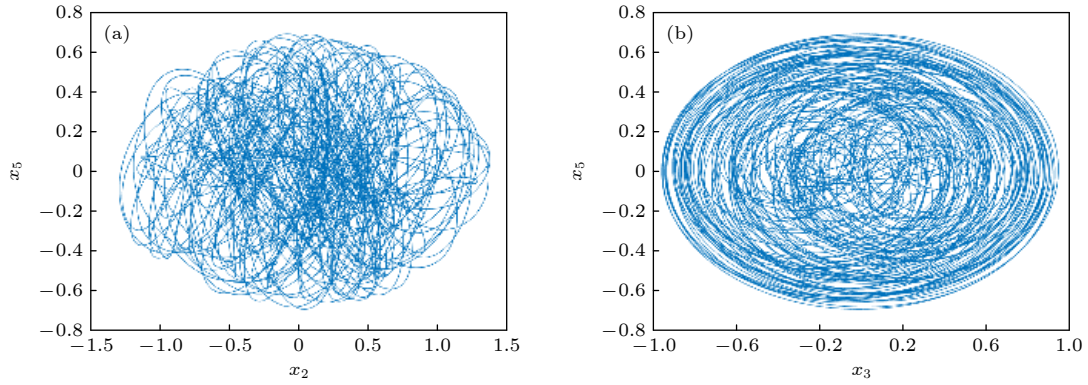


图 4 系统 Σ_1^H 在 $\Pi_2 = 2$ 的相图 (a) x_2 - x_5 平面; (b) x_3 - x_5 平面
 Fig. 4. Phase diagrams of system Σ_1^H when $\Pi_2 = 2$: (a) x_2 - x_5 plane; (b) x_3 - x_5 plane.

4 NIST 测试和电路实现

4.1 NIST 测试

为了证明本文设计的保守超混沌系统在宽参数范围内产生的混沌随机序列具有伪随机性, 我们采用美国国家标准与技术局推出的 STS 测试包, 即 SP800-22 标准验证^[31]. 它的测试项目全面, 测试软件成熟, 测试结果认可度高. NIST 总共设定了 15 个测试项检验真随机序列或伪随机序列的质量, 每一项测试都会得到 1 个 P -value. 对于测试结果采用两种方法判断: 1) 检验通过统计检验的序列比例; 2) 检验 P -values 的分布是否均匀.

1) 对于系统 Σ_1^H , 选择默认显著性水平 $\alpha = 0.01$, P -value 大于 0.01 表示通过该项测试, 同时考虑 m 组测试序列中 P -values 大于 0.01 的比率, 以是否落在置信区间为准. 置信区间为

$$\left(\hat{p} - 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{m}}, \hat{p} + 3\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{m}} \right),$$

其中 $\hat{p} = 1 - \alpha$, m 为样本容量. 本文设置 100 组测试序列, 对应的置信区间为 (0.9602, 1.0198). 选取 Π_2 作为变量, 对应宽范围参数区间 [0, 1600], 其他参数设置 $(\Pi_1, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, a, b, c) = (3, 4, 5, 8, 0.5, 0.4, 0.2)$, 生成 10^8 比特数据. 测试的时候将数据转化为二值序列, 然后分为 100 组, 每组一百万比特数据. 测试结果如表 2 所示, 可以看到全部 15 项测试的 P -values 都大于 0.01, 同时各项测试的通过率都在置信区间内. 这表明系统 Σ_1^H 生成的序列能够通过全部 15 项测试.

2) 检查 P -values 分布以确保均匀性, 通常我们可以使用直方图来直观地表示, 将 0 和 1 的区间分成 10 个等间距的子区间, P -values 分布在每个子区间的数量被显示. 为充分体现 P -values 分布的均匀性, 选取测试次数最多的非重叠模块匹配检验进行直方图验证, 如图 5 所示, 可以看到 P -values 分布具有很好的均匀性. 其他 14 项也都有类似的分布, 证明了 P -values 分布均匀.

综上所述, 系统 Σ_1^H 在宽参数区间内产生的混沌随机序列具有良好的伪随机性, 基于系统 Σ_1^H 设计伪随机数发生器是合理的.

表 2 系统 Σ_1^H 的 NIST 测试结果
 Table 2. NIST test results of System Σ_1^H .

No.	Statistical test	P -value	Proportion
1	Frequency	0.759756	0.99
2	Block frequency	0.494392	1.00
3	Cumulative sums	0.595549	1.00
4	Runs	0.867692	0.99
5	Longest run	0.102526	0.98
6	Rank	0.115387	1.00
7	FFT	0.455937	1.00
8	Nonoverlapping template	0.015598	0.98
9	Overlapping template	0.699313	0.99
10	Universal	0.678686	0.98
11	Approximate entropy	0.574903	1.00
12	Random excursions	0.186566	0.9836
13	Random excursions variant	0.023812	1.00
14	Serial	0.514124	0.99
15	Linear complexity	0.350485	0.99

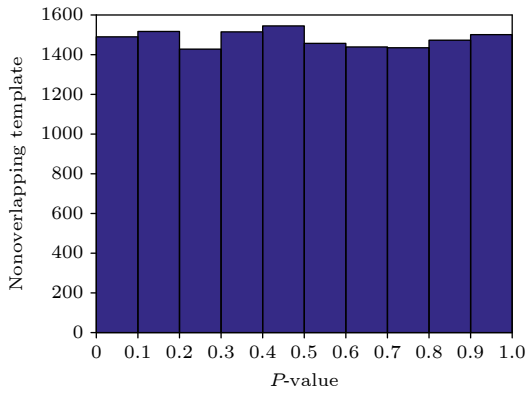


图 5 系统 Σ_1^H 非重叠模块匹配检验的 P -values 的直方图
 Fig. 5. P -values histogram of non-overlapping template matching test of system Σ_1^H .

4.2 电路设计与实现

根据文献 [32] 提出的基于无量纲状态方程的

模块化设计方法进行混沌电路设计, 采用不同阻值的线性电阻、线性电容、乘法器和运算放大器实现. 将参数 $(\Pi_1, \Pi_2, \Pi_3, \Pi_4, \Pi_5, a, b, c) = (3, 2, 4, 5, 8, 0.5, 0.4, 0.2)$ 代入 (10) 式中, 得:

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = 2x_2x_3 + 3x_4x_5, \\ \frac{dx_2}{dt} = -x_1x_3 + 2x_4 + 1.6x_5, \\ \frac{dx_3}{dt} = -x_1x_2 + 4x_5, \\ \frac{dx_4}{dt} = -5x_1x_5 - 0.8x_2, \\ \frac{dx_5}{dt} = 2x_1x_4 - 0.4x_2 - 2x_3. \end{cases} \quad (17)$$

根据 (17) 式做模块化电路设计, 如图 6 所示.

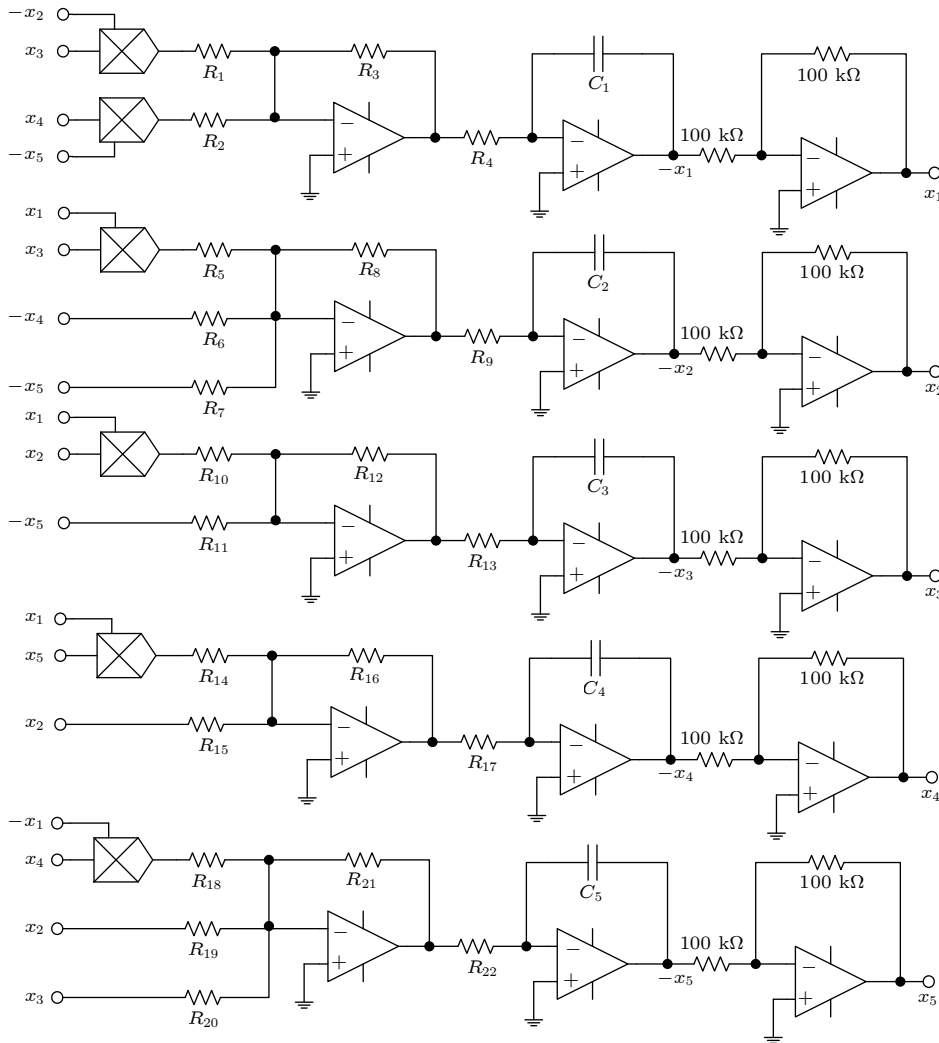


图 6 系统 Σ_1^H 的电路设计
 Fig. 6. Circuit design of system Σ_1^H .

对应的电路状态方程为

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = -\frac{R_3}{R_1 R_4 C_1}(-x_2)x_3 - \frac{R_3}{R_2 R_4 C_1}x_4(-x_5), \\ \frac{dx_2}{dt} = -\frac{R_8}{R_5 R_9 C_2}x_1x_3 - \frac{R_8}{R_6 R_9 C_2}(-x_4) \\ \quad - \frac{R_8}{R_7 R_9 C_2}(-x_5), \\ \frac{dx_3}{dt} = -\frac{R_{12}}{R_{10} R_{13} C_3}x_1x_2 - \frac{R_{12}}{R_{11} R_{13} C_3}(-x_5), \\ \frac{dx_4}{dt} = -\frac{R_{16}}{R_{14} R_{17} C_4}x_1x_5 - \frac{R_{16}}{R_{15} R_{17} C_4}x_2, \\ \frac{dx_5}{dt} = -\frac{R_{21}}{R_{18} R_{22} C_5}(-x_1)x_4 - \frac{R_{21}}{R_{19} R_{22} C_5}x_2 \\ \quad - \frac{R_{21}}{R_{20} R_{22} C_5}x_3. \end{cases} \quad (18)$$

首先使用仿真软件进行电路模拟, 设置电容 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 20 \text{ nF}$, 电阻 $R_4 = R_9 = R_{13} = R_{17} = R_{22} = 50 \text{ k}\Omega$, $R_3 = R_8 = R_{12} = R_{16} = R_{21} = 100 \text{ k}\Omega$. 考虑到状态变量在正常变化范围内, 故不需要对变量进行比例压缩变换. 时间尺度变换因子为 100, 同时模拟乘法器输出比例系数选择 $100 \text{ mV}/1 \text{ V}$. 通过对比 (17) 式和 (18) 式的系数, 得到 $R_1 = 50 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 33.3 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 500 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 625 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_{11} = 250 \text{ k}\Omega$, $R_{14} = 20 \text{ k}\Omega$, $R_{15} = 1250 \text{ k}\Omega$, $R_{18} = 50 \text{ k}\Omega$, $R_{19} = 2500 \text{ k}\Omega$, $R_{20} = 500 \text{ k}\Omega$. 设置 5 个电容的初始电压分别为 0.5, 0.1, 0.5, 0.1, 0.5 V, 与混沌系统的初始值 (0.5, 0.1, 0.5, 0.1, 0.5) 对应. 供电电压选择 $\pm 15 \text{ V}$, 使用 Multisim 软件进行电路模拟. 仿真结果如图 7 所示, 与图 4 的实验结果一致, 证明了系统 Σ_1^H 是没有吸引子, 具有优越遍历性的保守超混沌系统.

接下来进行硬件电路设计, 乘法器选择 AD633JN, 运算放大器选择 TL082CP, 硬件实验电路如图 8(a) 所示. 结合参数取值和实际元件参数限制, 同时尽可能的考虑实际电路中可能遇到的问题, 设置电容 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = 1 \text{ nF}$, 电阻 $R_4 = R_9 = R_{13} = R_{17} = R_{22} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_3 = R_8 = R_{12} = R_{16} = R_{21} = 1 \text{ k}\Omega$. 另外对比系数, 选取 $R_1 = 100 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 66.7 \text{ k}\Omega$, $R_5 = 200 \text{ k}\Omega$, $R_6 = 5 \text{ k}\Omega$, $R_7 = 6.25 \text{ k}\Omega$, $R_{10} = 200 \text{ k}\Omega$, $R_{11} = 2.5 \text{ k}\Omega$, $R_{14} = 40 \text{ k}\Omega$, $R_{15} = 12.5 \text{ k}\Omega$, $R_{18} = 100 \text{ k}\Omega$, $R_{19} = 25 \text{ k}\Omega$, $R_{20} = 5 \text{ k}\Omega$. 反相器部分的电阻都是 $100 \text{ k}\Omega$, 模拟

乘法器输出比例系数选择 $1 \text{ V}/1 \text{ V}$. 供电电压为 $\pm 15 \text{ V}$, 由 EM1716 A 直流稳压电源提供. 利用 VOS-620 B 双踪示波器观察结果, 如图 8(b) 所示. 实验结果验证了系统 Σ_1^H 的可实现性, 为以后的应用提供了一定的参考价值.

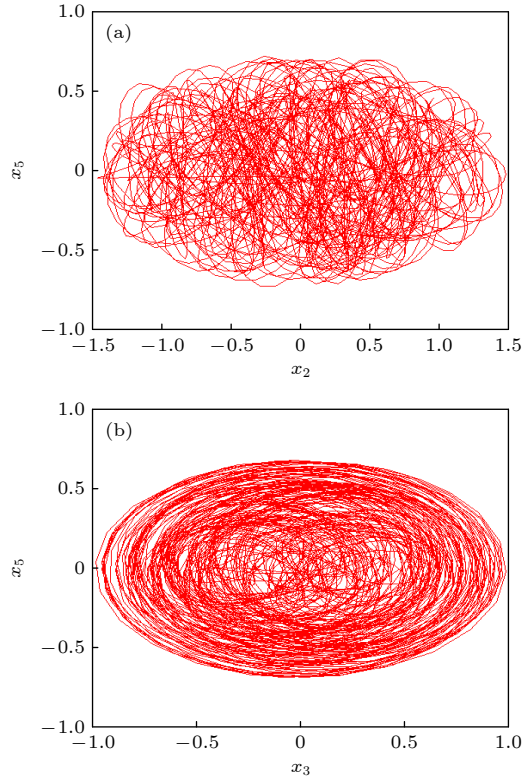


图 7 系统 Σ_1^H 的仿真电路 (a) x_2 - x_5 相图; (b) x_3 - x_5 相图
Fig. 7. Simulation circuit of system Σ_1^H : (a) x_2 - x_5 plane; (b) x_3 - x_5 plane.

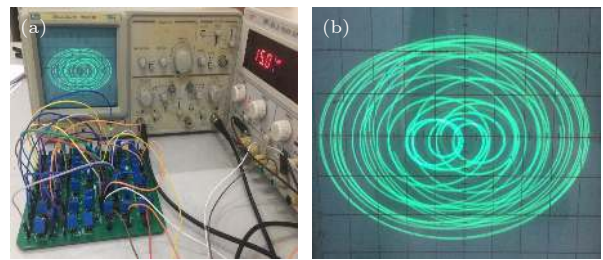


图 8 系统 Σ_1^H 的实际电路 (a) 硬件实验电路; (b) 实验结果

Fig. 8. Actual circuit of system Σ_1^H : (a) Hardware experimental circuit; (b) experimental result.

5 结 论

本文基于五维欧拉方程提出了一个新的具有宽参数范围的五维保守超混沌系统. 首先进行了能量分析, 包括 Hamilton 能量和 Casimir 能量, 证实

了新系统是 Hamilton 能量保守且能够产生混沌. 然后分析了动力学特性, 包括散度、平衡点、Lyapunov 指数谱和分岔图, 说明了新系统是具有宽参数范围的保守超混沌系统. 分析参数对系统的影响则进一步阐述了新系统宽参数范围的特性, 系统的超混沌状态可以在参数改变时保持不变, 并且随着参数增大, 系统的遍历性和随机性也在增强. 接着进行的 NIST 测试说明新系统产生的混沌随机序列具有良好的伪随机性, 基于新系统设计伪随机数发生器是可行的. 最后, 电路仿真实验和硬件电路实验的结果表明新系统具有优越的遍历性和物理可实现性. 本文深入分析了新提出的具有宽参数范围的五维保守超混沌系统, 这对于推动研究保守超混沌系统有着积极的影响, 为进一步将保守超混沌系统应用于保密通信等领域提供了理论支撑.

感谢天津工业大学电气工程与自动化学院胡建兵博士给予的讨论.

参考文献

- [1] Yu S M, Lü J H, Li C Q 2016 *J. Elec. Info. Tech.* **38** 735 (in Chinese) [禹思敏, 吕金虎, 李澄清 2016 电子与信息学报 **38** 735]
- [2] Lorenz E N 1963 *J. Atmos. Sci.* **20** 130
- [3] Sprott J C 1994 *Phys. Rev. E* **50** 647
- [4] Chen G R, Ueta T 1999 *Int. J. Bifurcation Chaos* **9** 1465
- [5] Lü J H, Chen G R 2002 *Int. J. Bifurcation Chaos* **12** 659
- [6] Dang X Y, Li C B, Bao B C, Wu H G 2015 *Chin. Phys. B* **24** 050503
- [7] Xian Y J, Fu K R, Xu C B 2021 *J. Vib. Shock*. **40** 15 (in Chinese) [鲜永菊, 扶坤荣, 徐昌彪 2021 振动与冲击 **40** 15]
- [8] Wang G Y, Yuan F, Chen G R, Zhang Y 2018 *Chaos* **28** 013125
- [9] Akhshani A, Akhavan A, Mobaraki A, Lim S C, Hassan Z 2014 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.* **19** 101
- [10] Kadhim A F, Mhaibes H I 2018 *Int. J. Appl. Eng. Res.* **13** 2141
- [11] Qi G Y 2018 *Nonlinear Dyn.* **95** 2063
- [12] Vaidyanathan S, Volos C 2015 *Arch. Control Sci.* **25** 333
- [13] Cang S J, Wu A G, Wang Z H, Chen Z Q 2017 *Nonlinear Dyn.* **89** 2495
- [14] Dong E Z, Yuan M F, Du S Z, Chen Z Q 2019 *Appl. Math. Model.* **73** 40
- [15] Gu S Q, Du B X, Wan Y J 2020 *Int. J. Bifurcation Chaos* **30** 2050242
- [16] Chen M, Wang C, Wu H G, Xu Q, Bao B C 2021 *Nonlinear Dyn.* **103** 643
- [17] Bouteghrine B, Tanougast C, Sadoudi S 2021 *J. Circuits Syst. Comput.* **30** 2150280
- [18] Lin Z S, Wang G Y, Wang X Y, Yu S M, Lü J H 2018 *Nonlinear Dyn.* **94** 1003
- [19] Xu C B, Zhong D, Xia C, Li Z 2019 *J. Vib. Shock*. **38** 125 (in Chinese) [徐昌彪, 钟德, 夏诚, 黎周 2019 振动与冲击 **38** 125]
- [20] Barboza R 2007 *Int. J. Bifurcation Chaos* **17** 4285
- [21] Jia H Y, Chen Z Q, Yuan Z Z 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 4469 (in Chinese) [贾红艳, 陈增强, 袁著祉 2009 物理学报 **58** 4469]
- [22] Liu J M, Zhang W 2013 *Optik* **124** 5528
- [23] Xian Y J, Xia C, Guo T T, Fu K R, Xu C B 2018 *Results Phys.* **11** 368
- [24] Xu C B, Li Z 2019 *J. Zhejiang Univ. (Eng. Sci.)* **53** 1552 (in Chinese) [徐昌彪, 黎周 2019 浙江大学学报(工学版) **53** 1552]
- [25] Sprott J C 2011 *Int. J. Bifurcation Chaos* **21** 2391
- [26] Dong E Z, Jiao X D, Du S Z, Chen Z Q, Qi G Y 2020 *Complexity* **2020** 4627597
- [27] Lakshmanan M, Rajasekar S 2003 *Nonlinear Dynamics* (Berlin Heidelberg: Springer-Verlag) pp191–238
- [28] Wolf A, Swift J B, Swinney H L, Vastano J A 1985 *Physica D* **16** 285
- [29] Bao B C 2013 *An Introduction to Chaotic Circuits* (Beijing: Science Press) pp45–49 (in Chinese) [包伯成 2013 混沌电路导论 (北京: 科学出版社) 第45—49页]
- [30] Ramasubramanian K, Sriram M S 2000 *Physica D* **139** 72
- [31] Rukhin A, Soto J, Nechvatal J, Smid M, Barker E, Leigh S, Levenson M, Vangel M, Banks D, Heckert A, Dray J, Vo S 2021 <https://csrc.nist.gov/publications/detail/sp/800-22/rev-1-a/final> [2021-06-26]
- [32] Yu S M 2011 *Chaotic Systems and Chaotic Circuits* (Xi'an: Xidian University Press) pp293–312 (in Chinese) [禹思敏 2011 混沌系统与混沌电路 (西安: 西安电子科技大学出版社) 第293—312页]

Dynamic study of a new five-dimensional conservative hyperchaotic system with wide parameter range*

Zhang Ze-Feng¹⁾²⁾ Huang Li-Lian^{1)2)†} Xiang Jian-Hong^{1)2)‡} Liu Shuai¹⁾²⁾

1) (*College of Information and Communication Engineering, Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

2) (*MIT Key Laboratory of Advanced Marine Communication and Information Technology,
Harbin Engineering University, Harbin 150001, China*)

(Received 30 March 2021; revised manuscript received 28 June 2021)

Abstract

Conservative systems have no attractors. Therefore, compared with common dissipative systems, conservative systems have good ergodicity, strong pseudo-randomness and high security performance, thereby making them more suitable for applications in chaotic secure communication and other fields. Owing to these features, a new five-dimensional conservative hyperchaotic system with a wide parameter range is designed. Firstly, the Hamiltonian energy and Casimir energy are analyzed, showing that the new system satisfies the Hamiltonian energy conservation and can generate chaos. Next, the dynamic analysis is carried out, including conservativeness proof, equilibrium point analysis, Lyapunov exponential spectrum, and bifurcation diagrams analysis, thereby proving that the new system has the characteristics of conservative system and can always maintain a hyperchaotic state in a wide parameter range. At the same time, the phase diagram and Poincaré section diagram of the new system in a wide parameter range are compared. The results show that the randomness and ergodicity of the system are enhanced with the increase of parameters. Then, the NIST test shows that the chaotic random sequences generated by the new system in a wide parameter range have strong pseudo-randomness. Finally, the circuit simulation and hardware circuit experiment of the conservative hyperchaotic system are carried out, which proves that the new system has good ergodicity and realizability.

Keywords: wide parameter range, conservative hyperchaotic system, pseudo-randomness, ergodicity

PACS: 05.45.-a, 05.45.Jn

DOI: [10.7498/aps.70.20210592](https://doi.org/10.7498/aps.70.20210592)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61203004), the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province, China (Grant No. F201220), and the Joint Guidance Project of the Natural Science Foundation of Heilongjiang Province, China (Grant No. LH2020 F022).

† Corresponding author. E-mail: lilian_huang@163.com

‡ Corresponding author. E-mail: xiangjianhong@hrbeu.edu.cn