

## 侧向局域共振超构板声振特性

郭志巍 郭寒贝 王婷

### Vibro-acoustic performance of acoustic metamaterial plate with periodic lateral local resonator

Guo Zhi-Wei Guo Han-Bei Wang Ting

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 214301 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210595

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210595>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### X形超阻尼局域共振声子晶体梁弯曲振动带隙特性

Flexural vibration band gaps for a phononic crystal beam with X-shaped local resonance metadamping structure

物理学报. 2017, 66(14): 140701 <https://doi.org/10.7498/aps.66.140701>

#### 高压下非铅双钙钛矿 $\text{Cs}_2\text{TeCl}_6$ 的结构和光学性质

Evolutions of structural and optical properties of lead-free double perovskite  $\text{Cs}_2\text{TeCl}_6$  under high pressure

物理学报. 2020, 69(21): 218801 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200988>

#### 长骨中振动声激发超声导波的方法

Vibro-acoustic stimulating ultrasonic guided waves in long bone

物理学报. 2017, 66(15): 154303 <https://doi.org/10.7498/aps.66.154303>

#### 含双曲超构材料的复合周期结构的带隙调控及应用

Band gap engineering and applications in compound periodic structure containing hyperbolic metamaterials

物理学报. 2020, 69(15): 154205 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200084>

#### 双开口Helmholtz局域共振周期结构低频带隙特性研究

Low frequency band gap characteristics of double-split Helmholtz locally resonant periodic structures

物理学报. 2017, 66(6): 064301 <https://doi.org/10.7498/aps.66.064301>

#### 基于多腔型超构材料的声场增强效应

Sound field enhancement based on multiple-cavity metamaterial

物理学报. 2021, 70(15): 154301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202172>

## 侧向局域共振超构板声振特性\*

郭志巍<sup>1)</sup> 郭寒贝<sup>2)</sup> 王婷<sup>3)†</sup>

1) (西北工业大学航海学院, 西安 710072)

2) (武汉第二船舶设计研究院, 武汉 430064)

3) (华中科技大学船舶与海洋工程学院, 武汉 430074)

(2021年3月30日收到; 2021年6月30日收到修改稿)

以侧向局域共振超构板为研究对象, 基于布洛赫定理及弯曲波传播理论, 建立了侧向局域共振超构板的振动响应、声辐射功率及辐射效率理论计算模型, 同时建立了侧向局域共振超构板的有限元模型以验证理论模型的有效性. 进一步开展了有/无周期附加侧向局域共振结构超构板的模态分析, 探索了侧向局域共振超构板辐射声功率及辐射效率随频率变化的关系. 结果表明, 侧向局域共振超构板在两条特定频段(带隙)内的板面均方振速及辐射声功率远低于均匀平板, 而辐射效率却高于均匀平板. 本研究可为推进侧向局域共振超构板在减振降噪领域的工程应用奠定理论基础.

**关键词:** 侧向局域共振超构板, 板面均方振速, 辐射声功率, 带隙

**PACS:** 43.20.+g, 43.40.Dx, 43.40.+s, 68.60.Bs

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210595

## 1 引言

振动与声广泛存在于自然界中. 绝大多数振动与噪声是有害的. 例如, 飞机起飞及降落时的振动使得机身发生剧烈颤抖, 加之噪声使得舒适性降低; 工厂中设备运转产生的振动使得设备精度降低, 噪声还会干扰附近居民的生活与工人的高效工作等. 高频噪声由于波长短易于衰减, 而低频波波长较长, 易于发生衍射, 从而可以远距离传播, 这对于水下航行器的隐蔽性而言极为不利. 因此, 低频振动和噪声抑制已经成为实际工程中亟待解决的一项难题<sup>[1]</sup>.

传统减振降噪手段因集中载荷大、抑振频段高等缺点在工程领域应用中有一定局限性. 通过人工构建结构形式并将其周期排布形成的周期结构在

特定频段控制弹性波传播的特性吸引了众多研究者的目光<sup>[2]</sup>. 由于结构形式或材料周期变化的周期结构对弹性波产生散射作用, 可形成 Bragg 散射带隙; 结构内部具有局域共振现象的周期结构可形成局域共振带隙<sup>[3,4]</sup>. 两种机理形成的带隙均能够有效抑制弹性波的传播. 而局域共振型周期结构通过均质化等效, 其等效参数在特定频段呈现负值, 从而被称作声学超材料<sup>[5]</sup>. 2000年, 武汉大学 Liu 等<sup>[6]</sup>应用局域共振型声子晶体结构实现声学超材料的等效负质量密度, 把普通的声子晶体带隙频率降低了两个数量级, 突破了 Bragg 带隙与结构特征长度匹配的限制, 实现了小尺寸控制大波长的目的. 2006年, 美国伊利诺伊大学香槟分校的 Fang 等<sup>[7]</sup>利用亥姆赫兹共鸣器一维阵列, 实现了负等效模量. 2010年, “双负”声学超材料才首次被延世大学的 Lee 等<sup>[8]</sup>通过实验成功验证.

\* 国家自然科学基金青年科学基金(批准号: 52001131)和中央高校基本科研业务费专项资金(批准号: 3102020HHZY030008)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wang\_ting@hust.edu.cn

声学超构材料突破了传统材料的束缚, 极大地拓展了自然界中现有材料的声学属性, 为调控弹性波带来了全新的视角<sup>[9]</sup>. 将局域共振结构与工程中常用的经典梁、板结构结合可构成具有特殊声学性能的超构梁、板. 声学超构板结构相较于超构梁结构从一维转换至二维, 其运动方程的改变导致相关计算更加复杂. 而平板结构在工程实际中大量应用, 因此声学超构板的振动与声辐射特性具有非常重要的研究意义及工程价值. 国防科技大学温熙森教授课题组<sup>[10,11]</sup>, 设计了一种局域共振超构板, 该超构板由周期排布的弹簧振子和均质板结构组成, 利用平面波展开法计算了超构板的带隙及振动特性, 获得了带隙内弯曲波传递被有效抑制的特性, 同时该超构板能够在特定频段内实现高效隔声. 美国普渡大学 Sun 教授课题组<sup>[12]</sup>提出了一种基于微结构设计的声学超构板, 理论和试验研究表明该超构板的等效质量密度具有强各向异性. 西安交通大学吴九汇教授课题组<sup>[13]</sup>提出了一种轻质局域共振超构板, 其隔声量在多个频段高于普通平板. 科罗拉多大学的 Pai 课题组<sup>[14-16]</sup>设计了周期附加多级弹簧振子的超构板, 总结出超构板抑振机理为振子惯性力与主结构剪力之间相互抵消, 为超构板抑制低频弹性波的优化设计提供了明确的思路. 西北工业大学盛美萍教授课题组<sup>[17,18]</sup>提出侧向局域共振超构板及夹芯声学超构板, 利用理论推导与数值仿真结合的方法研究了带隙内结构振动及辐射声功率被有效抑制的特性.

目前对于声学超构板的研究主要集中在结构振动、隔声、吸声等方面, 对于声学超构板的声辐射特性的文献却比较少见<sup>[19,20]</sup>, 而声学超构板的声辐射特性研究对于工程结构的隐蔽性有着非常重

要的意义. 由于侧向局域共振结构的特殊构造形式, 因此可以利用较小的空间产生多条带隙, 且多条带隙的位置可以通过四杆机构的几何参数灵活调控. 同时, 侧向局域共振超构板的振动及声辐射相比于平板结构在带隙内远低于带隙外水平, 有助于结构振动与噪声控制工程应用. 本文将进一步延续前期侧向局域共振超构板振动特性的工作<sup>[18]</sup>, 采用模态叠加法及瑞利积分方法计算有限大侧向局域共振超构板的振动及声辐射, 并使用有限元仿真模型进行验证, 以揭示侧向局域共振超构板的声辐射特性及规律, 为工程实际结构中的噪声控制提供技术支撑.

## 2 建模与方法

图 1 所示为处于空气介质中的侧向局域共振超构板, 由于空气阻抗与平板阻抗相差较大, 因此可忽略空气负载对平板振动的影响. 对于周期附加侧向局域共振结构, 其垂向弹簧振子质量与刚度分别为  $m_1$  和  $k_1$ , 侧向弹簧振子质量与刚度分别为  $m_2$  和  $k_2$ , 四杆机构的垂向与水平距离比为  $L/D$ . 对于平板结构, 其密度为  $\rho$ , 厚度为  $h$ , 杨氏模量为  $E$ , 泊松比为  $\nu$ . 因此, 周期附加侧向局域共振结构的四边简支平板振动控制方程在频域可写为

$$\begin{aligned} & \tilde{D} \left[ \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w(x, y)}{\partial y^4} \right] \\ & - \rho h \omega^2 w(x, y) \\ & = F \delta(x - x') \delta(y - y') \\ & + \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T f(x_s, y_t) \delta(x - x_s) \delta(y - y_t), \quad (1) \end{aligned}$$

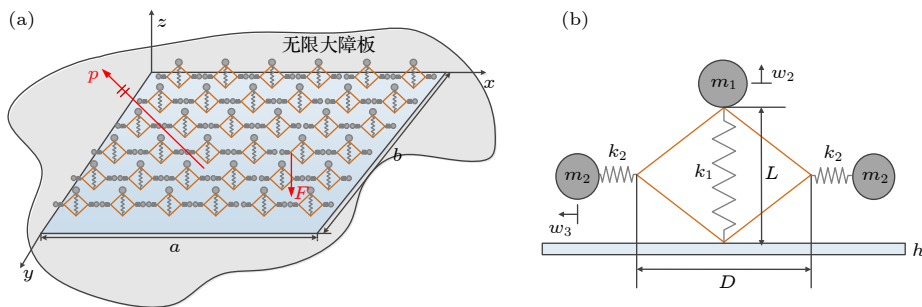


图 1 浸润于空气中的侧向局域共振超构板 (a) 受外力激励的侧向局域共振超构板鸟瞰图; (b) 侧向局域共振超构板正视图  
Fig. 1. Acoustic metamaterial plate with periodic local resonators submerged in air: (a) Perspective view of the acoustic metamaterial plate with external force applied; (b) front view of a single unit cell of the acoustic metamaterial plate.

$$-\omega^2 m_2 w_{2st} = k_1 [w(x_s, y_t) - w_{2st}] + 2k_2 \frac{L}{2D} \left\{ -\frac{L}{2D} [w_{2st} - w(x_s, y_t)] - w_{3st} \right\}, \quad (2)$$

$$-\omega^2 m_3 w_{3st} = k_2 \left\{ -\frac{L}{2D} [w_{2st} - w(x_s, y_t)] - w_{3st} \right\}, \quad (3)$$

式中,  $\omega$  为角频率,  $s$  和  $t$  分别代表  $x$  和  $y$  方向侧向振子的个数,  $\tilde{D} = Eh^3/[12(1-\nu^2)]$  为抗弯刚度,  $F$  为作用于平板上的垂向集中力, 而

$$f(x_s, y_t) = -k_1 [w(x_s, y_t) - w_{2st}] - 2k_2 \frac{L}{2D} \left\{ -\frac{L}{2D} [w_{2st} - w(x_s, y_t)] - w_{3st} \right\} \quad (4)$$

为周期附加侧向局域共振结构对平板结构的作用力.

因此, 简支平板振动位移可表示为

$$w_1(x, y) = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N W_{1mn} \sin(\kappa_m x) \sin(\bar{\kappa}_n y), \quad (5)$$

式中,  $\kappa_m = m\pi/a$ ,  $\bar{\kappa}_n = n\pi/b$  分别表示沿  $x$  和  $y$  方向的波数.

对于由狄拉克函数所表示的点力可分解为

$$F\delta(x-x')\delta(y-y') = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N F_{mn} \sin(\kappa_m x) \sin(\bar{\kappa}_n y), \quad (6)$$

式中,  $F_{mn}$  为模态作用力. 由三角函数的正交性可知

$$F_{mn} = \frac{F}{L_{am}L_{bn}} \sin(\kappa_m x') \sin(\bar{\kappa}_n y'), \quad (7)$$

式中,

$$L_{am} = a/2, \quad L_{bn} = b/2. \quad (8)$$

利用同样的方法对侧向局域共振结构与平板之间耦合作用力进行变换得

$$f(x_s, y_t) \delta(x-x_s) \delta(y-y_t) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N F_{mnst} \sin \kappa_m x \sin \bar{\kappa}_n y, \quad (9)$$

$$F_{mnst} = \frac{f(x_s, y_t)}{L_{am}L_{bn}} \sin \kappa_m x_s \sin \bar{\kappa}_n y_t. \quad (10)$$

将 (5) 式、(6) 式和 (9) 式代入 (1)–(3) 式中, 同时利用三角函数正交性可得

$$\begin{aligned} & \left[ \tilde{D}(\kappa_m^2 + \bar{\kappa}_n^2)^2 - \omega^2 \rho h \right] W_{mn} - \frac{1}{L_{am}L_{bn}} \left[ k_1 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{L}{D} \right)^2 \right] \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \sin \kappa_m x_s \sin \bar{\kappa}_n y_t w_{2st} \\ & - \frac{1}{L_{am}L_{bn}} \left[ -k_1 - \frac{k_2}{2} \left( \frac{L}{D} \right)^2 \right] \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sin \kappa_m x_s \sin \bar{\kappa}_n y_t \sin \kappa_p x_s \sin \bar{\kappa}_q y_t W_{pq} \\ & - \frac{k_2 L}{L_{am}L_{bn}D} \sum_{s=1}^S \sum_{t=1}^T \sin \kappa_m x_s \sin \bar{\kappa}_n y_t w_{3st} = \frac{F \sin \kappa_m x' \sin \bar{\kappa}_n y'}{L_{am}L_{bn}}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\left[ -k_1 - \frac{k_2}{2} \left( \frac{L}{D} \right)^2 \right] \sum_{q=0}^M \sum_{p=0}^N \sin \kappa_p x_s \sin \bar{\kappa}_q y_t W_{pq} + \left[ k_1 + \frac{k_2}{2} \left( \frac{L}{D} \right)^2 \right] w_{2st} + \frac{k_2 L}{D} w_{3st} - \omega^2 m_2 w_{2st} = 0, \quad (12)$$

$$-\frac{k_2 L}{2D} \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \sin \kappa_p x_s \sin \bar{\kappa}_q y_t W_{pq} + \frac{k_2 L}{2D} w_{2st} + k_2 w_{3st} - \omega^2 m_3 w_{3st} = 0. \quad (13)$$

将 (11)–(13) 式整理成矩阵形式

$$[\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}] \boldsymbol{\Phi} = \mathbf{F}, \quad (14)$$

式中,  $\mathbf{K}$  为刚度矩阵,  $\mathbf{M}$  为质量矩阵,  $\mathbf{F}$  为外力向量. 它们的具体表达式为

$$\boldsymbol{\Phi} = [\mathbf{W}_1 \quad \mathbf{W}_2 \quad \mathbf{W}_3]^T = [ [W_{mn}]_{1 \times (M \times N)} [w_{2st}]_{1 \times (S \times T)} [w_{3st}]_{1 \times (S \times T)} ]^T, \quad (15)$$

$$\mathbf{F} = [\mathbf{F} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0}] = [ [F_{mn}]_{1 \times (M \times N)} \quad \mathbf{0} \quad \mathbf{0} ], \quad (16)$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \tilde{D}\mathbf{K}' - \frac{\left[-k_1 - \frac{k_2}{2}\left(\frac{L}{D}\right)^2\right]}{L_{am}L_{bn}}\mathbf{U} & \frac{4\left[k_1 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{L}{D}\right)^2\right]}{L_{am}L_{bn}}\mathbf{P} & -\frac{k_2}{L_{am}L_{bn}}\frac{L}{D}\mathbf{P} \\ \left[-k_1 - \frac{k_2}{2}\left(\frac{L}{D}\right)^2\right]\mathbf{P} & \left[k_1 + \frac{k_2}{2}\left(\frac{L}{D}\right)^2\right] & \frac{k_2L}{D} \\ -\frac{k_2L}{2D}\mathbf{P} & \frac{k_2L}{2D} & k_2 \end{bmatrix}, \quad (17)$$

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \rho h \mathbf{I} & 0 & 0 \\ 0 & m_1 & 0 \\ 0 & 0 & m_2 \end{bmatrix}, \quad (18)$$

$$\mathbf{K}' = \begin{bmatrix} (\kappa_1^2 + \bar{\kappa}_1^2)^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & (\kappa_M^2 + \bar{\kappa}_N^2)^2 \end{bmatrix}, \quad (19)$$

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \sin \kappa_1 x_s \sin \bar{\kappa}_1 y_t & \sin \kappa_m x_s \sin \bar{\kappa}_n y_t & \cdots \\ \sin \kappa_M x_s \sin \bar{\kappa}_N y_t \end{bmatrix}^T, \quad (20)$$

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (21)$$

求解 (14) 式可获得外部激励力  $\mathbf{F}$  作用下侧向局域共振超构板在简支作用下的位移系数, 将其代入 (5) 式可获得相应的振动位移. 因此, 对该平板振动位移进行求导可获得相应的速度响应为

$$v(x, y) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N V_{mn} \sin(\kappa_m x) \sin(\bar{\kappa}_n y), \quad (22)$$

式中,  $V_{mn} = \mathbf{j}\omega W_{mn}$ . 该平板均方振速为

$$\langle \bar{v}^2 \rangle = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \frac{1}{8} V_{mn} V_{mn}^*, \quad (23)$$

式中, \*代表复数共轭. 在一远场观测点  $S$ , 该点相对于坐标系原点位置为  $(r, \theta, \varphi)$ , 其中  $r$  为坐标原点距观测点距离,  $\theta$  为观测俯仰角,  $\varphi$  为观测方位角. 利用瑞利积分可得该观测点处由侧向局域共振超构板辐射的声压为

$$p(r, \theta, \varphi) = \frac{\mathbf{j}k_0 c \rho_0}{2\pi} \int_0^a \int_0^b \frac{v(x, y) e^{-\mathbf{j}kr}}{r} dy dx. \quad (24)$$

将 (22) 式代入 (24) 式可得

$$p(r, \theta, \varphi) = \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N V_{mn} T_{mn}(r, \theta, \varphi), \quad (25)$$

式中,

$$T_{mn}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{j}k_0 \rho_0 c \frac{e^{-\mathbf{j}kr}}{2\pi r} \frac{ab}{mn\pi^2} \times \frac{(-1)^m e^{-\mathbf{j}\tau_x} - 1}{[\tau_x/(m\pi)]^2 - 1} \frac{(-1)^n e^{-\mathbf{j}\tau_y} - 1}{[\tau_y/(n\pi)]^2 - 1}, \quad (26)$$

其中,

$$\tau_x = ka \sin \theta \cos \varphi, \quad \tau_y = kb \sin \theta \sin \varphi. \quad (27)$$

因此, 该侧向局域共振超构板的辐射声功率可通过在远场某一球面对 (25) 式进行积分获得.

$$\begin{aligned} \Pi &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{|p(r, \theta, \varphi)|^2}{2\rho_0 c} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi \\ &= \sum_{m=0}^M \sum_{n=0}^N \sum_{p=0}^M \sum_{q=0}^N \hat{V}_{mn} \hat{V}_{pq}^* \\ &\quad \times \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{T_{mn}(r, \theta, \varphi) T_{pq}^*(r, \theta, \varphi)}{2\rho_0 c} \\ &\quad \times r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \end{aligned} \quad (28)$$

由此可得辐射效率为

$$\sigma = \frac{\Pi}{\frac{1}{2}\rho_0 cab \langle \bar{v}^2 \rangle} = \frac{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \sum_{p=1}^M \sum_{q=1}^N \hat{V}_{mn} \hat{V}_{pq}^* \sigma_{mnpq}}{\sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \hat{V}_{mn} \hat{V}_{mn}^*}. \quad (29)$$

### 3 结果与讨论

针对本文所提出的计算侧向局域共振超构板的振动及声辐射计算方法, 首先采用有限元方法对该方法有效性进行验证. 建立侧向局域共振超构板有限元模型, 使用 SHELL181 单元建立平板单元, MASS21 单元建立垂直方向质量及侧向质量, COMBIN40 单元建立垂直及侧向弹簧单元, BEAM188 单元建立四杆机构. 设置垂直方向质量及弹簧沿垂直平板方向振动, 设置侧向质量及弹簧沿平行平板方向振动, 同时设置弹簧阻尼参数. 侧向局域共振超构板计算参数见表 1. 在  $x = 0.1$  m,  $y = 0.1$  m 处

施加一简谐力, 并提取  $x = 0.4 \text{ m}$ ,  $y = 0.3 \text{ m}$  处的振动加速度, 采用参考加速度  $a_{\text{ref}} = 1 \times 10^{-6} \text{ m/s}^2$  计算该平板的振动加速度级, 相应的理论分析及仿真分析结果如图 2 所示.

表 1 侧向局域共振超构板模型计算参数  
Table 1. Parameters for the metamaterial plate with periodic lateral local resonators.

参数名称	参数符号	参数取值
平板杨氏模量	$E$	$2.1 \times 10^{11} \text{ Pa}$
平板密度	$\rho$	$7850 \text{ kg/m}^3$
平板泊松比	$\nu$	0.3
平板厚度	$h$	0.003 m
垂向振子刚度	$k_1$	$1 \times 10^4 \text{ N/m}$
垂向振子质量	$m_1$	0.005 kg
侧向振子刚度	$k_2$	$0.5 \times 10^4 \text{ N/m}$
侧向振子质量	$m_2$	0.002 kg
四杆机构几何参数比	$L/D$	1
空气密度	$\rho_0$	$1.25 \text{ kg/m}^3$
空气中声速	$c$	343 m/s

由图 2 可见, 理论方法及有限元方法计算的侧向局域共振超构板振动加速度级结果曲线吻合, 一致性较好, 验证了本文计算方法的有效性. 分析该加速度级曲线可知, 在 207—234 Hz 及 270—329 Hz 两个频段, 侧向局域共振超构板的振动加速度远低于其他频段, 这表明侧向局域共振超构板可在特定频段有效抑制弯曲波的传播. 参照文献 [18] 可知, 这两个频段被称作带隙, 带隙所处频段无相应的实数波数, 弹性波以指数形式快速衰减. 弹性波衰减的物理机理主要是由于附加侧向局域共振结构

共振所产生的惯性力与弯曲波在平板内引起的剪力相平衡, 从而将弹性波能量暂时存储在侧向局域共振结构之中. 若侧向局域共振结构附带阻尼特性, 则部分弹性波能量将被阻尼所耗散.

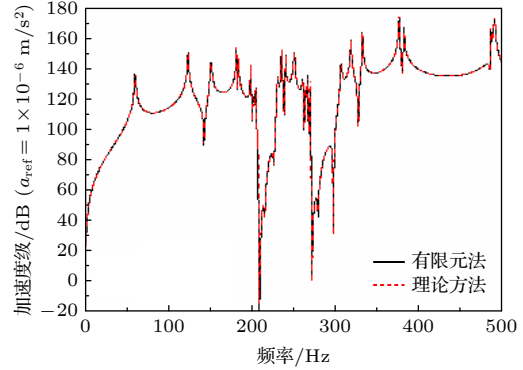


图 2 侧向局域共振超构板振动加速度级的理论方法与有限元法结果对比

Fig. 2. Comparison of the theoretical and simulative results of the acceleration level for the metamaterial plate.

为明确侧向局域共振超构板的抑振机理, 本文计算了平板振动模态频率及侧向局域共振超构板模态频率, 见表 2 和表 3.

计算可得, 在 500 Hz 以下频段, 无周期附加侧向局域共振结构模态仅 7 阶, 如表 2 所列, 而侧向局域共振超构板则有 267 阶模态, 如表 3 所列, 其中 207.1—207.9 Hz 有 5 阶模态, 208.1—208.9 Hz 有 119 阶模态, 271.0—271.1 Hz 有 121 阶模态. 对比表 2 中平板模态频率可知, 周期附加侧向局域共振结构以后, 原平板结构模态改变. 低频模态向更低频移动, 这主要是由于周期侧向局域共振结构所

表 2 平板模态频率

Table 2. Modal frequency of the bare plate.

模态阶数	1	2	3	4	5	6	7
频率/Hz	75.8	164.6	214.6	303.3	312.6	445.8	451.4

表 3 侧向局域共振超构板模态频率

Table 3. Modal frequency of the metamaterial plate.

模态阶数	1	2	3	4	5	6	7
频率/Hz	70.8	147.8	179.9	200.95	201.7	206.3	206.4
模态阶数	7—11	12—130	131	132	133	134	135
频率/Hz	207.1—207.9	208.1—208.9	217.8	223.7	234.3	259.3	260.6
模态阶数	136	137	138	139	140—260	261	262
频率/Hz	267.9	268.0	269.1	269.9	270.0—271.1	278.6	282.0
模态阶数	263	264	265	266	267		
频率/Hz	288.3	329.8	336.9	456.9	462.2		

带来的附加质量效应. 其他频段的频率改变主要是周期侧向局域共振结构振动改变了原平板的能量分布, 使得结构自身固有属性发生改变.

结合图 2 中所示侧向局域共振超构板振动响应可知, 第一带隙以下频段有五阶模态分别对应振动响应曲线的 5 个峰值, 而 208.1—208.9 Hz 的 119 阶模态及 270.0—271.1 Hz 的 121 阶模态均为附加侧向局域共振结构的模态, 此时, 主结构平板的振动能量以弹簧的势能及质量的动能的形式被暂时储存在侧向局域共振结构中, 从而使得主结构平板的振动响应在两带隙内较小, 表现出弯曲波被抑制的现象.

为具体分析附加周期侧向局域共振结构对平板振动特性的影响, 选取了平板和侧向局域共振超构板四阶代表性模态, 如图 3 和图 4 所示.

由图 3 和图 4 可见, 平板的第 1 阶模态振型与侧向局域共振超构板的第 1 阶模态振型一致, 平板的第 4 阶模态振型和侧向局域共振超构板的第 134 阶模态振型一致. 平板第 1 阶模态频率为 75.8 Hz, 超构板的第 1 阶模态频率为 70.8 Hz, 平板第 4 阶模态频率为 303.4 Hz, 超构板的第 134 阶模态频率为 259.3 Hz. 通过对比两种板结构的两阶模态频率及模态振型可以发现, 附加侧向局域共振结构后, 平板模态频率向低频移动, 同时由于侧向局域共振

结构周期排布, 因此, 侧向局域共振超构板的振动模态是由原平板的结构的振动模态之间穿插许多侧向局域共振结构共振频率组成. 平板结构的第 5 阶模态振型 (312.6 Hz) 与侧向局域共振超构板的第 265 阶模态振型 (336.9 Hz) 相似, 但振动峰谷值不同, 其具体振动特性应仔细结合所有振动模态进行详细分析, 以明确附加侧向局域共振结构后平板振动模态的变化, 揭示侧向局域共振超构板抑振机理.

以下对侧向局域共振超构板辐射声功率开展计算, 以揭示结构声辐射特性及规律. 采用表 2 中结构参数及材料参数, 以 (28) 式和 (29) 式计算平板和侧向局域共振超构板的振动辐射声功率及辐射效率, 结果见图 5 和图 6.

图 5 中 MSV 表示板面均方振速, SRP 表示辐射声功率. 对比平板, 侧向局域共振超构板的板面平均振速在带隙内远低于平板的板面振速, 这主要是由于侧向局域共振超构板在带隙内的抑振特性所导致. 进一步, 侧向局域共振超构板的振动辐射声功率在带隙内也远低于平板. 图 6 所示为平板与侧向局域共振超构板的辐射效率对比. 结果表明在 0—Hz 之间, 平板与侧向局域共振超构板辐射效率相同, 70—200 Hz 侧向局域共振超构板辐射效率低于平板, 两带隙内侧向局域共振超构板的辐射效率远高于平板, 带隙以上频段, 两种曲线取值

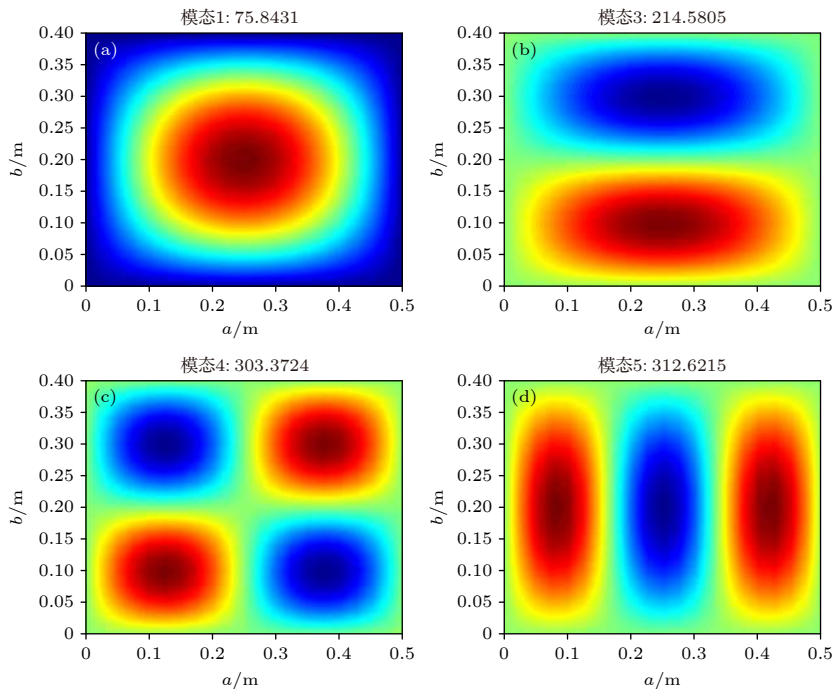


图 3 平板第 1, 3, 4, 5 阶模态

Fig. 3. Modal analysis of bare plate: the 1<sup>st</sup>, 3<sup>rd</sup>, 4<sup>th</sup> and 5<sup>th</sup> modes.

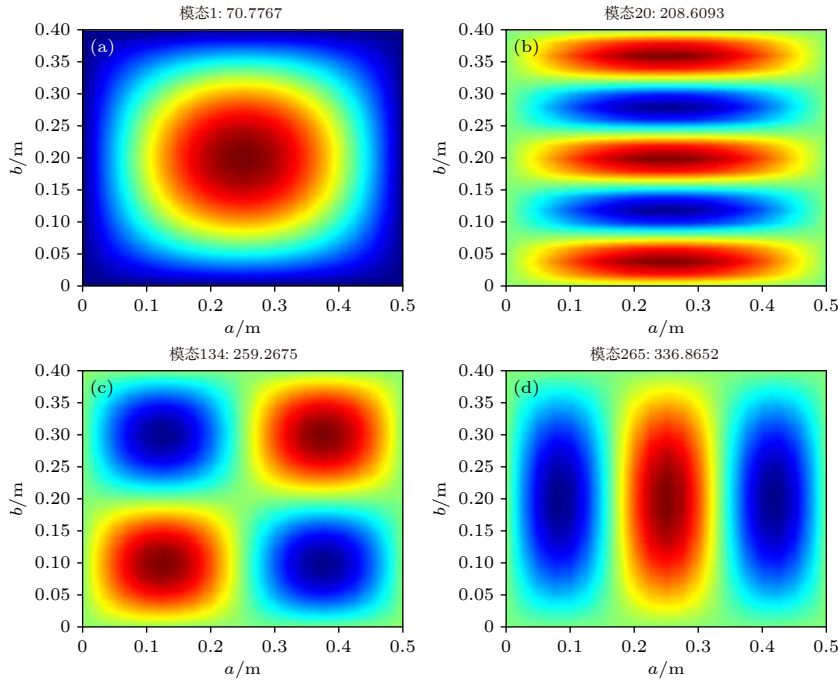


图 4 侧向局域共振超构板第 1, 20, 134, 265 阶模态

Fig. 4. Modal analysis of the metamaterial plate: the 1<sup>st</sup>, 20<sup>th</sup>, 134<sup>th</sup> and 265<sup>th</sup> modes.

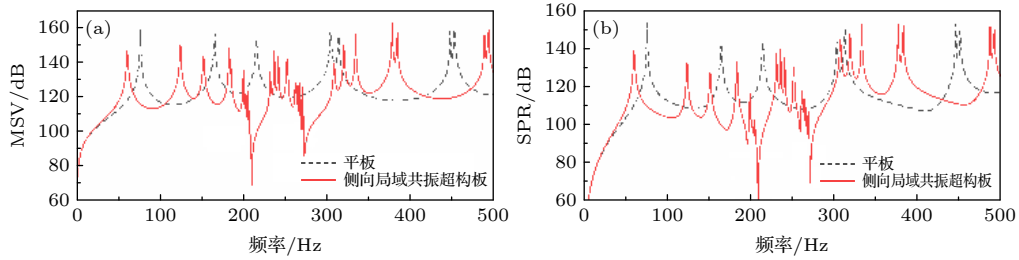


图 5 平板与侧向局域共振超构板的 (a) 表面振速 (MSV) 与 (b) 辐射声功率 (SRP) 对比

Fig. 5. Comparison of (a) mean square velocity and (b) sound radiation power between the bare plate and the metamaterial plate.

相当. 由 (29) 式可知, 辐射效率由远处辐射声能量除以板面振动能量计算而来, 表示结构向周围辐射声能量的能力. 结合图 5 和图 6 所示结果可知, 带

隙内侧向局域共振超构板振动能量显著降低, 即使其辐射效率增大, 其计算所得辐射声功率仍然远低于带隙外, 即带隙内超构板振动模式辐射声能力强, 但超构板振动能量低, 导致超构板辐射声能量低.

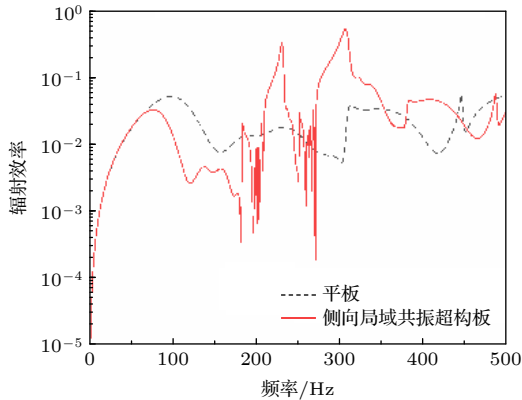


图 6 平板与侧向局域共振超构板的辐射效率对比

Fig. 6. Comparison of radiation efficiency between the bare plate and the metamaterial plate.

## 4 结 论

本文采用理论分析方法及有限元法对侧向局域共振超构板的振动响应进行了分析, 同时推导了声辐射功率及辐射效率的计算表达式. 基于模态叠加法及布洛赫定理, 获得侧向局域共振超构板的加速度级及声辐射特性. 有限元方法计算所得超构板加速度级与理论计算结果吻合, 验证了本文所采用的理论方法的正确性. 同时, 结合文献, 侧向局域共振超构板能够产生两条带隙, 且带隙内超构板的板面均方速度及辐射声功率均远远低于均匀平板,

这主要是由于附加局域共振结构共振产生惯性力抵消了弯曲波在平板内引起的剪力. 而带隙内, 超构板的辐射效率却高于均匀平板, 这说明带隙内超构板的振动模态辐射声能力强, 但辐射的能量低, 结果导致带隙内超构板的辐射声功率较低. 本文所做研究表明侧向局域共振超构板在特定频段能够有效抑制振动能量的传播及声能量的辐射.

## 参考文献

- [1] Lu Z, Yu X, Lau S K, Khoo B C, Cui F 2020 *Appl. Acoust.* **157** 107003
- [2] Ding C L, Dong Y B, Zhao X P 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 194301 (in Chinese) [丁昌林, 董仪宝, 赵晓鹏 2018 物理学报 **67** 194301]
- [3] Liu J, Hou Z L, Fu X J 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 154302 (in Chinese) [刘娇, 侯志林, 傅秀军 2015 物理学报 **64** 154302]
- [4] Gao N, Tang L, Deng J, Lu K, Chen K 2021 *Appl. Acoust.* **175** 107845
- [5] Shaat M, El Dhaba A R 2019 *Compos. Part B-Eng.* **172** 506
- [6] Liu Z, Zhang X, Mao Y, Zhu Y Y, Yang Z, Chan C T, Sheng P 2000 *Science* **289** 1734
- [7] Fang N, Xi D, Xu J, Ambati M, Srituravanich W, Sun C, Zhang X 2006 *Nat. Mater.* **5** 452
- [8] Lee S H, Park C M, Seo Y M, Kim C K 2010 *Phys. Rev. B* **81** 241102
- [9] Tian Y, Ge H, Lu M H, Chen Y F 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 194301 (in Chinese) [田源, 葛浩, 卢明辉, 陈延峰 2019 物理学报 **68** 194301]
- [10] Xiao Y, Wen J, Wen X 2012 *J. Phys. D Appl. Phys.* **45** 195401
- [11] Xiao Y, Wen J, Wen X 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5408
- [12] Zhu R, Liu X N, Huang G L, Huang H H, Sun C T 2012 *Phys. Rev. B* **86** 144307
- [13] Ma F, Meng H, Wu J H 2017 *J. Appl. Phys.* **121** 015102
- [14] Peng H, Pai P F 2014 *Int. J. Mech. Sci.* **89** 350
- [15] Peng H, Pai P F, Deng H 2015 *Int. J. Mech. Sci.* **103** 104
- [16] Sun H W, Lin G C, Du X W, Pai P F 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 154302 (in Chinese) [孙宏伟, 林国昌, 杜星文, 裴佩 2012 物理学报 **61** 154302]
- [17] Wang T, Sheng M P, Guo Z W, Qin Q H 2016 *Appl. Acoust.* **114** 118
- [18] Wang T, Sheng M, Ding X, Yan X 2018 *J. Phys. D Appl. Phys.* **51** 115306
- [19] Guo Z, Sheng M, Pan J 2019 *Appl. Sci.* **9** 3651
- [20] Song Y, Feng L, Liu Z, Wen J, Yu D 2019 *Int. J. Mech. Sci.* **150** 744

# Vibro-acoustic performance of acoustic metamaterial plate with periodic lateral local resonator<sup>\*</sup>

Guo Zhi-Wei<sup>1)</sup> Guo Han-Bei<sup>2)</sup> Wang Ting<sup>3)†</sup>

1) (*School of Marine Science and Technology, Northwestern Polytechnical University, Xi'an 710072, China*)

2) (*The Second Ship-Designing Institute of Wuhan, Wuhan 430064, China*)

3) (*School of Naval Architecture and Ocean Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

( Received 30 March 2021; revised manuscript received 30 June 2021 )

## Abstract

Based on the Bloch theory and the flexural wave propagation theorem, the model for calculating the vibration response, sound radiation power and radiation efficiency of an acoustic metamaterial plate is established. The modal analysis of a bare plate and the plate attached to periodical lateral local resonators are developed to investigate the vibration regulation. In addition, the patterns of the sound radiation power and radiation efficiency of the plate attached to periodical lateral local resonators versus frequency are studied. The results show that 1) in a specific frequency range, the mean square velocity and the sound radiation power are far lower than those of the bare plate, which is due to the resonance of the lateral local resonator; 2) unlike the vibration response and sound radiation power, the radiation efficiency of the plate attached to periodical lateral local resonator is higher than that of the bare plate. The investigation of the plate attached to lateral local resonator in this paper lays a solid foundation for the practical engineering in the field of vibration suppression and noise reduction.

**Keywords:** acoustic metamaterial plate with periodic lateral local resonators, mean square velocity, sound radiation power, band gap

**PACS:** 43.20.+g, 43.40.Dx, 43.40.+s, 68.60.Bs

**DOI:** [10.7498/aps.70.20210595](https://doi.org/10.7498/aps.70.20210595)

---

\* Project supported by the Young Scientists Fund of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 52001131) and the Fundamental Research Funds for the Central Universities, China (Grant No. 3102020HHZY030008).

† Corresponding author. E-mail: [wang\\_ting@hust.edu.cn](mailto:wang_ting@hust.edu.cn)