

## 高阶效应下对称三量子点系统中光孤子稳定性研究

任波 余彦超 徐小凤 叶伏秋

### Stability of optical soliton in symmetrical three-quantum-dot system under high-order effects

Ren Bo She Yan-Chao Xu Xiao-Feng Ye Fu-Qiu

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 224205 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210942

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210942>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 点间隧穿调控五能级M型三量子点电磁感应透明介质中的孤子碰撞性质

Controlling collision properties of solitons in five-level M-type triple quantum dot electromagnetically induced transparency medium by inter-dot tunneling coupling

物理学报. 2020, 69(17): 174203 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200141>

#### 纵波光学声子耦合对级联型电磁感应透明半导体量子阱中暗-亮光孤子类型的调控

Controlling of dark or bright soliton type in a cascade-type electromagnetically induced transparency semiconductor quantum well by the coupling longitudinal optical phonons

物理学报. 2017, 66(3): 034202 <https://doi.org/10.7498/aps.66.034202>

#### 电磁诱导透明暗孤子的耗散变分束缚分析

Dissipative variational analysis for bounded dark solitons of electromagnetically induced transparency

物理学报. 2018, 67(6): 064207 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172567>

#### 基于电磁诱导透明机制的压缩光场量子存储

Analysis of electromagnetically induced transparency based on quantum memory of squeezed state of light

物理学报. 2017, 66(7): 074201 <https://doi.org/10.7498/aps.66.074201>

#### 量子点操控的光子探测和圆偏振光子发射

Single photon detection and circular polarized emission manipulated with individual quantum dot

物理学报. 2018, 67(22): 227301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20182049>

#### 量子点单光子源的光纤耦合

Optical fiber coupling of quantum dot single photon sources

物理学报. 2021, 70(8): 087801 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201605>

# 高阶效应下对称三量子点系统中光孤子稳定性研究\*

任波<sup>1)2)</sup> 余彦超<sup>2)†</sup> 徐小凤<sup>2)</sup> 叶伏秋<sup>1)‡</sup>

1) (吉首大学物理与机电工程学院, 吉首 416000)

2) (铜仁学院物理与电子工程系, 铜仁 554300)

(2021年5月19日收到; 2021年6月19日收到修改稿)

利用多重尺度法解析地研究了窄脉冲探测光激发下半导体三量子点分子系统中高阶效应对光孤子稳定性的影响. 结果表明, 由标准非线性薛定谔方程所描述的光孤子在传播的过程中会出现较大衰减, 而由高阶非线性薛定谔方程所描述的光孤子却有着较为良好的稳定性. 此外, 数值模拟光孤子间的相互作用发现, 由标准非线性薛定谔方程所描述的两光孤子碰撞后其振幅迅速衰减并辐射出较为严重色散波, 而由高阶非线性薛定谔方程所描述的两光孤子碰撞后其形状几乎不发生任何变化. 这主要是由于当入射的探测光脉冲足够窄时, 系统须采用高阶方程来描述, 其物理原因是方程中的高阶效应, 包括非瞬时效应和三阶色散效应不能被忽略或当作微扰处理. 这种稳定的光孤子对于将来的光信息处理和传输技术有着潜在的应用价值.

**关键词:** 隧穿诱导透明, 光孤子, 半导体量子点分子

**PACS:** 42.50.Gy, 42.65.Tg, 73.40.Gk

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210942

## 1 引言

随着半导体技术的兴起, 作为半导体量子局限材料的半导体量子阱、量子点 (semiconductor quantum dot, SQD) 在非线性光学等领域已成为了研究的热点之一<sup>[1-3]</sup>. 这是由于半导体量子阱、量子点具有着类似超冷原子的分立能级结构, 且在实际应用中有着易于集成、易于调控, 以及较大的非线性参数等优良特性<sup>[4,5]</sup>. 此外, 在量子阱、量子点介质中产生保真度高、抗干扰能力强的光孤子<sup>[6-9]</sup>也被人们在量子通信和量子调控等领域广泛地关注<sup>[10-12]</sup>. 如, Yang 等<sup>[13]</sup>在单个量子点中通过双激子相干成匹配慢光孤子对, 发现孤子间碰撞的作用

力是吸引还是排斥是由孤子间的相位差来控制的; Mahmoudi 等<sup>[14]</sup>在半导体双量子点 (Double Quantum Dots, DQD) 系统中, 证实了点间隧穿耦合强度能够对控制光的群速度进行有效调控, 并在非相干泵浦场的间接激发下, 利用吸收双态到增益双态的转换实现了光脉冲的无吸收超光速传播; She 等<sup>[15]</sup>在研究 DQD 分子系统中时间光孤子的形成时发现, 调节控制场强度可以实现亮、暗光孤子的转换; Hao 等<sup>[16]</sup>通过对半导体双量子阱系统中光孤子的传播性质进行研究, 得到了弱场激发下的以超慢群速度传播的暗光孤子.

然而, 目前人们主要倾向于研究宽脉冲在 SQD 中的非线性传播特性, 为简单起见, 通常忽略了其中的高阶效应. 在数学上, 也使用忽略了高阶效

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12064038, 12165008)、贵州省科研项目 (批准号: KY[2019]179, KY[2017]315, ZK[2021]034)、贵州省优秀青年科技人才项目 (批准号: [2019]5673) 和铜仁市科技局科技基金 (批准号: [2020]77) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [yesh@xtu.edu.cn](mailto:yesh@xtu.edu.cn)

‡ 通信作者. E-mail: [phyfq@jsu.edu.cn](mailto:phyfq@jsu.edu.cn)

应的标准非线性薛定谔 (standard nonlinear Schrödinger, SNLS) 方程来描述光场的非线性传播行为. 值得注意的是, 当脉冲宽度较窄时, 系统的高阶效应包括非瞬时效应、三阶色散效应等是较为显著的, 此时则应使用包含有高阶效应的高阶非线性薛定谔 (high order nonlinear Schrödinger, HNLS) 方程来描述其传播特性 [17–22]. 如, Huang 等 [23,24] 在超冷原子和量子阱系统中发现, 当脉冲宽度较窄时, 系统的三阶色散、非瞬时效应是十分显著的, 此时, 这些参量不能被当作微扰处理; 2016 年, Mani 等 [25] 研究了高阶非线性效应对于脉冲宽度为 1 ps 内孤子脉冲偏移的影响, 结果表明, 负三阶色散能够有效抑制相邻孤子脉冲之间的碰撞; 2017 年, Liu 等 [26] 在研究变系数耦合 HNLS 方程中孤子的相互作用时发现, 两个孤子的速度与三阶色散系数有关, 高阶效应会影响高比特率孤子脉冲的传输等.

基于此, 本文探究了计及高阶效应的窄脉冲弱探测场与三量子点 (three quantum dots, TQD) 相互作用时光孤子的稳定性问题. 利用多重尺度法解析地得到了描述弱探测光包络函数的 HNLS 方程, 进而得到其基阶孤子解. 通过数值研究其稳定性及碰撞特性, 我们发现: 相比于 SNLS 方程所描述的光孤子在传播及碰撞过程中会出现较大程度衰减失真而言, HNLS 方程所描述的光孤子则能够在传播及碰撞过程很好地保持形状几乎不发生任何变化, 即稳定性更为良好. 这主要的原因是由于当输入的探测光脉冲足够窄时, 高阶方程中的高阶效应包括非瞬时效应、三阶色散效应等不能被忽略或当作微扰处理.

## 2 理论模型及其麦克斯韦-薛定谔方程组

根据现有的实验条件, 利用分子束外延法和原子层刻蚀法可构建如图 1 所示的对称 TQD 分子模型 [27–30]. 该模型在中心频率为  $\omega_p$  的窄脉冲弱探测场激发下, 在 QD1 内可形成电子空穴对的状态, 即激子态  $|4\rangle$ , 同时通过外加偏置电压的作用, QD1 导带中的电子将通过隧穿势垒耦合效应被限制在 QD1 与 QD2, QD3 的导带间 [29,31] 分别形成间接激子态  $|2\rangle$ 、 $|3\rangle$ . 而对于能级  $|1\rangle$  则是体系的基态. TQD 系统的哈密顿量可表示为 (假设  $\hbar = 1$ )

$$H = \omega_2|2\rangle\langle 2| + \omega_3|3\rangle\langle 3| + \omega_4|4\rangle\langle 4| - (\Omega_p e^{-i\omega_p t}|4\rangle\langle 1| + T_{e1}|4\rangle\langle 2| + T_{e2}|4\rangle\langle 3| + \text{H.c.}), \quad (1)$$

式中,  $\Omega_p = p_{41}\varepsilon_p/\hbar$  是探测场的半拉比频率,  $T_{e1} = p_{42}\varepsilon_p/\hbar$ ,  $T_{e2} = p_{43}\varepsilon_p/\hbar$  描述的是 QD1 与 QD2(QD3) 之间的隧穿耦合强度,  $p_{4i}$  ( $i = 1, 2, 3$ ) 表示能级  $|i\rangle$  和  $|4\rangle$  的电偶极跃迁矩阵元. 系统的光场形式可表  $\mathbf{E}(r, t) = \mathbf{e}_p \varepsilon_p \exp[i(\mathbf{k}_p z - \omega_p t)] + \text{E.c.}$ , 其中  $\mathbf{e}_p$ ,  $\varepsilon_p$  及  $\mathbf{k}_p$  分别为极化方向、探测光场的包络及波矢, E.c 表示探测光场的复共轭项. 在相互作用绘景下, 考虑旋转波近似和电偶极近似以及慢变包络近似 [4,5,11,15], 描述探测光场与 TQD 系统相互作用的麦克斯韦-薛定谔方程组 (麦克斯韦-布洛赫方程组已在附录 A 中给出) 可表示为:

$$i\frac{\partial}{\partial t} a_1 + \Omega_p^* a_4 = 0, \quad (2a)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + d_2\right) a_2 + T_{e1} a_4 = 0, \quad (2b)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + d_3\right) a_3 + T_{e2} a_4 = 0, \quad (2c)$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + d_4\right) a_4 + \Omega_p a_1 + T_{e1} a_2 + T_{e2} a_3 = 0, \quad (2d)$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Omega_p + \frac{c}{2\omega_p}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Omega_p + \kappa_{14} a_1^* a_4 = 0, \quad (2e)$$

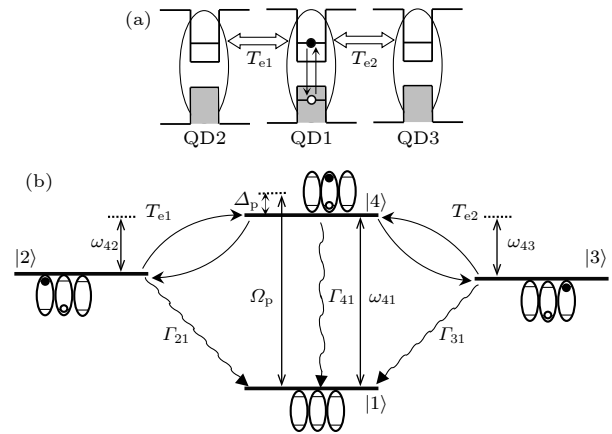


图 1 (a) TQD 有效激子能级示意图; (b) 相应能级结构图.  $\Gamma_{m1}$  ( $m = 2, 3, 4$ ) 表示退相干通道,  $\omega_{4n}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 表示能级差,  $\Delta_p = \omega_p - \omega_{41}$  为探测场与能级差  $\omega_{41}$  的频率失谐量.

Fig. 1. (a) Energy level diagram of TQD effective exciton; (b) corresponding energy level structure diagram.  $\Gamma_{m1}$  ( $m = 2, 3, 4$ ) represents the decoherent channel,  $\omega_{4n}$  ( $n = 1, 2, 3$ ) represents the energy level difference,  $\Delta_p = \omega_p - \omega_{41}$  is the frequency detuning between the probe laser field and the energy level difference.

式中,  $d_{2,3} = \Delta_{2,3} + i\Gamma_{2,3}$ ,  $d_4 = \Delta_p + i\Gamma_4$ ,  $\Delta_{2,3} = \Delta_p + \omega_{42,43}$ ,  $\Gamma_m = \Gamma_{m1}/2 + \gamma_m^{\text{sp}}$  ( $m = 2, 3, 4$ ),  $\Gamma_{m1}$ 是能级  $|m\rangle$ 与能级  $|1\rangle$ 之间的弛豫衰减率,  $\gamma_m^{\text{sp}}$ 描述的是  $|m\rangle$ 的纯相移衰减率,  $\kappa_{14} = (N_a \omega_p |p_{14}|^2)/(2\epsilon_0 \hbar c)$ 为传播常数,  $N_a$ 为原子数密度.

### 3 多重尺度法及其 HNLS 方程

一般来说, 方程 (2) 是不可积的, 无法直接得到其解析解, 因此采用标准多重尺度法 [32–36] 将几率幅和探测光的半拉比频率进行渐进展开

$$a_1 = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} \varepsilon^n a_1^{(n)}, \quad (3a)$$

$$a_j = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n a_j^{(n)}, \quad j = 2, 3, 4, \quad (3b)$$

$$\Omega_p = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \Omega_p^{(n)}, \quad (3c)$$

式中,  $\varepsilon$  是一个微小参量, 刻画的是基态粒子布局的偏离, 并且假定几率幅  $a_j^{(n)}$  ( $j = 2, 3, 4; n = 1, 2, 3, 4$ ) 和半拉比频率  $\Omega_p^{(n)}$  都是不同尺度的时间变量  $t_n = \varepsilon^n t$  ( $n = 0, 1$ ) 和空间变量  $z_n = \varepsilon^n z$  ( $n = 0, 1, 2, 3$ ),  $x_n = \varepsilon x$ ,  $y_n = \varepsilon y$  的函数, 将方程 (3) 代入方程 (2), 麦克斯韦-薛定谔方程组可变换为

$$i \frac{\partial}{\partial t_0} a_1^{(n)} = J^{(n)}, \quad (4a)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t_0} + d_2 \right) a_2^{(n)} + T_{e1} a_4^{(n)} = M^{(n)}, \quad (4b)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t_0} + d_3 \right) a_3^{(n)} + T_{e2} a_4^{(n)} = N^{(n)}, \quad (4c)$$

$$\left( i \frac{\partial}{\partial t_0} + d_4 \right) a_4^{(n)} + \Omega_p + T_{e1} a_2^{(n)} + T_{e2} a_3^{(n)} = Q^{(n)}, \quad (4d)$$

$$i \left( \frac{\partial}{\partial z_0} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t_0} \right) \Omega_p^{(n)} + \kappa_{14} a_4^{(n)} = R^{(n)}. \quad (4e)$$

下一步, 假设  $\Omega_p^{(n)} = F \exp(i\theta)$ , 其中  $\theta = K(\omega)z - \omega t$ ,  $F$  为时空慢变量  $t_1$ ,  $z_n$  ( $n = 1, 2, 3$ ) 及  $x_1$ ,  $y_1$  待定包络函数.

当  $n = 1$  时, 系统的线性色散关系可表示为

$$K(\omega) = \omega/c - \kappa_{14} D_c/D, \quad (5)$$

式中  $D = (\omega + d_4)(\omega + d_2)(\omega + d_3) - T_{e1}^2(\omega + d_3) - T_{e2}^2(\omega + d_2)$ ,  $D_c = (\omega + d_2)(\omega + d_3)$  可以对  $K(\omega)$  围绕其中心频率  $\omega_p$  做泰勒级数展开, 有

$$K(\omega) = K_0 + K_1 \omega + \frac{1}{2} K_2 \omega^2 + \frac{1}{6} K_3 \omega^3 + \dots, \quad (6)$$

式中  $K_0 = \varphi + i\alpha/2$ , 其中实部  $\varphi$  表示探测光穿过单位长度介质后获得的相位,  $\alpha$  表示探测光强的线性吸收系数;  $K_1 = \frac{\partial K(\omega)}{\partial \omega} \Big|_{\omega=0}$  与群速度有关, 其关系为  $V_g = \text{Re} \frac{1}{K_1}$ ,  $K_2 = \frac{\partial^2 K(\omega)}{\partial \omega^2} \Big|_{\omega=0}$  描述的是探测光场的群速度色散效应.  $K_3 = \frac{\partial^3 K(\omega)}{\partial \omega^3} \Big|_{\omega=0}$  描述了系统的三阶色散效应.

当  $n = 2$  时, 由二阶可解条件可得

$$i \left( \frac{\partial F}{\partial z_1} + \frac{1}{V_g} \frac{\partial F}{\partial t_1} \right) = 0. \quad (7)$$

当  $n = 3$  时, 由三阶可解条件得

$$i \frac{\partial F}{\partial z_2} - \frac{K_2}{2} \frac{\partial^2 F}{\partial t_1^2} + \frac{c}{2\omega_p} \left( \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right) F - W \exp(-\bar{\alpha} z_2) |F|^2 F = 0, \quad (8)$$

式中,  $\bar{\alpha} = \varepsilon^2 \alpha = 2\varepsilon^2 \text{Im} [K(\omega)]$ ,  $\alpha$  刻画了介质对探测光的吸收,

$$W = -\frac{\kappa_{14} D_c}{D} \times \left[ \left| \frac{D_c T_{e1}}{D(\omega + d_2)} \right|^2 + \left| \frac{D_c T_{e2}}{D(\omega + d_3)} \right|^2 + \left| \frac{D_c}{D} \right|^2 \right]$$

为克尔非线性系数, 刻画了系统的非线性效应.

同理, 当  $n = 4$  时, 由四阶可解条件得

$$i \frac{\partial F}{\partial z_3} - i \frac{K_3}{6} \frac{\partial^3 F}{\partial t_1^3} - i\beta_1 \times \exp(-\bar{\alpha} z_2) \frac{\partial}{\partial t_1} (|F|^2 F) + i\beta_2 \times \exp(-\bar{\alpha} z_2) F \frac{\partial}{\partial t_1} (|F|^2) = 0, \quad (9)$$

式中

$$\beta_1 = -\frac{1}{2} \left[ \frac{\kappa_{14} D_c T_{e2}^2 (\omega + d_2)}{D^2 (\omega + d_3)} + \frac{\kappa_{14} D_c T_{e1}^2 (\omega + d_3)}{D^2} (\omega + d_2) - 2\kappa_{14} D_c + \left( \frac{1}{V_g} + \frac{1}{c} \right) \right] W - \frac{|D_c|^2}{|D|^2} \times \left[ \left( \frac{T_{e1}^2}{|\omega + d_2|^2} + \frac{T_{e2}^2}{|\omega + d_3|^2} + 1 \right) \left( \frac{1}{V_g} + \frac{1}{c} \right) - \frac{\kappa_{14} D_c T_{e1}^2}{D |\omega + d_2|^2 (\omega + d_2)} - \frac{\kappa_{14} D_c T_{e2}^2}{D |\omega + d_3|^2 (\omega + d_3)} \right]$$

为非线性色散系数,

$$\beta_2 = \frac{2D_c^2}{D^2} \left[ \left( \frac{T_{e1}^2}{|\omega + d_2|^2} + \frac{T_{e2}^2}{|\omega + d_3|^2} + 1 \right) \left( \frac{1}{V_g} + \frac{1}{c} \right) \right. \\ \left. - \frac{2D_c^2}{D^2} \times \left[ \frac{\kappa_{14} D_c^* T_{e1}^2}{D^* |\omega + d_2|^2 (\omega + d_2)} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{\kappa_{14} D_c^* T_{e2}^2}{D^* |\omega + d_3|^2 (\omega + d_3)} \right] \right]$$

为非线性折射率延迟系数, 这两个系数分别刻画了系统的非线性色散效应以及非线性折射率延迟效应.

结合方程 (7)–(9) 我们可以得到

$$i \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} \right) U - \frac{K_2}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - i \frac{K_3}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} \\ + \frac{c}{2\omega_p} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U - W|U|^2 U \\ - i\beta_{1r} \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i\beta_{2r} U \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2) = 0, \quad (10)$$

式中  $\tau = t - z/V_g$ , 且在求解过程中已定义  $\Omega_p \approx \Omega_p^{(1)} = \varepsilon \text{Exp}(iK_0 z) = U \text{Exp}(iK_0 z)$ . 一般来说, 高阶非线性方程 (10) 往往是不可积的, 因为它具有复系数. 然而, 通过考虑量子点实验参数<sup>[37,38]</sup>:  $\kappa_{14} = 3.4 \times 10^2 \text{ meV} \cdot \mu\text{m}^{-1}$ ,  $\Gamma_4 = 0.054 \text{ meV}$ ,  $\Gamma_2 = \Gamma_3 = 10^{-3} \Gamma_4$ ,  $T_{e1} = T_{e2} = 0.7 \Gamma_4$ ,  $\omega_{42} = -\omega_{43} = 0.5 \Gamma_4$ ,  $c = 3 \times 10^{10} \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\Delta_p = -8 \text{ meV}$ . 我们发现该方程系数的实部可以远远大于其对应的虚部, 如图 2 所示, 这是由于在隧穿诱导透明的机制下, 系统的共振吸收被大大抑制的结果. 因此, 方程 (10) 可变换为

$$i \left( \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\alpha}{2} \right) U - \frac{K_{2r}}{2} \frac{\partial^2 U}{\partial \tau^2} - i \frac{K_{3r}}{6} \frac{\partial^3 U}{\partial \tau^3} \\ + \frac{c}{2\omega_p} \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) U - W_r |U|^2 U \\ - i\beta_{1r} \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2 U) - i\beta_{2r} U \frac{\partial}{\partial \tau} (|U|^2) = 0, \quad (11)$$

式中下标 r 表示取其对应系数的实部.

下面, 将方程 (11) 写成无量纲的形式, 引入无量纲化的参数:  $\tau = \tau_0 \sigma$ ,  $z = -2L_D s$ ,  $U = U_0 u$ ,  $(x, y) = R_\perp (x', y')$ , 其中  $L_D = \tau_0^2 / K_{2r}$  为色散长度, 刻画的是系统的色散效应起作用所需的有效距离.  $L_{NL}$  为非线性长度, 刻画的是系统的非线性效应起作用所需的有效距离,  $\tau_0$  表示探测光的特征脉冲长度. 当  $L_{NL} = L_D$  时, 系统中的色散效应与非线性效应达到平衡从而形成时间光孤子. 由平衡

条件可得  $U_0 = (1/\tau_0) \sqrt{K_{2r}/W_r}$ , 表示其探测光的特征拉比频率. 另外,  $g_j = 2L_D/L_j$  ( $j = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ ),  $L_0 = 1/K_{1r}$  表示系统的线性吸收长度,  $L_1 = \tau_0^3 W_r / (\beta_{1r} K_{2r})$  为系统的非线性色散长度,  $L_2 = -\tau_0^3 W_r / (\beta_{2r} K_{2r})$  为系统的非线性折射率延迟长度,  $L_3 = 6\tau_0^3 / K_{3r}$  为系统的三阶色散长度,  $L_4 = \tau_0 / K_{1r}$  为系统的导数吸收长度,  $L_5 = 2\omega_p R_\perp^2 / c$  为系统的衍射长度. 即

$$i \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 2|u|^2 u \\ = i \left[ g_0 u - g_1 \frac{\partial(|u|^2 u)}{\partial \sigma} - g_2 u \frac{\partial(|u|^2)}{\partial \sigma} - g_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \sigma^3} \right] \\ - g_4 \frac{\partial u}{\partial \sigma} + g_5 \left( \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right) u. \quad (12)$$

值得注意的是, 当  $g_j \ll 1$  时, 方程 (12) 可简化为 SNLS 方程, 另外, 当  $L_0, L_4, L_5$  远远大于  $L_D$ , 忽略正比于  $g_0, g_4, g_5$  的项<sup>[24]</sup> 时, 方程 (12) 可表示成 HNLS 方程, 于是有

$$i \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 2|u|^2 u = 0, \quad (13a)$$

$$i \frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial^2 u}{\partial \sigma^2} + 2|u|^2 u \\ + i \left[ g_1 \frac{\partial(|u|^2 u)}{\partial \sigma} + g_2 u \frac{\partial(|u|^2)}{\partial \sigma} + g_3 \frac{\partial^3 u}{\partial \sigma^3} \right] = 0. \quad (13b)$$

当  $K_{2r} W_r > 0$  时, SNLS 方程的基阶亮孤子解<sup>[24]</sup> 可表示为

$$\Omega_p = \frac{\sqrt{K_{2r}/W_r}}{\tau_0} \text{sech} \left[ \frac{1}{\tau_0} \left( t - \frac{z}{V_g} \right) \right] \\ \times \exp \left( iK_{0r} z - i \frac{z}{2L_D} \right). \quad (14)$$

当  $\Omega \neq 1/3$ ,  $\beta - 2\Omega + 3\Omega^2 > 0$  时, HNLS 方程的基阶亮孤子解<sup>[24]</sup> 可表示为

$$\Omega_p = \frac{U_0}{\sqrt{2}g_3} \left[ \frac{6(\beta - 2\Omega + 3\Omega^2)}{3c_1 + 2c_2} \right]^{\frac{1}{2}} \\ \times \text{sech} \left[ \frac{\sqrt{\beta - 2\Omega + 3\Omega^2}}{g_3 \tau_0} \left( t - \frac{z}{V_g^H} \right) \right] \exp(i\Phi), \quad (15)$$

式中,

$$\Phi = -\frac{\Omega t}{g_3 \tau_0} + \frac{\Omega z}{g_3 \tau_0 V_g} + K_{0r} z \\ + \frac{[(\beta - 2\Omega + 3\Omega^2)(1 - 3\Omega) - \Omega^2 + \Omega^3] z}{2L_D g_3^2}$$

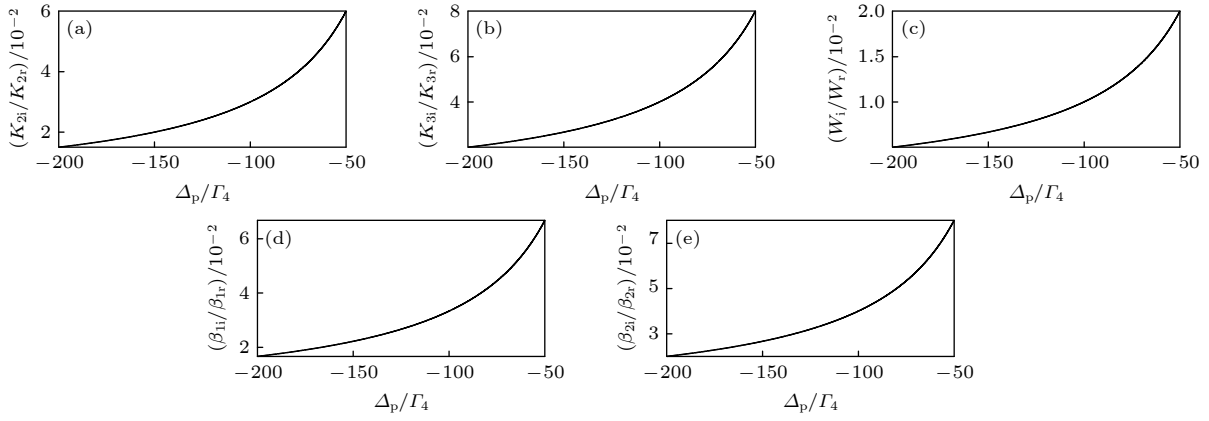


图 2 方程 (10) 相关系数虚部与实部的比值随  $\Delta_p/\Gamma_4$  的变化关系 (a)  $K_{2i}/K_{2r}$ ; (b)  $K_{3i}/K_{3r}$ ; (c)  $W_i/W_r$ ; (d)  $\beta_{1i}/\beta_{1r}$ ; (e)  $\beta_{2i}/\beta_{2r}$

Fig. 2. The ratio of the imaginary part and the real part of the correlation coefficient of equation (10) as a function of  $\Delta_p/\Gamma_4$ : (a)  $K_{2i}/K_{2r}$ ; (b)  $K_{3i}/K_{3r}$ ; (c)  $W_i/W_r$ ; (d)  $\beta_{1i}/\beta_{1r}$ ; (e)  $\beta_{2i}/\beta_{2r}$ .

为光孤子的相位,  $V_g^H = 1/V_g - \beta\tau_0/(2L_D g_3)$  为光孤子的传播速度,  $c_1 = g_1/(2g_3)$ ,  $c_2 = g_2/(2g_3)$ ,  $\Omega = (3c_1 + 2c_2 - 3)/[6(c_1 + c_2)]$ ,  $\beta$  为实的自由参数, 与光孤子的传播速度有关.

#### 4 孤子稳定性分析

为了检验孤子的稳定性, 在图 3 中分别以方程 (14) 和 (15) 作为初始条件, 对方程 (2) 进行了数值模拟. 图中实线、虚线、点虚线分别表示初态以及演化 1 个单位长度和 2 个单位长度时的数值结果. 从图 3(a) 中可以看出, 当孤子演化到 1 单位长度时, 其幅值迅速减小, 宽度有所增加, 并且在孤子前沿也辐射出了小振幅色散波; 随着演化距离逐渐增大到 2 个单位长度, 对应的孤子幅值和宽度也分别出现了进一步的减小和增加, 同时色散波的辐射也越来越严重. 这表明孤子在传播的过程出现了较为严重的衰减失真. 反观图 3(b): 随着孤子的逐渐演化, 除孤子幅值发生轻微减小外, 整体看来, 孤子的形状几乎不发生明显变化, 这表明孤子能够稳定传播. 对比图 3(a)、图 3(b) 可以得知, 当探测光的脉冲宽度较窄时, 使用 HNLS 方程的基阶孤子解得到的演化结果较前者更为稳定.

为了进一步探究 TQD 系统中形成的光孤子的稳定性, 分别以方程 (16a)、(16b) 作为初始条件对方程 (2) 进行了孤子间碰撞的数值模拟分析 (见图 4).

$$u = \operatorname{sech}(t/\tau_0 - 4.5)\exp(i\theta_1) + \operatorname{sech}(t/\tau_0 + 4.5)\exp(i\theta_2), \quad (16a)$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{2}g_3} \left[ \frac{6(\beta - 2\Omega + 3\Omega^2)}{3c_1 + 2c_2} \right]^{\frac{1}{2}} \times \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{\beta - 2\Omega + 3\Omega^2}t}{g_3\tau_0} - 4.5\right)\exp(i\theta_1) + \frac{1}{\sqrt{2}g_3} \times \left[ \frac{6(\beta - 2\Omega + 3\Omega^2)}{3c_1 + 2c_2} \right]^{\frac{1}{2}} \times \operatorname{sech}\left(\frac{\sqrt{\beta - 2\Omega + 3\Omega^2}t}{g_3\tau_0} + 4.5\right)\exp(i\theta_2). \quad (16b)$$

对比图 4(a) 和图 4(b) 可以发现, 由 SNLS 方程所描述的光孤子碰撞后, 其振幅呈现出快速地减小, 对应的孤子宽度也逐渐增加, 并且随着孤子的逐渐演化, 在其两侧和中间也会辐射出较为明显的色散波, 从而导致光孤子碰撞后出现较大程度衰减失真, 这主要是由于系统的高阶效应所导致的. 与此相反, 由 HNLS 方程所描述的光孤子碰撞后其振幅及形状几乎没有发生任何变化, 这进一步说明在该系统中当脉冲宽度较窄时考虑高阶效应所得到的光孤子具有更好的稳定性.

另外, 在该量子点分子系统中, 由于输入的探测光场为窄脉冲, 应考虑方程 (2e) 是否满足慢变包络近似条件:  $\partial\Omega_p/\partial z \ll k_p\Omega_p$ 、 $\partial\Omega_p/\partial t \ll \omega_p$   $\Omega_p$ , 即  $\lambda_p \ll V_g\tau_0$ ,  $\omega_p\tau_0 \gg 1$ . 在上面所给的量子点参数条件下, 孤子的群速度为  $V_g = 6 \times 10^{-2}c$ ,  $\tau_0 = 5 \times 10^{-13} \text{ s}$ , 探测场的中心角频率为  $\omega_p = 2.43 \times 10^{15} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ , 对应的波长  $\lambda_p = 0.78 \mu\text{m}$ , 有  $V_g\tau_0 = 9 \mu\text{m}$ ,  $\omega_p\tau_0 = 1.215 \times 10^3$ , 因此该系统能够有效地满足慢变包络近似的条件. 此外, 通过上面参数可得孤子的空间长度  $L_{\text{sol}} = V_g\tau_0 = 9 \mu\text{m}$ , 系统的色散长度  $L_D = L_{\text{NL}} = 0.33 \mu\text{m}$ , 以及系统的线性吸收长

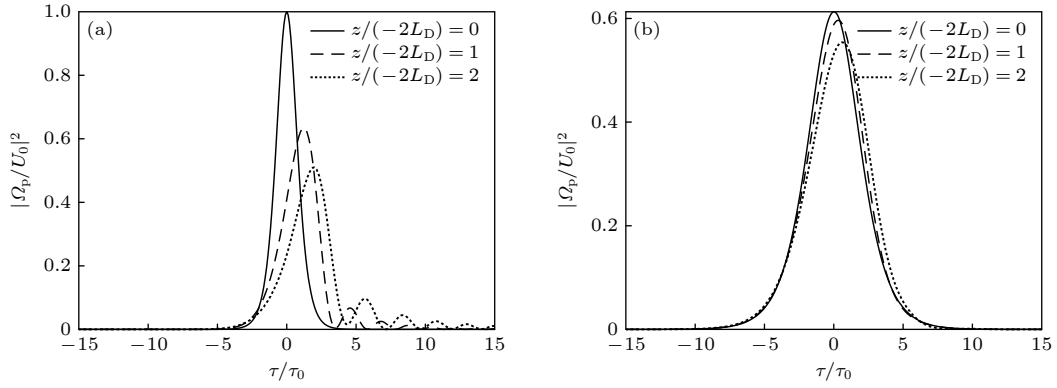


图3 (a) 方程 (14) 作为初始条件的数值演化结果; (b) 方程 (15) 作为初始条件的数值演化结果. 波形给出的演化距离为 1 个单位长度 (虚线) 和 2 个单位长度 (点虚线), 取  $\tau_0 = 5 \times 10^{-13}$  s,  $\beta = 0.5$ ,  $\Phi = 0$ , 其他参数与图 2 相同

Fig. 3. (a) Numerical evolution result using equation (14) as the initial condition; (b) numerical evolution result using equation (15) as the initial condition. The evolution distance given by the soliton waveform is 1 unit length (dotted line) and 2 unit lengths (dotted dotted line), and the parameters used are  $\tau_0 = 5 \times 10^{-13}$  s,  $\beta = 0.5$ ,  $\Phi = 0$ , other parameters used are the same as Fig. 2.

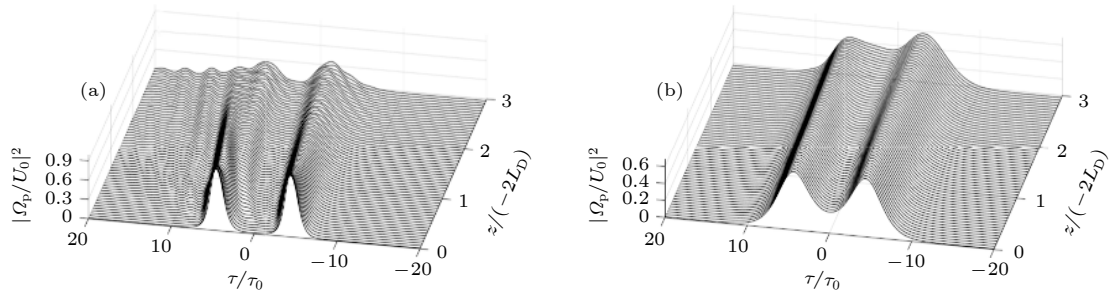


图4 相邻孤子间的相互作用 (a) 方程 (16a) 作为初始条件的数值演化结果; (b) 方程 (16b) 作为初始条件的数值演化结果. 除  $\theta_1 = \theta_2 = 0$  外, 其他参数与图 2 相同

Fig. 4. Interaction between adjacent optical solitons: (a) Numerical evolution result using equation (16a) as the initial condition; (b) numerical evolution result using equation (16b) as the initial condition. Except for  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , the other parameters are the same as in Fig. 2.

度  $L_0 = 35.7 \mu\text{m}$ . 可以看出, 该系统的线性吸收长度是远远大于其色散长度的, 这就保证了孤子能够稳定的保形传播. 并且, 根据现有量子点制备条件<sup>[13]</sup>, 对于该系统的配置而言, 由于拥有一个相对较长的传播距离 (约为毫米量级). 因此, 能够很好地保证其色散长度和空间长度是远远小于该长度, 以便于观察光孤子形成与传播.

综上所述, 在 SQD 系统中时间光孤子能够形成并稳定传播. 特别地, 当输入的探测光场的脉冲宽度较窄时, 使用 HNLS 方程对体系中光孤子的传播进行描述是更为准确的.

## 5 结 论

基于以上分析, 本文从四能级 TQD 系统的麦克斯韦-薛定谔方程组出发, 运用标准多重尺度法解析得到了描述该系统的 HNLS 方程以及 SNLS 方程, 并给出了其对应的基阶孤子解. 通过数值计

算, 发现该系统中由 HNLS 方程所描述的光孤子具有更好的稳定性, 尤其当入射探测光脉冲较窄时系统内光孤子的传播须采用 HNLS 方程描述. 其物理原因是方程中的高阶效应, 包括非瞬时克尔效应和三阶色散效应等将会导致脉冲在时间和光谱上产生不对称展宽及脉冲的红移增加, 从而不能被忽略或当作微扰处理. 最后, 为了进一步验证形成的光孤子的稳定性, 分别数值模拟了这两种孤子的各自碰撞特性, 模拟结果进一步表明由 HNLS 方程所描述的光孤子具有更好地稳定性. 这种稳定的光孤子对于将来的光信息处理和传输技术有着潜在的应用价值.

## 附 录 A

麦克斯韦-布洛赫方程组:

$$\frac{\partial \rho_{11}}{\partial t} = \Gamma_{21}\rho_{22} + \Gamma_{31}\rho_{33} + \Gamma_{41}\rho_{44} + i\Omega_p^* \rho_{41} - i\Omega_p \rho_{14}, \quad (\text{A1})$$

$$\frac{\partial \rho_{22}}{\partial t} = -\Gamma_{21}\rho_{22} + iT_{e1}\rho_{42} - iT_{e1}\rho_{24}, \quad (\text{A2})$$

$$\frac{\partial \rho_{33}}{\partial t} = -\Gamma_{31}\rho_{33} + iT_{e2}\rho_{43} - iT_{e2}\rho_{34}, \quad (\text{A3})$$

$$\frac{\partial \rho_{44}}{\partial t} = -\Gamma_{41}\rho_{44} + i\Omega_p \rho_{14} - i\Omega_p^* \rho_{41} + iT_{e1}\rho_{24} - iT_{e1}\rho_{42} + iT_{e2}\rho_{34} - iT_{e2}\rho_{43}, \quad (\text{A4})$$

$$\frac{\partial \rho_{12}}{\partial t} = -id_2\rho_{12} + i\Omega_p^* \rho_{42} - iT_{e1}\rho_{14}, \quad (\text{A5})$$

$$\frac{\partial \rho_{13}}{\partial t} = -id_3\rho_{13} + i\Omega_p^* \rho_{43} - iT_{e2}\rho_{14}, \quad (\text{A6})$$

$$\frac{\partial \rho_{14}}{\partial t} = -id_4\rho_{14} - iT_{e1}\rho_{12} - iT_{e2}\rho_{13} - i\Omega_p^*(\rho_{11} - \rho_{44}), \quad (\text{A7})$$

$$\frac{\partial \rho_{23}}{\partial t} = -i(\Delta_3 - \Delta_2 + i\gamma_{23})\rho_{23} + iT_{e1}\rho_{43} - iT_{e2}\rho_{24}, \quad (\text{A8})$$

$$\frac{\partial \rho_{24}}{\partial t} = -i(\Delta_p - \Delta_2 + \gamma_{24})\rho_{24} - i\Omega_p^* \rho_{21} - iT_{e2}\rho_{23} - iT_{e1}(\rho_{22} - \rho_{44}), \quad (\text{A9})$$

$$\frac{\partial \rho_{34}}{\partial t} = -i(\Delta_p - \Delta_3 + i\gamma_{34})\rho_{34} - i\Omega_p^* \rho_{31} - iT_{e1}\rho_{32} + iT_{e2}(\rho_{33} - \rho_{44}), \quad (\text{A10})$$

$$i\left(\frac{\partial}{\partial z} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\right)\Omega_p + \frac{c}{2\omega_p}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)\Omega_p + \kappa_{14}\rho_{41} = 0, \quad (\text{A11})$$

其中  $\rho_{ij} = \rho_{ji}^*$  ( $i, j = 1, 2, 3, 4$ ) 为密度矩阵元。

### 参考文献

[1] Chen S M, Tang M C, Wu J, Jiang Q, Dorogan V G, Benamara M, Mazur Y I, Salamo G J, Seeds A J, Liu H 2014 *Electron. Lett.* **50** 1467  
 [2] Sun D, Zhang H J, Sun, H, Li X W, Wang G Y 2018 *Phys. Lett. A* **10** 036  
 [3] Wang Y, Ding J W, Wang D L 2020 *Eur. Phys. J. D* **74** 190  
 [4] Peng Y D, Yang A H, Li D H, Zhang H G, Niu Y P, Gong S Q 2014 *Laser Phys. Lett.* **11** 065201  
 [5] Zeng K H, Wang D L, She Y C, Luo X Q 2013 *Eur. Phys. J. D* **67** 221

[6] Li B, Qi Y H, Niu Y P, Gong S Q 2017 *J. Nonlinear Optic. Phys. Mat.* **26** 1750054  
 [7] Chen Y, Bai Z Y, Huang G X 2014 *Phys. Rev. A* **89** 023835  
 [8] Li Z D, Wang Y Y, He P B 2019 *Chin. Phys. B* **28** 010504  
 [9] Si L G, Yang W X, Lu X Y, Hao X Y, Yang X X 2010 *Phys. Rev. A* **82** 013836  
 [10] Tian S C, Wan R G, Tong C Z, Ning Y Q, Qin L, Liu Y 2014 *J. Opt. Soc. Am. B* **31** 1436  
 [11] Tang H, Wang D L, Zhang W X, Ding J W, Xiao S G 2017 *Acta. Phys. Sin.* **66** 034202 (in Chinese) [唐宏, 王登龙, 张蔚曦, 丁建文, 肖思国 2017 物理学报 **66** 034202]  
 [12] Yang X, Wang Y, Wang D L, Ding J W 2020 *Acta. Phys. Sin.* **69** 174203 (in Chinese) [杨璇, 王胤, 王登龙, 丁建文 2020 物理学报 **69** 174203]  
 [13] Yang W X, Chen A, Lee R, Wu Y 2011 *Phys. Rev. A* **84** 013835  
 [14] Mahmoudi M, Sahrai M 2009 *Phys. E* **41** 1772  
 [15] She Y C, Zheng X J, Wang D L, Zhang W X 2013 *Opt. Express* **21** 17392  
 [16] Hao X Y, Liu J B, Lu X Y, Song P J, Si L G 2009 *Commun. Theor. Phys.* **51** 519  
 [17] Zhu C J, Huang G X 2011 *Opt. Express* **19** 1963  
 [18] Fewo S I, Ngabireng C M, Kofane T C 2008 *Phys. Soc. Japan* **77** 074401  
 [19] Zhang S, Yi L 2008 *Phys. Rev. E* **78** 026602  
 [20] Boardman A D, King N, Mitchell-Thomas R C, Malnev V N, Rapoport Y G 2008 *Metamaterials* **2** 145  
 [21] Boardman A D, Mitchell-Thomas R C, King N J, Rapoport Y G 2010 *Opt. Commun.* **283** 1585  
 [22] Boardman A D, Hess O, Mitchell-Thomas R C, Rapoport Y G, Velasco L 2010 *Photon. Nanostruct.* **8** 228  
 [23] Zhu C J, Huang G X 2009 *Phys. Rev. B* **80** 235408  
 [24] Hang C, Huang G X, Deng L 2006 *Phys. Rev. E* **73** 036607  
 [25] Mani Bhupeshwaran, Jawahar A, Radha S, Chitra K, Sivasubramanian A 2016 *Photon. Netw. Commun.* **32** 73  
 [26] Liu L, Tian B, Chai J, Chai H P 2017 *Laser Phys.* **27** 075402  
 [27] Borges H S, Sanz L, Villas-Bôas J M, Diniz Neto O O, Alcalde A M 2012 *Phys. Rev. B* **85** 115425  
 [28] Berney J, Portella-Oberli M T, Deveaud B 2008 *Phys. Rev. B* **77** 121301  
 [29] Bracker A S, Scheibner M, Doty M F, Stinaff E A, Ponomarev I V, Kim J C, Whitman L J, Reinecke T L, Gammon D 2006 *Appl. Phys. Lett.* **89** 233110  
 [30] Hsieh C Y, Shim Y P, Korkusinski M, Hawrylak P 2012 *Rep. Prog. Phys.* **75** 114501  
 [31] Luo X Q, Li Z Z, Jing J, Xiong W, Li T F, Yu T 2018 *Sci. Rep.* **8** 3107  
 [32] Wu Y, Deng L 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 143904  
 [33] Wang W, Bu L, Cheng D, Ye Y, Chen S, Baronio F 2021 *OSA Continuum* **4** 1488  
 [34] Li L, Huang G X 2010 *Eur. Phys. J. D* **58** 339  
 [35] Liu J Y, Hang C, Huang G X 2016 *Phys. Rev. A* **93** 063836  
 [36] Luo X Q, Wang D L, Zhang Z Q, Ding J W, Liu W M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 033803  
 [37] Gammon D, Snow E S, Shanabrook B V, Katzer D S, Park D 1996 *Science* **273** 5271  
 [38] B N, Fei J Y, Li D F, Zhong X, Wang D, Wang H H, Bao Q Q 2020 *Chin. Phys. B* **29** 034204

# Stability of optical soliton in symmetrical three-quantum-dot system under high-order effects\*

Ren Bo <sup>1)2)</sup> She Yan-Chao <sup>2)†</sup> Xu Xiao-Feng <sup>2)</sup> Ye Fu-Qiu <sup>1)‡</sup>

1) (*School of Physics and Mechatronics Engineering, Jishou University, Jishou 416000, China*)

2) (*Department of Physics and Electronic Engineering, Tongren University, Tongren 554300, China*)

( Received 19 May 2021; revised manuscript received 19 June 2021 )

## Abstract

The influence of high-order effects on the stability of the optical soliton in a semiconductor three-quantum-dot molecular system under the excitation of narrow pulse probe light is analyzed analytically by using the multi-scale method. The results show that optical soliton described by the standard nonlinear Schrödinger equation will have a large attenuation in the propagation process, while the optical soliton described by the high-order nonlinear Schrödinger equation has relatively good stability. In addition, numerical simulations of the interaction between optical solitons show that the amplitudes of the two optical solitons described by the standard nonlinear Schrödinger equation attenuate rapidly after the collisions and radiation of more serious dispersion waves, while the shapes of the two optical solitons described by the high-order nonlinear Schrödinger equation hardly changes after the collision. This is mainly because when the incident probe light pulse is narrow enough, the system must be described by a higher-order equation. The physical reason is that the higher-order effects in the equation, including non-instantaneous effects and third-order dispersion effects, cannot be ignored or treated as perturbations. This kind of stable optical soliton has potential application value for future optical information processing and transmission technology.

**Keywords:** tunneling induced transparency, optical solitons, semiconductor quantum dot molecules

**PACS:** 42.50.Gy, 42.65.Tg, 73.40.Gk

**DOI:** [10.7498/aps.70.20210942](https://doi.org/10.7498/aps.70.20210942)

\* Project supported by the the National Nature Science Foundation of China (Grant Nos. 12064038, 12165008), the NSF of Guizhou Province Education Department, China (Grant Nos. KY[2019]179, KY[2017]315, ZK[2021]034), the Outstanding Young Science and Technology Talents of Guizhou Pronice, China (Grant No. [2019]5673), and the NSF of Tongren Science and Technology Bureau, China (Grant No. [2020]77).

† Corresponding author. E-mail: [yxshe@xtu.edu.cn](mailto:yxshe@xtu.edu.cn)

‡ Corresponding author. E-mail: [phyfq@jsu.edu.cn](mailto:phyfq@jsu.edu.cn)