

受垂直激励和水平约束的单摆系统亚谐共振分岔与混沌

赵武 张鸿斌 孙超凡 黄丹 范俊锴

**Subharmonic resonance bifurcation and chaos of simple pendulum system with vertical excitation and horizontal constraint**

Zhao Wu Zhang Hong-Bin Sun Chao-Fan Huang Dan Fan Jun-Kai

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 70, 240202 (2021) DOI: 10.7498/aps.70.20210953

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210953>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

# 受垂直激励和水平约束的单摆系统 亚谐共振分岔与混沌\*

赵武<sup>1)</sup> 张鸿斌<sup>1)†</sup> 孙超凡<sup>1)</sup> 黄丹<sup>2)</sup> 范俊锴<sup>1)</sup>

1) (河南理工大学机械与动力工程学院, 焦作 454003)

2) (河南理工大学材料科学与工程学院, 焦作 454003)

(2021年5月19日收到; 2021年7月31日收到修改稿)

为解决一类典型工程摆的工作性能参数优选, 抽象该类系统为“受垂直激励和水平约束”的物理单摆模型. 运用多尺度法解析系统的亚谐共振响应, 明确了系统参数对幅值共振带宽、多值性的作用规律. 利用 Melnikov 函数法, 求解得到系统的同宿轨和 Smale 意义上混沌的阈值条件. 通过数值法解析系统单参分岔、最大 Lyapunov 指数、双参分岔及吸引域流形转迁等动力特性, 揭示了这类摆系统的亚谐共振分岔、周期吸引子倍增、周期与混沌吸引子共存等全局特性的运动规律, 进一步明确了相关参数改变对系统运动形态转化、能量分布与演变规律的作用机理, 得到了相关参数对工程系统工作性能的影响和作用机制. 研究结果对工程中该类典型物理系统的工作性能参数调整, 及其对实际工况中系统的减振抑振提供了理论依据.

**关键词:** 单摆, 亚谐共振, 分岔, 混沌

**PACS:** 02.60.Cb, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210953

## 1 引言

不同于简单的单摆, 受垂直激励和水平约束的单摆系统, 是工程弹簧摆的典型物理抽象. 单摆具有运动的等时性, 起重机吊重系统<sup>[1,2]</sup>以及人体行走系统可简化为单摆模型<sup>[3]</sup>, 并且单摆原理应用于减振装置也具有良好的效果<sup>[4,5]</sup>. 伽利略<sup>[6]</sup>和惠更斯<sup>[7]</sup>都是单摆研究的奠基者. 单摆模型基础上延伸出的弹簧摆、复摆、倒立摆等系统的物理特性, 本质上往往不能简单等同于单摆, 所以得到学者们的广泛研究<sup>[8-10]</sup>, 对复杂摆系统的响应解析、稳定性、分岔和混沌的研究, 也就成为摆类系统的研究重点<sup>[11-13]</sup>.

萧寒等<sup>[14]</sup>和张丽娟等<sup>[15]</sup>研究了一类外激励

作用下的弹簧摆系统的分岔和周期稳定性, 明确了系统的拟周期环面破裂和阵发性进入混沌的路径. Bek 等<sup>[16]</sup>解析出阻尼弹簧摆的二阶近似非线性响应; Butikov 等<sup>[17]</sup>研究了一类具有黏性阻尼和干摩擦阻尼作用的弹簧摆, 获得了系统干摩擦阻尼确定的极限环及对称的非黏性强迫振荡的稳态周期性. Zhou 等<sup>[18]</sup>和 Franco 等<sup>[19]</sup>研究倒立摆的亚谐分岔、混沌运动及平衡控制, 获得异宿轨临界条件和系统参数的鲁棒性. Najdecka 等<sup>[20]</sup>研究了参数激励的双摆动力特性, 明确了同步与旋转稳定性间的关系.

对实际应用中特定工程摆悬挂点的激励响应的研究, 也引发了学者的关注<sup>[21,22]</sup>. Kholostova<sup>[23]</sup>研究了悬挂点受水平激励的单摆, 解析出系统周期运动中稳定性和不稳定周期运动的边界条件;

\* 国家自然科学基金联合基金 (批准号: U1604140)、河南省科技攻关计划 (批准号: 172102210269, 192102210052, 212102210108, 212102210004)、河南省重大成果培育项目 (批准号: NSFRF170503) 和河南理工大学创新团队基金 (批准号: T2019-5) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zhanghongbin2020@163.com

Jallouli 等<sup>[24]</sup>研究了谐波激励和参数激励作用下的非线性摆的零吸引子孤子解转换为周期稳定解的条件; Brzeski 等<sup>[25]</sup>研究了强迫 Duffing 振荡摆的动力分岔、旋转周期解及参数空间中的共存吸引子条件.

实际工程中的船用起吊机<sup>[26]</sup>、绳系航天器<sup>[27]</sup>及水下极端环境球形机器人重摆<sup>[28]</sup>, 以及轧制工艺系统中工作辊偏心于支撑辊的轧制状态, 都可通过力学分析转化为受垂直激励和水平约束的单摆<sup>[29]</sup>. 可见, 受垂直激励和水平约束的摆系统是单摆物理模型的进一步延伸, 工程应用广泛. 对此类问题的研究文献较少, 使用现有单摆物理系统的研究结论, 无法明确对这类多参量作用下的工程弹簧摆的物理属性及工作性能的优选评估. 因此深入研究这类摆系统的基本物理问题和动力学机制是提升这类工程摆广泛优化应用的关键.

本文较系统地研究了“受垂直激励和水平约束的单摆系统”的基本物理问题. 通过理论解析和数值计算, 深入研究了该类典型工程摆系统的亚谐共振、幅频特性、混沌、单参和双参分岔及吸引域流形转迁等特性, 揭示了这类摆系统的工作参数变化诱发能量改变对系统动特性和工作性能的影响.

## 2 受垂直激励和水平约束的单摆系统动力学方程

图 1 为受垂直激励和水平约束的单摆模型. 其中,  $x$  和  $y$  分别表示水平方向和垂直方向,  $o$  为悬挂点, 摆球悬挂点受到垂直激励  $y_1(t)$ , 摆球等效质量为  $m$ , 不计悬挂点处质量, 重力加速度为  $g$ , 摆球与垂直方向夹角为  $u(t)$ , 摆长为  $l$ . 摆球在运动过程中受到水平方向的约束作用, 表现为弹性回复力和阻尼力形式, 其刚度系数和阻尼系数分别为  $k$  和  $c$ .

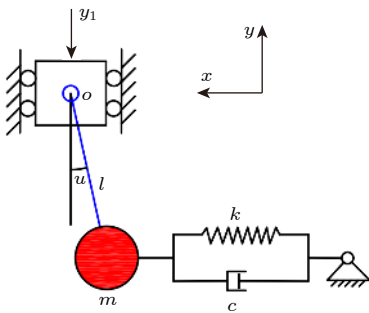


图 1 受垂直激励和水平约束的单摆模型

Fig. 1. Simple pendulum model with vertical excitation and horizontal constraint.

摆球的水平位移  $x_p$  和垂直位移  $y_p$  可以表示为:  $x_p = l \sin u$ ,  $y_p = y_1 - l \cos u$ . 摆球的水平速度和垂直速度可写为:  $\dot{x}_p = l\dot{u} \cos u$ ,  $\dot{y}_p = \dot{y}_1 + l\dot{u} \sin u$ . 取摆球悬挂点位置为重力零势能位置, 单摆系统动能为  $T$ , 势能为  $V$ , 耗散能为  $D$ , 图 1 所示的受垂直激励和水平约束的单摆系统 Lagrange 方程为

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{u}} \right) - \frac{\partial T}{\partial u} + \frac{\partial V}{\partial u} + \frac{\partial D}{\partial \dot{u}} = 0, \quad (1)$$

式中,

$$\begin{cases} T = \frac{1}{2}m \left[ l^2 \dot{u}^2 \cos^2 u + (\dot{y}_1 + l\dot{u} \sin u)^2 \right], \\ V = mg(y_1 - l \cos u) + \frac{1}{2}kl^2 \sin^2 u, \\ D = \frac{1}{2}cl^2 \dot{u}^2 \cos^2 u. \end{cases} \quad (2)$$

将 (2) 式代入 (1) 式, 整理化简, 考虑摆角  $u$  较小时令  $\sin u \cos u \approx u$ ,  $\cos 2u \approx 1$ , 整理得到受垂直激励和水平约束的单摆运动方程为

$$ml^2 \ddot{u} + m(\ddot{y}_1 + g)l \sin u + kl^2 u + cl^2 \dot{u} = 0. \quad (3)$$

把水平刚度系数  $k$  进一步表达为非线性形式:

$$k = -k_1 + k_3(ul)^2, \quad (4)$$

式中,  $k_1$ ,  $k_3$  分别是一次方刚度和三次方刚度系数.

$y$  方向垂直位移激励型式为简谐激励, 可表示为

$$y_1 = -a \cos(\omega t), \quad (5)$$

式中  $a$ ,  $\omega$  分别为垂直位移激励幅值和激励频率.

把 (4) 式和 (5) 式代入 (3) 式, 并进行无量纲化处理, 令  $\omega_1 = (k_1/m)^{1/2}$ ,  $\tau = \omega_1 t$ ,  $\omega_b = \omega/\omega_1$ ,  $u = x$ , 整理得到

$$\begin{aligned} \ddot{x} + c_{11}\dot{x} - x + k_{33}x^3 + g_1 \sin x \\ + b\omega_b^2 \cos \omega_b \tau \sin x = 0, \end{aligned} \quad (6)$$

式中,  $c_{11} = c/(m\omega_1)$ ,  $k_{33} = k_3 l^2 / (m\omega_1^2)$ ,  $b = a/l$ ,  $g_1 = g/(l\omega_1^2)$ . 其中,  $c_{11}$  为无量纲化后的阻尼系数,  $k_{33}$  为无量纲化后的三次方刚度系数,  $b$  为无量纲化后的垂直位移激励幅值,  $\omega_b$  为无量纲化后的垂直位移激励频率, 即频率比. (6) 式是受垂直激励和水平约束单摆的非线性系统动力学方程, 是进一步分析其亚谐共振分岔和混沌行为的基础.

## 3 受垂直激励和水平约束的单摆系统的亚谐共振

受垂直激励和水平约束的单摆系统, 是工程弹簧摆的典型物理抽象. 单摆悬挂点处垂直方向的

位移激励作为激励源, 会关联水平约束摆的水平振动输出, 很多可以抽象成受垂直激励和水平约束单摆的工程问题<sup>[30,31]</sup>, 更多关注于系统中非线性共振, 尤其是实际的亚谐共振导致多个响应谐波迭加引发的系统响应跳跃增减甚至混沌对实际系统工作性能的影响。

### 3.1 受垂直激励和水平约束单摆系统的 1/2 次亚谐共振响应

采用多尺度法<sup>[32]</sup>对系统求解. 考虑到振动位移  $x$  为小量, 令  $\sin x \approx x$ , 引入小参数  $\varepsilon$ , (6) 式可化为

$$\ddot{x} + x = \varepsilon(-c_{11}\dot{x} - k_{33}x^3 + 2x - g_1x + b\omega_b^2x \cos \omega_b\tau), \quad (7)$$

(7) 式的一次近似解可记为

$$x(\tau, \varepsilon) = x_0(T_0, T_1) + \varepsilon x_1(T_0, T_1) + o(\varepsilon^2). \quad (8)$$

设置时间尺度为

$$T_0 = \tau, \quad T_1 = \varepsilon\tau. \quad (9)$$

时间微分为

$$\frac{d}{d\tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots, \quad (10)$$

$$\frac{d^2}{d\tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (2D_0 D_2 + D_1^2) + \dots, \quad (11)$$

式中,  $D_n = \partial/\partial T_n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

将 (8)–(11) 式代入 (7) 式, 比较  $\varepsilon$  同幂次系数, 得到

$$D_0^2 x_0 + x_0 = 0, \quad (12)$$

$$D_0^2 x_1 + x_1 = -2D_0 D_1 x_0 - c_{11} D_0 x_0 + (2 - g_1)x_0 - k_{33}x_0^3 - b\omega_b^2 \cos(\omega_b T_0), \quad (13)$$

根据 (12) 式可得

$$x_0(T_0, T_1) = A(T_1)e^{iT_0} + \bar{A}(T_1)e^{-iT_0}, \quad (14)$$

将 (14) 式代入 (13) 式得

$$\begin{aligned} & D_0^2 x_1 + x_1 \\ &= (-2i\dot{A} - ic_{11}A - 3k_{33}A^2\bar{A} - g_1A + 2A)e^{iT_0} \\ &+ (2i\dot{\bar{A}} + ic_{11}\bar{A} - 3k_{33}A\bar{A}^2 + 2\bar{A} - g_1\bar{A})e^{-iT_0} \\ &- k_{33}\bar{A}^3e^{-3iT_0} - k_{33}A^3e^{3iT_0} \\ &- \frac{b}{2}A\omega_b^2 \cdot e^{iT_0+i\omega_b T_0} - \frac{b}{2}\bar{A}\omega_b^2 \cdot e^{-iT_0+i\omega_b T_0} \\ &- \frac{b}{2}A\omega_b^2 \cdot e^{iT_0-i\omega_b T_0} - \frac{b}{2}\bar{A}\omega_b^2 \cdot e^{-iT_0-i\omega_b T_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

观察 (15) 式, 发现  $\omega_b \approx 2$  时, 系统会发生 1/2 次

亚谐共振. 令:

$$\omega_b = 2 + \varepsilon\sigma, \quad (16)$$

式中,  $\sigma$  为调谐参数, 与频率有关.

将 (16) 式代入 (15) 式, 消去久期项得

$$-2i\dot{A} - ic_{11}A - 3k_{33}A^2\bar{A} - g_1A + 2A - 2b\bar{A}e^{i\sigma T_1} = 0, \quad (17)$$

令

$$\begin{cases} A = \frac{1}{2}a_x e^{i\beta}, & \bar{A} = \frac{1}{2}a_x e^{-i\beta}, \\ \dot{A} = \frac{1}{2}\dot{a}_x e^{i\beta} + \frac{1}{2}i\beta a_x e^{i\beta}, \end{cases} \quad (18)$$

代入 (17) 式可得

$$\begin{aligned} & -i\dot{a}_x + \beta a_x - \frac{1}{2}ic_{11}a_x - \frac{3}{8}k_{33}a_x^3 + a_x - \frac{1}{2}g_1a_x \\ &= a_x b [\cos(-2\beta + \sigma T_1) + i \sin(-2\beta + \sigma T_1)]. \end{aligned} \quad (19)$$

分开实部和虚部, 令

$$\varphi = -2\beta + \sigma T_1, \quad (20)$$

于是得到

$$a_x \varphi = a_x \sigma - \frac{3}{4}k_{33}a_x^3 + 2a_x - g_1a_x - 2a_x b \cos \varphi, \quad (21)$$

$$\dot{a}_x = -\frac{1}{2}c_{11}a_x - a_x b \sin \varphi. \quad (22)$$

在系统稳态工作时, 令

$$a_x \dot{\varphi} = \dot{a}_x = 0, \quad (23)$$

可得

$$a_x \sigma - \frac{3}{4}k_{33}a_x^3 + 2a_x - g_1a_x = 2a_x b \cos \varphi, \quad (24)$$

$$c_{11}a_x = -2a_x b \sin \varphi, \quad (25)$$

于是近似解为

$$\begin{aligned} & x(\tau, \varepsilon) \\ &= \frac{1}{2}a_x \cos\left(\tau + \frac{\sigma\varepsilon}{2}\tau - \frac{\varphi}{2}\right) \\ &+ \frac{1}{64}\varepsilon k_{33}a_x^3 \cos\left(3\tau + \frac{3\sigma\varepsilon}{2}\tau - \frac{3\varphi}{2}\right) \\ &+ \frac{b(2 + \varepsilon\sigma)^2}{4(3 + \varepsilon\sigma)^2 - 4}\varepsilon a_x \cos\left(3\tau + \frac{3\sigma\varepsilon}{2}\tau - \frac{\varphi}{2}\right). \end{aligned} \quad (26)$$

将 (24) 式和 (25) 式左右两边平方相加, 可得

$$\left(\sigma - \frac{3}{4}k_{33}a_x^2 + 2 - g_1\right)^2 + c_{11}^2 = 4b^2, \quad (27)$$

$$\varphi = \arctan\left(\frac{-c_{11}}{\sigma - 3k_{33}a_x^2/4 + 2 - g_1}\right), \quad (28)$$

(27) 式即为幅频特性方程, (28) 式为相频特性方程.

通过数值解析, 得到幅频响应曲线. 图 2 反映了  $b$  (激励幅值  $a$  和摆长  $l$ ) 变化时, 系统随调谐值  $\sigma$  变化的幅频响应. 调谐值  $\sigma$  相同时,  $b$  增大, 系统共振区带宽增加; 沿纵坐标方向共振曲线, 左侧幅值  $a_x$  与  $b$  呈正相关, 右侧幅值  $a_x$  与  $b$  呈负相关; 沿横坐标方向共振曲线, 左侧  $b$  与调谐值  $\sigma$  呈负相关, 右侧呈正相关. 图 3 反映了  $k_{33}$  取不同值时, 系统随调谐值  $\sigma$  变化的幅频响应. 调谐值  $\sigma$  相同时, 随  $k_{33}$  增大, 系统共振区带宽减小; 沿纵坐标方向, 左右两侧的共振曲线幅值  $a_x$  与  $k_{33}$  呈负相关; 沿横坐标方向, 在相同振幅值  $a_x$  前提下,  $k_{33}$  与调谐值  $\sigma$  呈正相关. 图 4 反映了  $c_{11}$  取不同值时, 系统随调谐值  $\sigma$  变化的幅频响应曲线. 在相同调谐值前  $\sigma$  提下, 随  $c_{11}$  增大, 系统共振区带宽变窄; 沿纵坐标方向共振曲线, 左侧  $a_x$  与  $c_{11}$  呈负相关, 右侧  $a_x$  与  $c_{11}$  呈正相关; 沿横坐标方向, 在相同振幅值  $a_x$  前提下,  $c_{11}$  与调谐值  $\sigma$  在左侧呈正相关, 在右侧呈负相关.

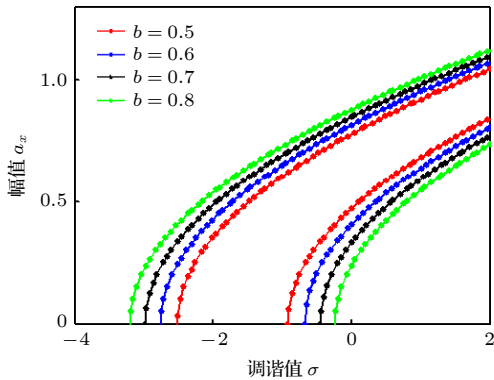


图 2  $\sigma$  变化下改变  $b$  的幅频响应曲线

Fig. 2. Amplitude-frequency response curves with different  $\sigma$  and  $b$ .

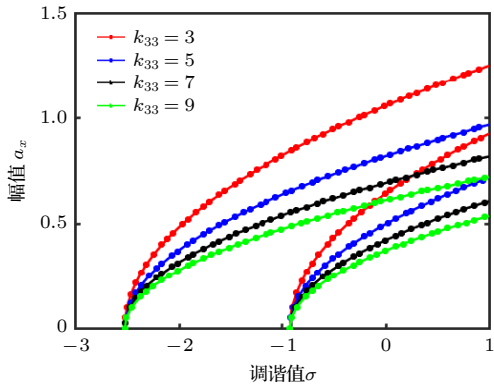


图 3  $\sigma$  变化下改变  $k_{33}$  的幅频响应曲线

Fig. 3. Amplitude-frequency response curves with different  $\sigma$  and  $k_{33}$ .

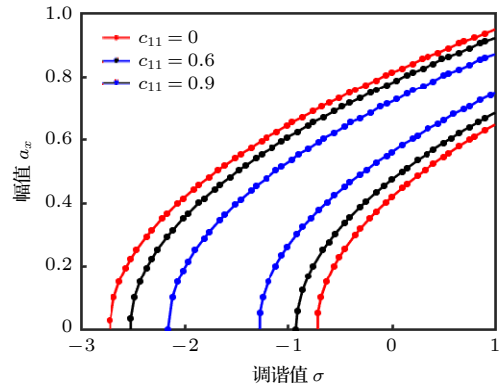


图 4  $\sigma$  变化下改变  $c_{11}$  的幅频响应曲线

Fig. 4. Amplitude-frequency response curves with different  $\sigma$  and  $c_{11}$ .

图 5 反映了调谐值  $\sigma$  变化时, 系统随  $c_{11}$  变化的幅频响应曲线. 相同调谐值  $\sigma$  时, 曲线关于  $c_{11} = 0$  对称, 随调谐值  $\sigma$  绝对值增大, 系统振动共振幅值减小; 沿纵坐标方向共振曲线,  $a_x$  与  $\sigma$  呈负相关; 沿横坐标方向, 在相同振幅值  $a_x$  前提下,  $c_{11}$  与调谐值  $\sigma$  呈正相关; 随调谐值  $\sigma$  绝对值增大, 系统振动共振区带宽由封闭曲线转化为开口的缩颈曲线, 系统能耗的增大使共振幅值降低; 且随  $\sigma$  增大, 振幅死亡的开口度增宽, 有利于系统参数的优化调控. 图 6 反映了调谐值  $\sigma$  取不同值时, 系统随  $k_{33}$  变化的幅频响应曲线. 随调谐值  $\sigma$  绝对值增大, 共振区域向  $k_{33}$  绝对值减小的方向移动; 沿纵坐标方向共振曲线, 左侧  $a_x$  与  $\sigma$  呈负相关, 右侧  $a_x$  与  $\sigma$  呈正相关; 沿横坐标方向, 在相同振幅值  $a_x$  前提下, 共振曲线左侧  $k_{33}$  与调谐值  $\sigma$  呈正相关, 右侧  $k_{33}$  与调谐值  $\sigma$  呈负相关.

实际工程中受垂直位移激励和水平约束的抽象单摆, 往往在水平约束方向的小振幅输出下,

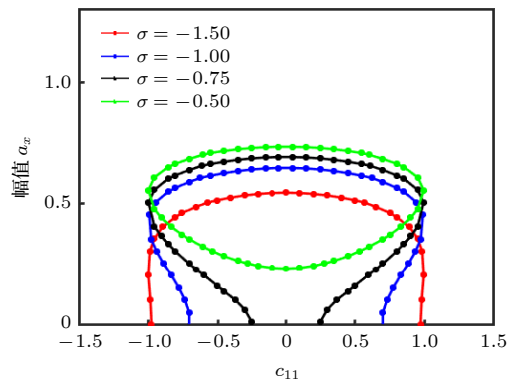


图 5  $c_{11}$  变化下改变  $\sigma$  的幅频响应曲线

Fig. 5. Amplitude-frequency response curves with different  $c_{11}$  and  $\sigma$ .

可获得良好的工作性能. 通过上述对系统的 1/2 次亚谐共振幅频特性分析, 得到参数  $b$ ,  $k_{33}$ ,  $c_{11}$  以及调谐值  $\sigma$  对系统幅频特性的影响规律. 由  $b = a/l$  可知, 增大垂直位移激励幅值  $a$  或减小等效摆长  $l$ , 将导致单摆系统共振区域带宽增大、共振幅值增大; 参数  $k_{33} = k_3 l^2 / (m w_1^2)$ ,  $k_{33}$  的大小和水平约束的三次方刚度成正比, 增大三次方刚度能够减小单摆亚谐共振幅值; 参数  $c_{11} = c / (m w_1)$ ,  $c_{11}$  的大小和水平约束的阻尼系数成正比, 通过增大阻尼系数能够使单摆亚谐共振区域变窄和共振幅值减小. 实际工程摆中, 涉及工作性能的结构参数可依据上述分析结果进行调整.

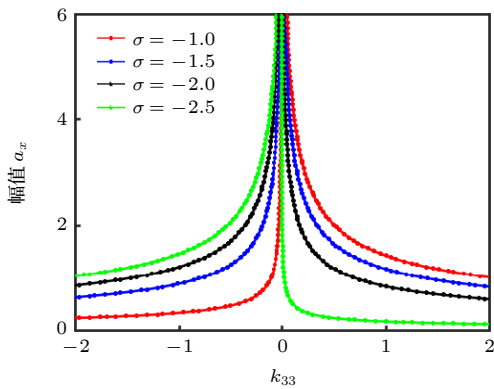


图 6  $k_{33}$  变化下改变  $\sigma$  的幅频响应曲线

Fig. 6. Amplitude-frequency response curves with different  $k_{33}$  and  $\sigma$ .

### 3.2 受垂直激励和水平约束单摆系统的 1/2 次亚谐共振的分岔结构

由奇异性理论定常解的局部稳定性分析, 结合系统幅频特性方程 (27) 得到

$$r^2 - q_1 r + q_2 = 0, \quad (29)$$

式中,

$$\begin{cases} r = a_x^2, \\ q_1 = 8(2 - g_1 + \sigma) / 3k_{33}, \\ q_2 = 16[(2 - g_1 + \sigma)^2 + c_{11}^2 - 4b^2] / (9k_{33}^2). \end{cases} \quad (30)$$

在 (29) 式中, 令

$$Q(y) = y^2 - \lambda^2 + \alpha_1 = 0, \quad (31)$$

式中,  $y = r - q_1/2$ ,  $\lambda = q_1/2$ ,  $\alpha_1 = q_2$ .

结合普适开折理论, (31) 式能够视为 Golubitsky-Schaefter 范式<sup>[33]</sup>  $Q(y, \lambda) = y^2 - \lambda^2$  的普适开折, 奇异点即为余维 1 的临界点. 受垂直激励和水平约

束的单摆系统 1/2 次亚谐共振分岔拓扑结构如下:

a) 分岔点集:

$$B = \{\alpha_1 = 0\}. \quad (32)$$

b) 滞后点集:

$$H = \emptyset. \quad (33)$$

c) 双极限点:

$$D = \{\alpha_1 > 0\}. \quad (34)$$

d) 转迁集:

$$\Sigma = B \cup H \cup D. \quad (35)$$

因此  $\alpha_1$  取不同值时, 受垂直激励和水平约束单摆系统 1/2 次亚谐共振分岔拓扑结构如图 7 所示. 当  $\alpha_1 \geq 0$  时, 使  $\alpha_1$  发生变化的微小扰动都会使系统分岔结构发生变化, 不利于单摆运动的稳定性; 而当参数满足  $\alpha_1 < 0$  时, 系统分岔是持久的, 利于保证单摆运动的稳定性.

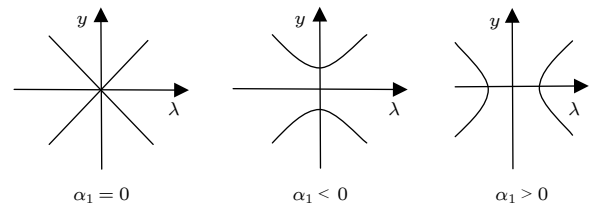


图 7 受垂直激励和水平约束单摆系统 1/2 次亚谐共振分岔拓扑结构

Fig. 7. Bifurcation topology of 1/2-order subharmonic resonance of a simple pendulum system with vertical excitation and horizontal constraint.

## 4 受垂直激励和水平约束单摆系统的混沌分析

### 4.1 受垂直激励和水平约束单摆系统的势阱

运用 Melnikov 方法, 对受垂直激励和水平约束的单摆非线性系统进行混沌运动分析与预测. 令  $\sin x \approx x$ , 引入小参数  $\delta$ , 受垂直激励和水平约束的单摆系统的运动方程 (6) 在  $\delta = 0$  时的 Hamilton 系统为

$$\begin{cases} \frac{dx}{d\tau} = z, \\ \frac{dz}{d\tau} = (1 - g_1)x - k_{33}x^3. \end{cases} \quad (36)$$

令  $dx/d\tau = dz/d\tau = 0$ , 当  $g_1 < 1$ ,  $k_{33} > 0$  时, 得到系统的 3 个平衡点分别是

$$\begin{cases} A_1 \left( -\sqrt{(1-g_1)/k_{33}}, 0 \right), \\ A_2 \left( \sqrt{(1-g_1)/k_{33}}, 0 \right), \\ O(0, 0). \end{cases} \quad (37)$$

对平衡点  $O(0, 0)$ , 其特征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是实数; 对于平衡点  $A_1$  和  $A_2$ , 其特征值  $\lambda_1$  和  $\lambda_2$  是共轭纯虚根, 所以平衡点  $O$  是不稳定的鞍点, 而平衡点  $A_1$  和  $A_2$  是稳定的中心. 令 Hamilton 函数为  $H(x, z)$ , 得到受垂直激励和水平约束的单摆系统的 Hamilton 函数为

$$H(x, z) = \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{2}(1-g_1)x^2 + \frac{1}{4}k_{33}x^4. \quad (38)$$

令其 Hamilton 量为

$$H(x, z) = h, \quad (39)$$

式中,  $h$  为常数.

由 (38) 式和 (39) 式, 得到相轨线方程:

$$z^2 - (1-g_1)x^2 + \frac{1}{2}k_{33}x^4 = 2h. \quad (40)$$

势能函数  $U(x)$  可表示为

$$U(x) = -\frac{1}{2}(1-g_1)x^2 + \frac{1}{4}k_{33}x^4. \quad (41)$$

Hamilton 系统 (38) 的势阱曲线和相轨线分别如图 8(a)和图 8(b)所示. 图 8(a)中, 对称的双势阱  $W_1$  和  $W_2$  分别对应于稳定中心点, 势垒对应于不稳定鞍点. 当把系统中的质点运动理解为孤立振子或振子群型式的运动时: 一方面, 对称势阱  $W_1$  和  $W_2$  之间的势垒为系统稳定的周期运动提供了过渡平台, 当系统振子运动能量较小而不能穿越势垒时, 振子在  $W_1$  或  $W_2$  势阱内做小幅值的稳定周期运动, 对应于图 8(b)中的封闭椭圆相轨线, 最后将稳定于中心点; 另一方面, 当系统振子获得越

过势垒的足够能量后, 会在势阱  $W_1$  和  $W_2$  之间大范围运动, 个别能量高的活跃振子在势阱壁和势垒平台间发生碰撞、反弹、折回和冲击, 使系统运动复杂化, 对应于图 8(b)中的  $O$  点或其他相轨线. 系统能量变化, 会引发系统运动相轨线的拓扑结构改变, 系统的运动状态随之改变. 图 8(a)中, 随摆长  $l$  增大, 势阱的开口宽度和深度都减小, 说明系统的摆动运动能量更多的转移到振动运动能量上, 能量在运动形态间交换, 在图 8(b)的局部放大结构图 8(c)中, 摆长  $l$  增大时, 系统从  $O$  点出发的相轨线会在不同摆长的运动路径间发生跃迁和跌落的路径转迁, 使得系统运动复杂化. 这种受垂直激励和水平约束的单摆系统, 是工程弹簧摆的典型物理抽象. 例如机构中的两个弹性接触辊在服役状态下发生动态弹性形变, 即 1 个工作循环中, 两辊间的弹性形变 (摆长) 的动态连续变化引起的能量转迁会使系统的运动路径在不同的相轨线之间切换, 使得系统运动复杂化.

#### 4.2 受垂直激励和水平约束单摆系统的同宿轨与混沌预测

当  $h = 0$  时, 可得 (38) 式同宿轨道为

$$z = \pm \sqrt{(1-g_1)x^2 - \frac{1}{2}k_{33}x^4}. \quad (42)$$

取  $\tau = 0, z = 0$  可解得

$$x_0 = \pm \sqrt{\frac{2(1-g_1)}{k_{33}}}, \quad (43)$$

因  $dx/d\tau = z$ , 对 (42) 式积分并整理得

$$x^\pm(\tau) = \pm \sqrt{\frac{2(1-g_1)}{k_{33}}} \operatorname{sech} \sqrt{1-g_1}\tau, \quad (44)$$

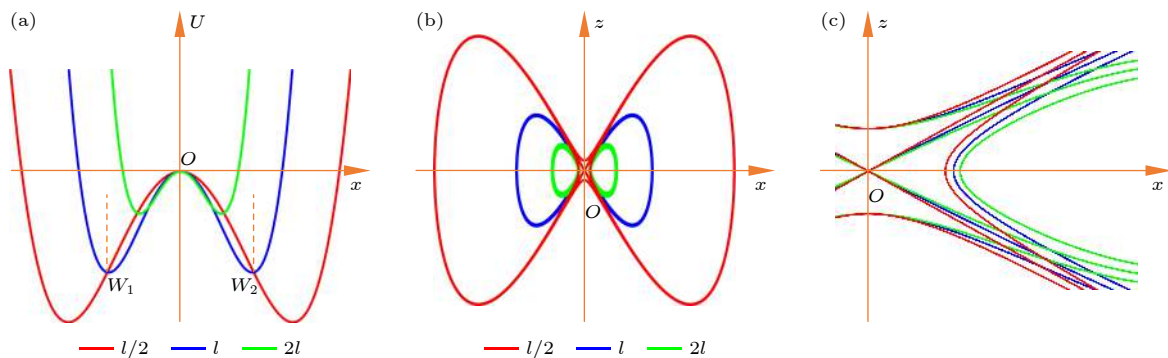


图 8 (a) 势阱曲线; (b), (c) 相轨线及其局部放大图

Fig. 8. (a) Potential well curve; (b), (c) phase track and its enlarged view.

由此得系统的同宿轨道参数方程为

$$\begin{pmatrix} x^\pm(\tau) \\ z^\pm(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\sqrt{\frac{2(1-g_1)}{k_{33}}}\operatorname{sech}\sqrt{1-g_1}\tau \\ \mp\sqrt{\frac{2}{k_{33}}}(1-g_1)\operatorname{sech}\sqrt{1-g_1}\tau\tanh\sqrt{1-g_1}\tau \end{pmatrix}. \quad (45)$$

可把受垂直激励和水平约束的单摆系统的 Melnikov 函数表示为

$$M_\pm(\tau_0) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x^\pm(\tau)) \wedge g(x^\pm(\tau), \tau + \tau_0) d\tau. \quad (46)$$

利用 (45) 式可得

$$\begin{aligned} f(x^\pm(\tau)) \wedge g(x^\pm(\tau), \tau + \tau_0) = & -c_{11}[z^\pm(\tau)]^2 \\ & - b\omega_b^2 \cos \omega_b(\tau + \tau_0)x^\pm(\tau)z^\pm(\tau), \end{aligned} \quad (47)$$

将 (47) 式代入系统 Melnikov 函数 (46) 得到

$$\begin{aligned} M_\pm(\tau_0) = & \int_{-\infty}^{+\infty} [-c_{11}(z^\pm(\tau))^2] d\tau \\ & - \int_{-\infty}^{+\infty} [b\omega_b^2 \cos \omega_b(\tau + \tau_0)x^\pm(\tau)z^\pm(\tau)] d\tau, \end{aligned} \quad (48)$$

计算得到系统发生混沌运动的 Melnikov 阈值为

$$\begin{aligned} M_\pm(\tau_0) = & \frac{4c_{11}(1-g_1)^{3/2}}{3k_{33}} \pm \frac{8\pi b\omega_b^4(1-g_1)^{3/2}}{k_{33}} \\ & \times \sin \omega_b \tau_0 \operatorname{csch}(2\sqrt{1-g_1}\pi\omega_b). \end{aligned} \quad (49)$$

由 Melnikov 理论可知, 当 (49) 式存在简单零点时, 系统 (6) 存在 Smale 马蹄意义上的混沌. 因此系统在 1/2 次亚谐共振情况下, 当满足

$$\begin{cases} \sup(M_\pm(\tau_0)) > 0, \\ \inf(M_\pm(\tau_0)) < 0, \end{cases} \quad (50)$$

即:

$$\begin{aligned} \min_{\tau_0 \in (0, 2\pi/\omega_b)} \left[ \pm \frac{8\pi b\omega_b^4(1-g_1)^{3/2}}{k_{33}} \sin \omega_b \tau_0 \operatorname{csch}(2\sqrt{1-g_1}\pi\omega_b) \right] & < -\frac{4c_{11}(1-g_1)^{3/2}}{3k_{33}} \\ & < \max_{\tau_0 \in (0, 2\pi/\omega_b)} \left[ \pm \frac{8\pi b\omega_b^4(1-g_1)^{3/2}}{k_{33}} \sin \omega_b \tau_0 \operatorname{csch}(2\sqrt{1-g_1}\pi\omega_b) \right], \end{aligned} \quad (51)$$

存在  $M_\pm(\tau_0) = 0$  且  $\partial M_\pm(\tau_0)/\partial \tau_0 \neq 0$ , 系统可发生 Smale 马蹄意义的混沌.

图 9 直观反映了系统发生混沌的临界参量  $b$ ,  $c_{11}$ ,  $\omega_b$  之间的制约关联条件. 曲面的上部空间参数组合引发系统混沌运动, 当  $c_{11}$  接近 0.5 时,  $b$  值越大, 越易引发系统混沌. 根据 Melnikov 函数预测条件, 选取符合混沌临界参数  $c_{11} = 0.5$ ,  $k_{33} = 1.5$ ,  $g_1 = 0.8$ ,  $b = 0.6$ ,  $\omega_b = 2$ , 计算单摆系统的混沌吸

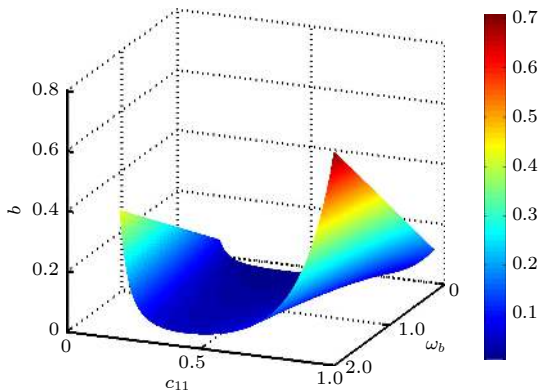


图 9 系统混沌运动的参数条件

Fig. 9. Parameter conditions for chaotic motion of the system.

引子空间结构, 如图 10 所示. 图 10 中混沌吸引子呈现中心对称分布, 蓝色与红色分别代表单摆系统顺时针和逆时针运动的混沌吸引子, 运动过程中系统参数改变, 导致系统能量的交替变化, 使系统运动复杂化. 图 11 对应系统摆长变化的分岔, 随摆长  $l$  增大, 系统历经二周期、单周期、二周期、四周期到混沌运动的演化过程. 结合图 10 与图 11, 系统在  $\omega_b = 2$  时的混沌吸引子是成对的两个旋转对称分岔点的余维.

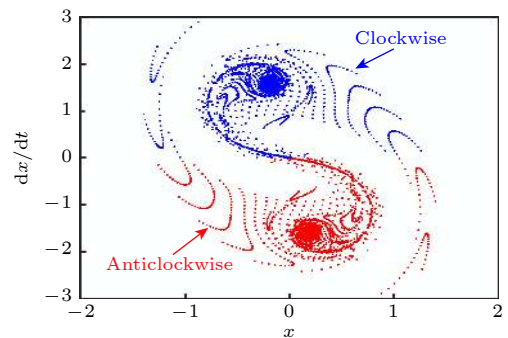


图 10 单摆系统亚谐共振在  $\omega_b = 2$  时的混沌吸引子

Fig. 10. Chaotic attractor of simple pendulum system when  $\omega_b = 2$ .

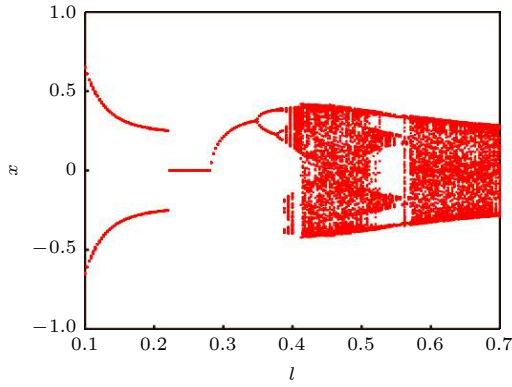


图 11 摆长  $l$  变化下的分岔图

Fig. 11. Bifurcation diagram with different  $l$

## 5 受垂直激励和水平约束的单摆系统的亚谐共振仿真

对受垂直激励和水平约束的单摆系统 (6) 进行数值仿真, 如无特殊说明, 参数如下:  $c_{11} = 0.618$ ,  $k_{33} = 1.3$ ,  $g_1 = 0.28$ ,  $b = 0.48$ . 通过仿真分岔、最大 Lyapunov 指数和双参耦合分岔等系统特性, 研究单摆系统亚谐共振与混沌的演化机制.

### 5.1 受垂直激励和水平约束单摆系统的亚谐共振分岔与混沌

#### 5.1.1 $\omega_b$ 对单摆系统分岔的影响

随  $\omega_b$  变化的单摆系统的运动分岔及最大 Lyapunov 指数如图 12(a) 和图 12(b) 所示. 可见, 随  $\omega_b$  增大, 单摆系统历经“单周期-二周期-四周期-混沌-四周期-混沌-二周期-混沌-四周期-二周期-单周期”的系列复杂运动变化, 且中间交替发生多次的倍周期分岔.

$\omega_b$  变化的相图和时间历程如图 13(a)–(f) 所示.  $\omega_b = 0.5, 1.02, 1.8$  时, 系统分别处于单周期、二周期、混沌运动状态; 且  $\omega_b = 1.8$  的时间历程图 (图 14(a)–(c)) 显示出系统运动中较明显的交叠拍振共振行为, 伴随  $b$  (垂直位移激励幅值或摆长) 变化, 系统能量也不断交替改变, 系统共振频次和振幅带宽都发生变化. 比较图 13(d)–(f) 发现,  $\omega_b$  变化改变了单摆的运动周期, 其变化过程与系统动力学行为 (图 13(a)–(c)) 相一致.

#### 5.1.2 $c_{11}$ 对单摆系统分岔的影响

随  $c_{11}$  变化的系统分岔和最大 Lyapunov 指数如图 15(a) 和图 15(b) 所示. 可见, 随水平约束阻尼系数  $c_{11}$  增大, 系统历经“混沌-四周期-二周期-

混沌-八周期-四周期-二周期-单周期”的系列复杂运动变化过程.

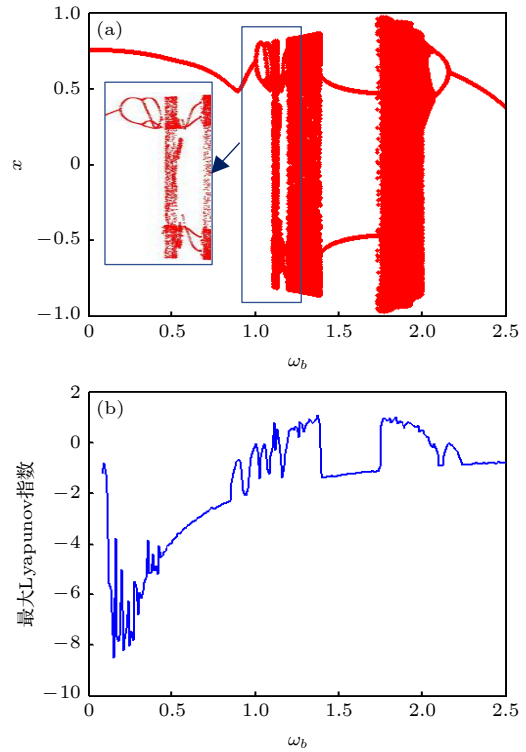


图 12  $\omega_b$  变化下的 (a) 分岔和 (b) 最大 Lyapunov 指数

Fig. 12. (a) Bifurcation and (b) maximum Lyapunov exponent with different  $\omega_b$ .

$c_{11}$  变化的相图和时间历程如图 16(a)–(f) 所示. 其中图 16(a)–(f) 中,  $c_{11} = 0.6, 0.63, 1.2$  时, 系统分别处于双曲混沌、混沌、单周期运动状态;  $c_{11} = 0.6$ , 系统表现为左右两中心的相轨迹被鞍点所吸引的双曲混沌;  $c_{11} = 0.63$ , 系统表现出对称性降低, 有序性增加的混沌态. 随  $c_{11}$  继续增大, 系统由倒倍周期分岔发展为  $c_{11} = 1.2$  的单周期运动. 比较图 16(d)–(f) 发现,  $c_{11}$  变化改变了水平约束单摆系统的运动周期, 其变化过程与系统动力学行为 (图 16(a)–(c)) 相一致.

#### 5.1.3 $g_1$ 对单摆系统分岔的影响

随  $g_1$  变化的系统分岔图及最大 Lyapunov 指数曲线如图 17(a) 和图 17(b) 所示. 可见, 随  $g_1$  增大, 单摆系统历经“混沌-四周期-二周期-单周期”的运动状态改变.  $g_1$  取不同值的相图和时间历程如图 18 所示. 其中图 18(a)–(c), 随系统历经双曲混沌、混沌、二周期等运动状态的改变, 这与图 18(d)–(f) 中,  $g_1$  变化引起的系统动力学行为相一致.

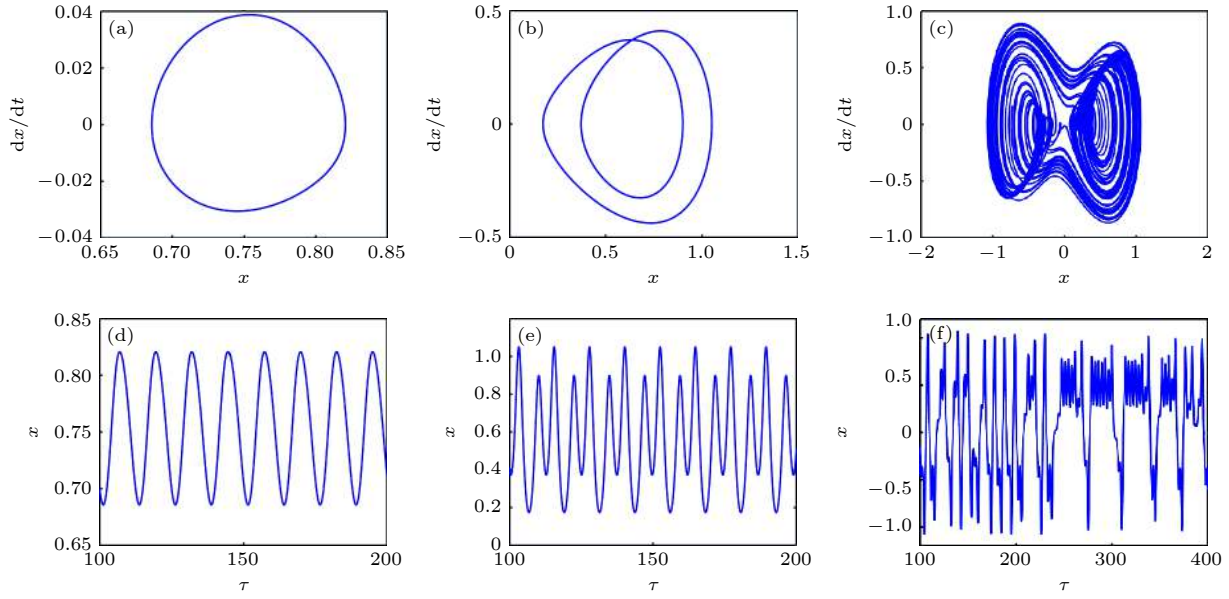


图 13  $\omega_b$  变化下的 (a)—(c) 相图和 (d)—(f) 时间历程图 (a), (d)  $\omega_b = 0.5$ ; (b), (e)  $\omega_b = 1.02$ ; (c), (f)  $\omega_b = 1.8$   
 Fig. 13. (a)–(c) Phase diagram and (d)–(f) time history diagram with different  $\omega_b$ : (a), (d)  $\omega_b = 0.5$ ; (b), (e)  $\omega_b = 1.02$ ; (c), (f)  $\omega_b = 1.8$ .

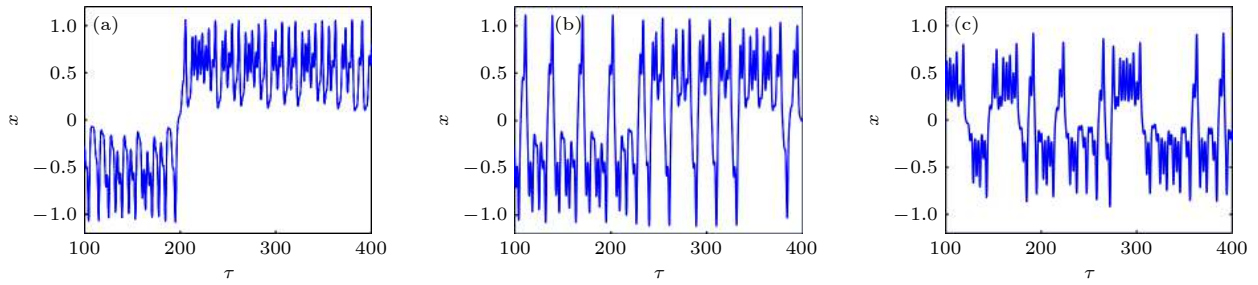


图 14 当  $\omega_b = 1.8$  时  $b$  变化下的时间历程图 (a)  $b = 0.28$ ; (b)  $b = 0.38$ ; (c)  $b = 0.58$   
 Fig. 14. Time history diagram when  $b$  changes and  $\omega_b = 1.8$ : (a)  $b = 0.28$ ; (b)  $b = 0.38$ ; (c)  $b = 0.58$ .

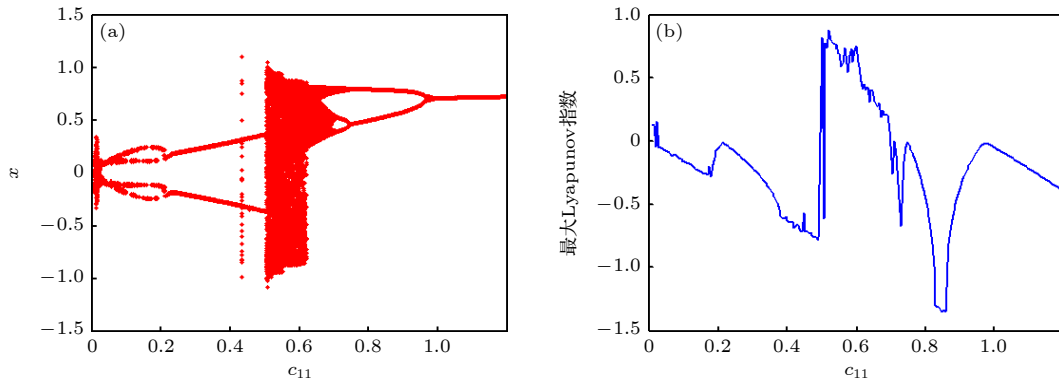


图 15  $c_{11}$  变化下的 (a) 分岔和 (b) 最大 Lyapunov 指数  
 Fig. 15. (a) Bifurcation and (b) maximum Lyapunov exponent with different  $c_{11}$ .

### 5.1.4 $k_{33}$ 对单摆系统分岔的影响

随  $k_{33}$  变化的系统分岔及最大 Lyapunov 指数曲线如图 19(a) 和图 19(b) 所示. 随  $k_{33}$  增大, 系统历经“单周期-二周期-四周期-八周期-混沌”系列运动状态的改变过程. 随  $k_{33}$  变化的相图和时间历程

如图 20 所示. 其中图 20(a)—(c),  $k_{33} = 0.6, 1.2, 1.4$  时, 系统分别处于四周期、混沌、双曲混沌运动. 随  $k_{33}$  变化, 单摆的周期性也发生改变如图 20(d)—(f), 其变化过程与系统动力学行为 (图 20(a)—(c)) 相一致.

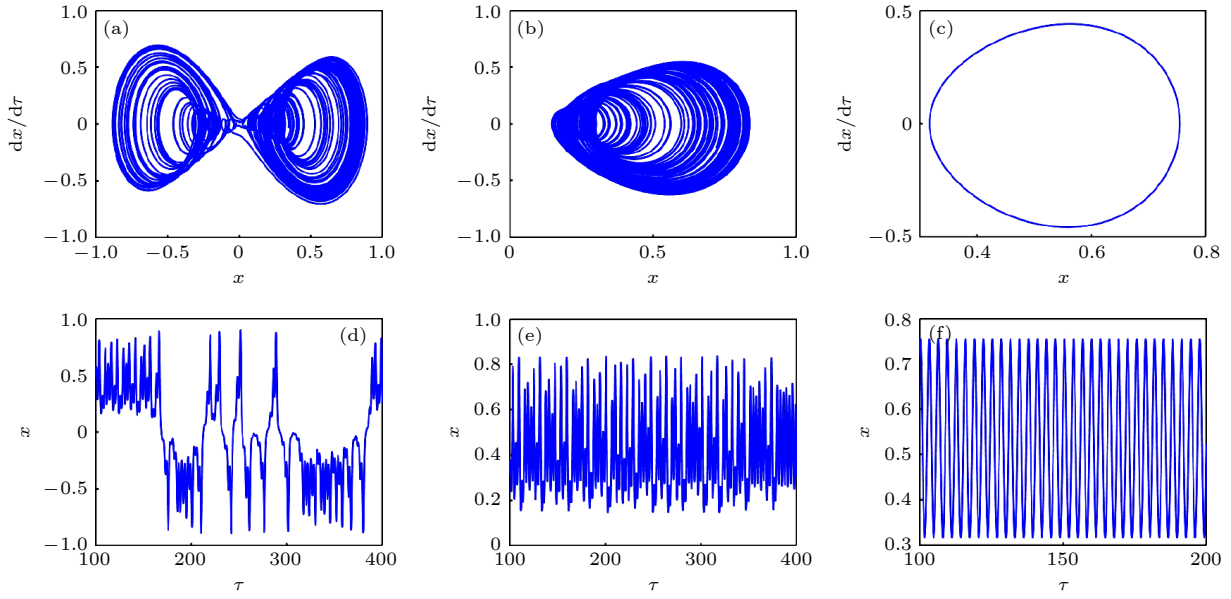


图 16  $c_{11}$  变化下的 (a)—(c) 相图和 (d)—(f) 时间历程图 (a), (d)  $c_{11} = 0.6$ ; (b), (e)  $c_{11} = 0.63$ ; (c), (f)  $c_{11} = 1.2$   
 Fig. 16. (a)—(c) Phase diagram and (d)—(f) time history diagram with different  $c_{11}$ : (a), (d)  $c_{11} = 0.6$ ; (b), (e)  $c_{11} = 0.63$ ; (c), (f)  $c_{11} = 1.2$ .

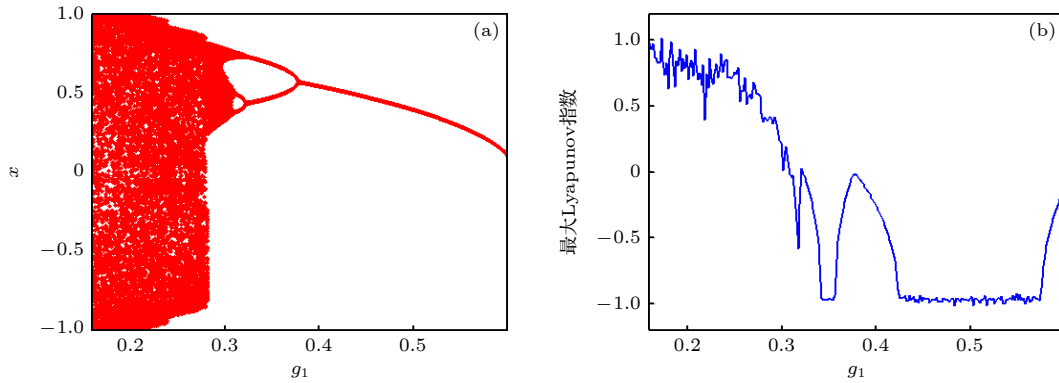


图 17  $g_1$  变化下的 (a) 分岔和 (b) 最大 Lyapunov 指数  
 Fig. 17. (a) Bifurcation and (b) maximum Lyapunov exponent with different  $g_1$ .

### 5.1.5 $b$ 对单摆系统分岔的影响

随  $b$  变化单摆系统的运动分岔及最大 Lyapunov 指数如图 21(a) 和图 21(b) 所示. 可见, 随  $b$  增加, 单摆系统历经“单周期-二周期-四周期-混沌-四周期-二周期-单周期”的系列复杂运动变化.

$b$  变化的相图和时间历程如图 22(a)—(f) 所示. 其中图 22(a)—(f) 中,  $b = 0.19, 0.28, 0.36$  系统分别处于二周期、混沌、双曲混沌的运动状态.  $b = 0.36$  的时间历程图 (图 23(a)—(c)) 显示出系统运动中较明显的交叠拍振共振行为, 伴随  $\omega_b$  变化, 系统能量也不断交替改变, 系统共振频次和振幅带宽都发生变化. 比较图 22(d)—(f) 发现,  $b$  变化改变了单摆的运动周期, 其变化过程与系统动力

学行为 (图 22(a)—(c)) 相一致.

## 5.2 受垂直激励和水平约束单摆系统的亚谐共振双参分析

通过分析方程 (6) 随相关变量的双参组合, 研究受垂直激励和水平约束的单摆系统在双参量耦合变化下的动力行为演化, 映射双参域变化下的单摆系统分岔运动特性.

参数  $\omega_b$  耦合  $c_{11}$  的系统运动特性如图 24(a) 所示. 在区域“Ch1”, “Ch2”和“Ch3”的组合取值, 反映系统运动做混沌运动; 其他区域组合取值, 系统做周期运动. 图 24(a) 中, 考虑参量的一维变化, 沿“L1”路径变化参数  $\omega_b$ , 系统运动状态变化过程

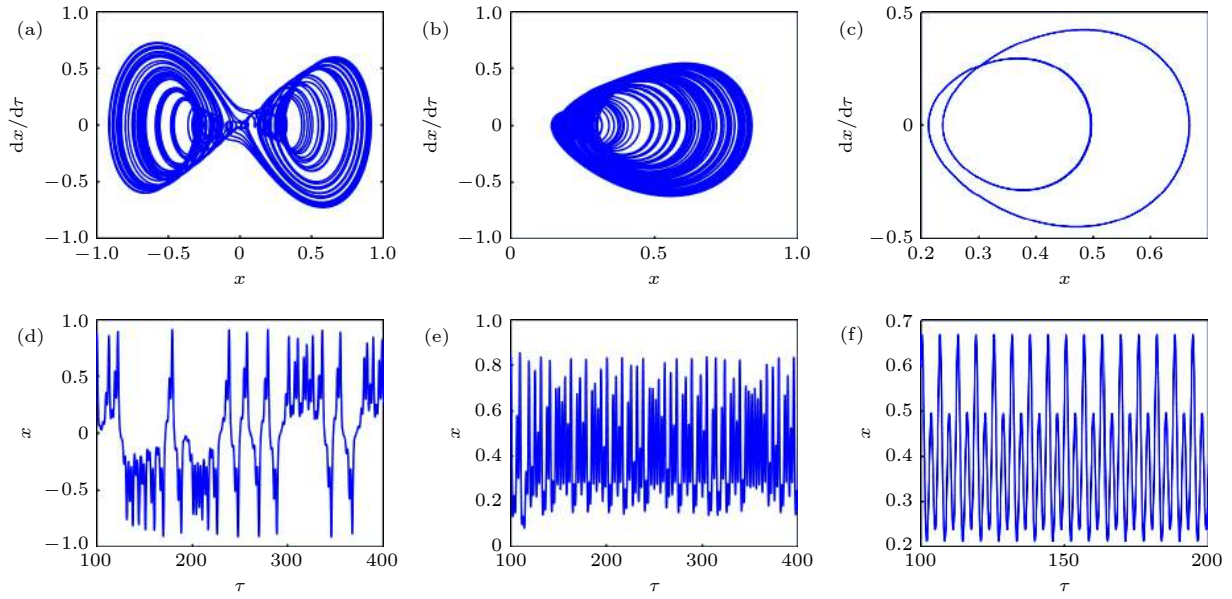


图 18  $g_1$  变化下的 (a)—(c) 相图和 (d)—(f) 时间历程图 (a), (d)  $g_1 = 0.27$ ; (b), (e)  $g_1 = 0.28$ ; (c), (f)  $g_1 = 0.36$

Fig. 18. (a)–(c) Phase diagram and (d)–(f) time history diagram with different  $g_1$ : (a), (d)  $g_1 = 0.27$ ; (b), (e)  $g_1 = 0.28$ ; (c), (f)  $g_1 = 0.36$ .

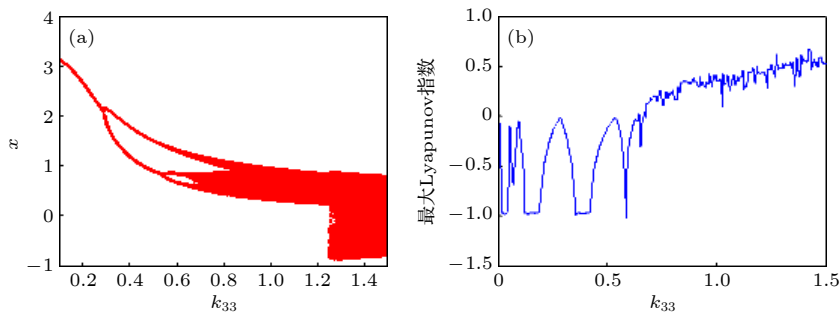


图 19  $k_{33}$  变化下的 (a) 分岔和 (b) 最大 Lyapunov 指数

Fig. 19. (a) Bifurcation and (b) maximum Lyapunov exponent with different  $k_{33}$ .

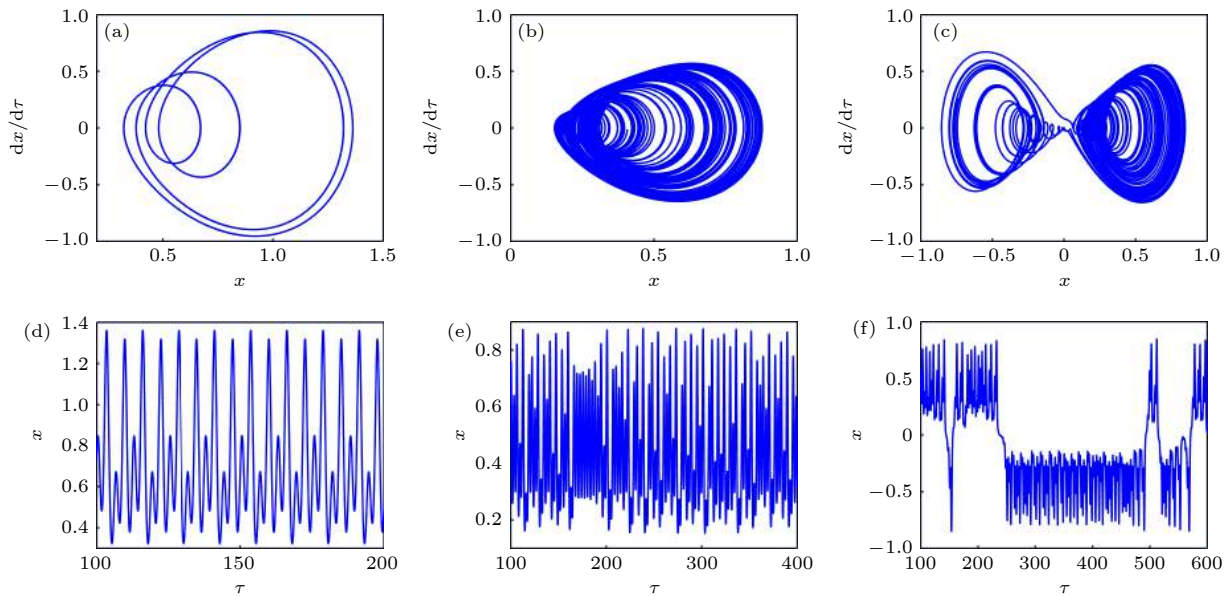


图 20  $k_{33}$  变化下的 (a)—(c) 相图和 (d)—(f) 时间历程图 (a), (d)  $k_{33} = 0.6$ ; (b), (e)  $k_{33} = 1.2$ ; (c), (f)  $k_{33} = 1.4$

Fig. 20. (a)–(c) Phase diagram and (d)–(f) time history diagram with different  $k_{33}$ : (a), (d)  $k_{33} = 0.6$ ; (b), (e)  $k_{33} = 1.2$ ; (c), (f)  $k_{33} = 1.4$ .

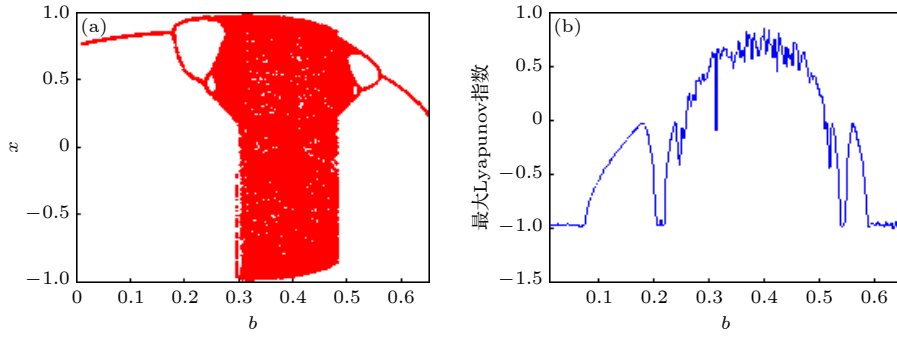


图 21  $b$  变化下的 (a) 分岔和 (b) 最大 Lyapunov 指数  
 Fig. 21. (a) Bifurcation and (b) maximum Lyapunov exponent with different  $b$ .

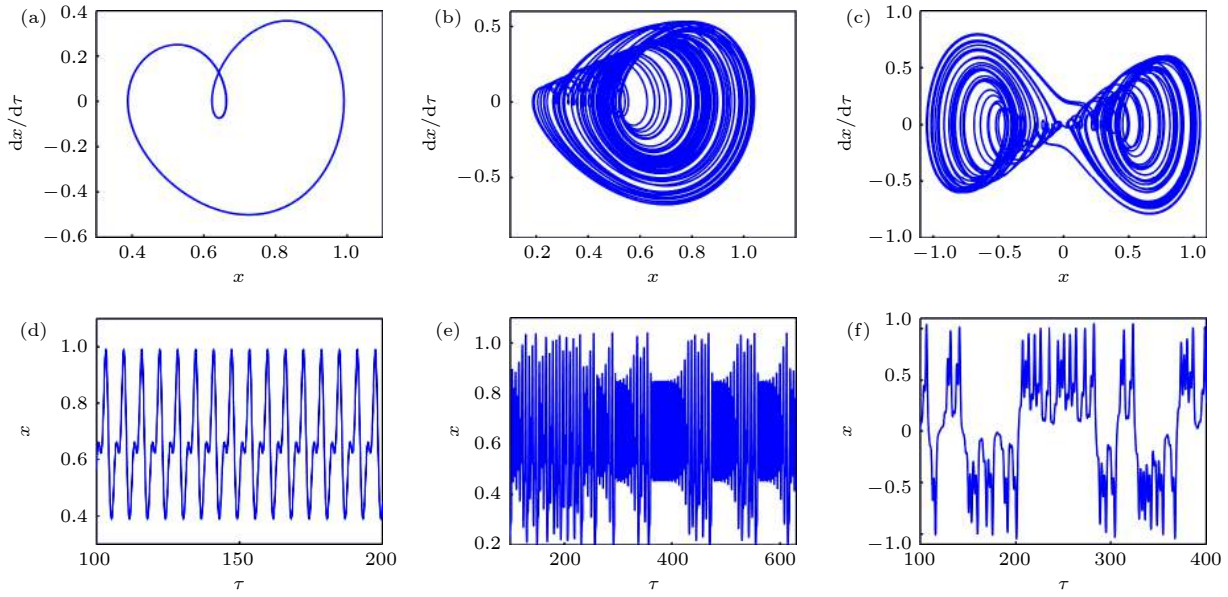


图 22  $b$  变化下的 (a)–(c) 相图和 (d)–(f) 时间历程图 (a), (d)  $b = 0.19$ ; (b), (e)  $b = 0.28$ ; (c), (f)  $b = 0.36$   
 Fig. 22. (a)–(c) Phase diagram and (d)–(f) time history diagram with different  $b$ : (a), (d)  $b = 0.19$ ; (b), (e)  $b = 0.28$ ; (c), (f)  $b = 0.36$ .

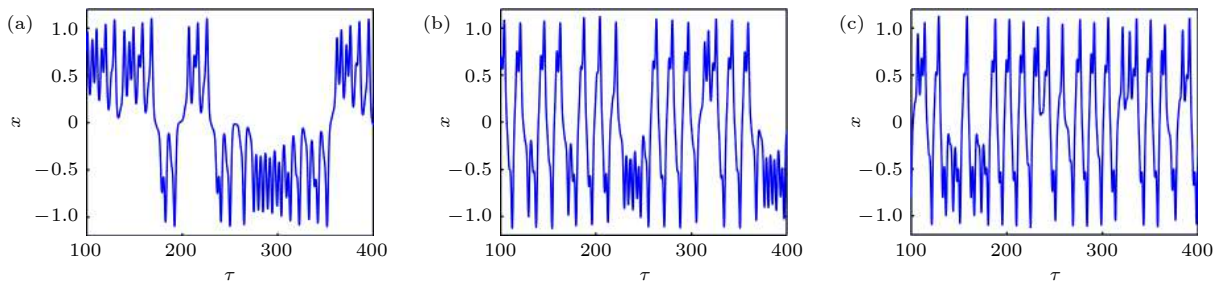


图 23 当  $b = 0.36$  时  $\omega_b$  变化下的时间历程图 (a)  $\omega_b = 1.3$  (b)  $\omega_b = 1.5$ ; (c)  $\omega_b = 1.7$   
 Fig. 23. Time history diagram when  $\omega_b$  changes and  $b = 0.36$ : (a)  $\omega_b = 1.3$ ; (b)  $\omega_b = 1.5$ ; (c)  $\omega_b = 1.7$ .

与图 12 一致; 沿着“L2”路径变化参数  $c_{11}$ , 系统运动状态变化过程与图 15 一致, 这也在一定程度上佐证了单参数分岔对系统运动改变的结果。

参数  $c_{11}$  耦合  $k_{33}$  的系统运动特性如图 24(b) 所示. 区域“Ch3”组合取值会导致系统运动的不稳定性比区域“Ch1”, “Ch2”大; 当  $c_{11}$ ,  $k_{33}$  在“Ch1”,

“Ch2”和“Ch3”区域边缘组合取值时, 会导致系统运动由混沌转向周期运动。

参数  $k_{33}$  耦合  $g_1$  的系统运动特性如图 24(c) 所示. 区域“Ch1”内组合取值, 最大 Lyapunov 指数为正, 系统做混沌运动. 参数  $g_1$  耦合参数  $b$  的系统运动特性如图 24(d) 所示. 区域“Ch1”内组合取

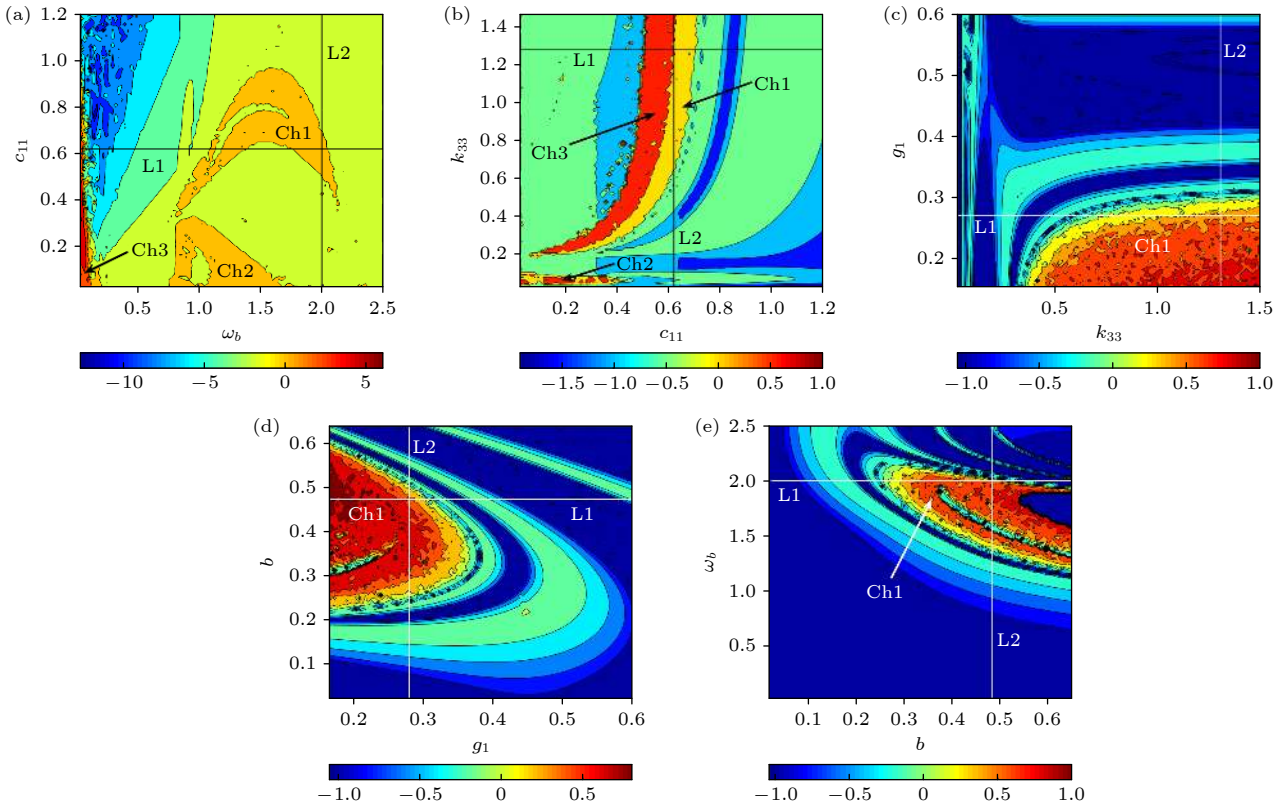


图 24 单摆非线性系统在双参数域上的运动 (a)  $\omega_b$ - $c_{11}$ ; (b)  $c_{11}$ - $k_{33}$ ; (c)  $k_{33}$ - $g_1$ ; (d)  $g_1$ - $b$ ; (e)  $b$ - $\omega_b$

Fig. 24. Motion of a simple pendulum nonlinear system in the bi-parameter domain: (a)  $\omega_b$ - $c_{11}$ ; (b)  $c_{11}$ - $k_{33}$ ; (c)  $k_{33}$ - $g_1$ ; (d)  $g_1$ - $b$ ; (e)  $b$ - $\omega_b$ .

值, 系统最大 Lyapunov 指数大于零, 系统做混沌运动, 当  $g_1$  和  $b$  在其他区域内组合取值时, 最大 Lyapunov 指数为负, 系统做周期运动.

参数  $b$  耦合参数  $\omega_b$  组合的系统运动特性如图 24(e) 所示. 区域“Ch1”内组合取值, 系统最大 Lyapunov 指数为正, 系统做混沌运动; 当  $b$  和  $\omega_b$  的组合取值在“Ch1”区域边界时, 系统最大 Lyapunov 指数在 0 附近变动, 系统发生混沌和周期运动的转换.

上述对受垂直激励和水平约束的单摆系统在双参数域上的运动特性分析, 明确了参数  $\omega_b$ ,  $c_{11}$ ,  $k_{33}$ ,  $g_1$  和  $b$  的组合取值对系统运动状态的影响, 系统发生周期运动与混沌运动的转换边界, 系统最大 Lyapunov 指数发生穿越 0 的突变, 系统动力特性也变得复杂.

## 6 受垂直激励和水平约束单摆系统亚谐共振的吸引域

分析受垂直激励和水平约束的单摆系统亚谐共振分岔与混沌等运动状态转换, 能量变化是本质驱动内因. 动力系统运动过程吸引子、吸引域的流

形变迁所表现出的能量演化机制, 决定了系统的运动特性.

研究参数  $b$  改变对受垂直激励和水平约束的单摆非线性系统的吸引子、吸引域的影响, 揭示单摆系统运动过程中能量变化影响下的全局动力特性. 参数  $b$  变化引发的单摆系统吸引子、吸引域的变迁如图 25 所示.

$b = 0.11$  的吸引域如图 25(a) 所示. 此时系统存在两个周期吸引子, 且每个吸引子所在的吸引域 (蓝色和绿色) 边界清晰, 二者相互缠绕, 系统处于稳定运动状态; 如图 25(b) 所示, 随  $b$  增大至  $b = 0.23$  时, 周期吸引子倍增, 存在 4 个周期吸引子, 每两个周期吸引子所在吸引域 (蓝色和绿色) 边界清晰, 吸引域带宽变窄, 还有进一步稀疏的演化趋势, 这些都在一定程度上反映出  $b$  的改变会诱发单摆系统内部稳定域的变化.

$b = 0.32$  的吸引域如图 25(c) 所示. 系统历经倍周期分岔运动的极限位置到达边界, 系统的运动状态发生激变, 出现混沌吸引子, 系统能量的改变导致单摆的运动失稳. 如图 25(d) 所示的  $b = 0.35$ , 系统内部继续激变, 混沌吸引子所在的吸引域区域

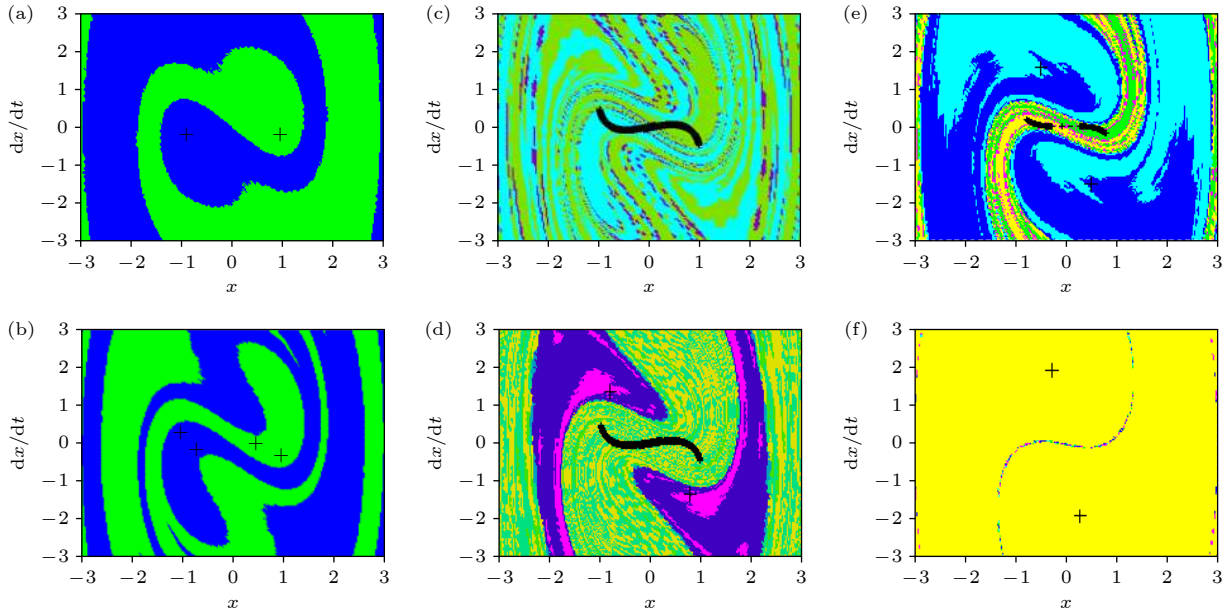


图 25 系统在参数  $b$  变化时的吸引子、吸引域 (a)  $b = 0.11$ ; (b)  $b = 0.23$ ; (c)  $b = 0.32$ ; (d)  $b = 0.35$ ; (e)  $b = 0.49$ ; (f)  $b = 0.81$   
 Fig. 25. Attractor and attraction domain of the system when the parameter  $b$  changes: (a)  $b = 0.11$ ; (b)  $b = 0.23$ ; (c)  $b = 0.32$ ; (d)  $b = 0.35$ ; (e)  $b = 0.49$ ; (f)  $b = 0.81$ .

减少, 出现周期吸引子, 并且两个周期吸引子及其所在的吸引域中心对称分布, 反映出垂直激励引发的能量改变激发出单摆系统的周期吸引子与混沌吸引子共存, 系统所表现出的运动形式则取决于初始状态.

$b = 0.49$  的吸引域如图 25(e) 所示. 混沌吸引子分散, 所在的吸引域变窄, 密集程度降低, 并且周期吸引子和混沌吸引子共存, 两个周期吸引子所在的吸引域面积增大, 该条件下垂直激励引发的能量变化激发出单摆系统的周期吸引子聚集, 系统所表现出的运动形式依然与初始状态密切相关.  $b = 0.81$  的吸引域如图 25(f) 所示, 系统存在两个周期吸引子, 且两个周期吸引子所在的吸引域相互环绕, 呈中心对称分布, 系统处于周期运动状态, 反映出垂直激励所引起的能量变化引起单摆系统周期吸引子能量增大, 系统主要表现为周期运动.

可见, 参数  $b$  变化改变了系统中的能量分布, 导致系统周期吸引子倍增, 混沌吸引子出现, 系统经历倍周期分岔通向混沌; 当系统在周期吸引子和混沌吸引子共存条件下, 各自吸引域边界会因系统能量变化, 不断发生边界的侵蚀、融合的复杂过程. 在混沌吸引子消失后, 周期吸引子及其吸引域中心对称分布, 这都在一定程度上反映出单摆系统能量影响下的全局动力特性.

## 7 结 论

受垂直激励和水平约束的单摆系统, 是工程弹簧摆的典型物理抽象. 本文系统地研究了这类工程摆的物理特性, 研究结果对实际工程应用中涉及工作性能的参数调整, 奠定了理论依据. 通过对该系统的亚谐共振分岔和混沌分析, 结论如下:

1) 增大水平约束阻尼系数和三次方刚度系数, 有利于减小单摆系统共振幅值; 增大水平约束阻尼系数可减小单摆系统共振区域带宽; 增大垂直位移激励幅值将增大系统共振幅值、增加共振区域带宽.

2) 对该系统的单参分岔研究表明, 垂直位移激励幅值、激励频率、水平约束阻尼系数和三次方刚度系数等参数变化, 都将导致系统运动特性的改变, 这与传统单摆中的阻尼对运动过程无影响结论不同. 上述参量变化, 本质上改变了系统中的能量分布, 使得单摆系统发生倍周期分岔、倒倍周期分岔、周期运动和混沌运动等动力学行为.

3) 对系统在不同参量条件下的相轨迹和时间历程的分析, 表明方程 (6) 中的  $g_1$  相当于关联了系统摆长和运动周期的耦合项, 无论摆长还是运动周期使得系统能量降低, 系统都会通过参数  $g_1$  的耦合, 使得能量发生转换, 维持系统振动.

4) 对该系统的双参数域分岔研究表明, 通过

合适选择系统参数,可有效控制该系统的振动行为,并且通过参数的匹配优选能有效避免混沌的发生.进一步通过对系统吸引子、吸引域的分析,揭示了系统能量变化对运动形态的演化机理.

上述结论为受垂直激励和水平约束的单摆模型的工程应用提供重要理论依据,同时对实际工况下的减振抑振提供了理论参考.

## 参考文献

- [1] Wu Q X, Wang X K, Lin H, Xia M H 2020 *Mech. Syst. Signal Process.* **144** 106968
- [2] Ouyang H M, Tian Z, Yu L L, Zhang G M 2020 *J. Frankl. Inst.* **357** 8299
- [3] Lin B T, Zhang Q W, Fan F, Shen S Z 2020 *Appl. Math. Model.* **87** 606
- [4] Wu S T 2009 *J. Sound Vib.* **323** 1
- [5] Wang G, Hu H, Wu K, Li G, Wang L J 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 200702 (in Chinese) [王观, 胡华, 伍康, 李刚, 王力军 2016 物理学报 **65** 200702]
- [6] Matthews M R 1989 *Res. Sci. Educ.* **19** 187
- [7] Czolczynski K, Perlikowski P, Stefanski A, Kapitaniak T 2009 *Physica A* **388** 5013
- [8] Szumiński W, Woźniak D 2020 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **83** 105099
- [9] Náprstek J, Fischer C 2013 *Comput. Struct.* **124** 74
- [10] Han N, Cao Q J 2017 *Int. J. Mech. Sci.* **127** 91
- [11] Amer T S, Bek M A, Abohamer M K 2019 *Mech. Res. Commun.* **95** 23
- [12] Fang P, Hou Y J, Zhang L P, Du M J, Zhang M Y 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 014501 (in Chinese) [方潘, 侯勇俊, 张丽萍, 杜明俊, 张梦媛 2016 物理学报 **65** 014501]
- [13] Kapitaniak M, Perlikowski P, Kapitaniak T 2013 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **18** 2088
- [14] Xiao H, Tang J S, Liang C X 2009 *Acta Phys. Sin.* **58** 2989 (in Chinese) [萧寒, 唐驾时, 梁翠香 2009 物理学报 **58** 2989]
- [15] Zhang L J, Zhang H B, Li X Y 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 244302 (in Chinese) [张利娟, 张华彪, 李欣业 2018 物理学报 **67** 244302]
- [16] Bek M A, Amer T S, Sirwah M A, Awrejcewicz J, Arab A A 2020 *Results Phys.* **19** 103465
- [17] Butikov E I 2015 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **20** 298
- [18] Zhou L Q, Liu S S, Chen F Q 2017 *Chaos Solit. Fract.* **99** 270
- [19] Franco E, Astolfi A, Baena F R 2018 *Mech. Mach. Theory* **130** 539
- [20] Najdecka A, Kapitaniak T, Wiercigroch M 2015 *Int. J. Non-Linear Mech.* **70** 84
- [21] Stefanski A, Pikunov D, Balcerzak M, Dabrowski A 2020 *Int. J. Mech. Sci.* **173** 105454
- [22] Wijata A, Polczyński K, Awrejcewicz J 2021 *Mech. Syst. Signal Process.* **150** 107229
- [23] Kholostova O V 1995 *J. Appl. Maths. Mechs.* **59** 553
- [24] Jallouli A, Kacem N, Bouhaddi N. 2017 *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat.* **42** 1
- [25] Brzeski P, Perlikowski P, Yanchuk S, Kapitaniak T 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5347
- [26] Witz J A 1995 *Ocean Eng.* **22** 411
- [27] Peláez J, Andrés Y N 2005 *J. Guid. Control Dynam.* **28** 611
- [28] Li Y S, Yang M M, Sun H X, Liu Z M, Zhang Y 2018 *J. Intell. Robot. Syst.* **89** 485
- [29] Zheng Y J, Shen G X, Li Y G, Li M, Liu H M 2014 *J. Iron Steel Res. Int.* **21** 837
- [30] Kojima H, Fukatsu K, Trivailo P M 2015 *Acta Astronaut.* **106** 24
- [31] Shen G X, Li M 2009 *J. Mater. Process. Tech.* **209** 5002
- [32] Nayfeh A H 1983 *J. Sound Vib.* **88** 1
- [33] Golubitsky M, Schaeffer D G 1985 *Singularities and Groups in Bifurcation Theory* (Vol. I) (New York: Springer-Verlag) pp131–133

# Subharmonic resonance bifurcation and chaos of simple pendulum system with vertical excitation and horizontal constraint\*

Zhao Wu<sup>1)</sup> Zhang Hong-Bin<sup>1)†</sup> Sun Chao-Fan<sup>1)</sup>  
Huang Dan<sup>2)</sup> Fan Jun-Kai<sup>1)</sup>

1) (*School of Mechanical and Power Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China*)

2) (*School of Materials Science and Engineering, Henan Polytechnic University, Jiaozuo 454003, China*)

( Received 19 May 2021; revised manuscript received 31 July 2021 )

## Abstract

In order to improve the working performance and optimize the working parameters of the typical engineering pendulum of a typical system that it is abstracted as a physical simple pendulum model with vertical excitation and horizontal constraint. The dynamical equation of the system with vertical excitation and horizontal constraint is established by using Lagrange equation. The multiple-scale method is used to analyze the subharmonic response characteristics of the system. The amplitude-frequency response equation and the phase-frequency response equation are obtained through calculation. The effects of the system parameters on the amplitude resonance bandwidth and variability are clarified. According to the singularity theory and the universal unfolding theory, the bifurcation topology structure of the subharmonic resonance of the system is obtained. The Melnikov function is applied to the study of the critical conditions for the chaotic motion of the system. The parameter equation of homoclinic orbit motion is obtained through calculation. The threshold conditions of chaos in the sense of Smale are analyzed by solving the Melnikov function of the homoclinic motion orbit. The dynamic characteristics of the system, including single-parameter bifurcation, maximum Lyapunov exponent, bi-parameter bifurcation, and manifold transition in the attraction basin, are analyzed numerically. The results show that the main path of the system entering into the chaos is an almost period doubling bifurcation. Complex dynamical behaviors such as periodic motion, period doubling bifurcation and chaos are found. The bi-parameter matching areas of the subharmonic resonance bifurcation and chaos of the system are clarified. The results reveal the global characteristics of the system with vertical excitation and horizontal constraint, such as subharmonic resonance bifurcation, periodic attractor multiplication, and the coexistence of periodic and chaotic attractors. The results further clarify the mechanism of the influence of system parameters change on the movement form transformation, energy distribution and evolution law of the system. The mechanism of the influence of relevant parameters on the performance of the engineering system with vertical excitation and horizontal constraint is also obtained. The results of this research provide theoretical bases for adjusting the parameters of working performances of this typical physical system in engineering domain and the vibration reduction and suppression of the system in actual working conditions.

**Keywords:** simple pendulum, subharmonic resonance, bifurcation, chaos

**PACS:** 02.60.Cb, 05.45.-a

**DOI:** 10.7498/aps.70.20210953

\* Project supported by the Joint Funds of the National Natural Science Foundation of China (Grant No. U1604140), the Key Science and Technology Program of Henan Province, China (Grant Nos. 172102210269, 192102210052, 212102210108, 212102210004), the Major Achievements Cultivation Project of Henan Province, China (Grant No. NSFRF170503), and the Henan Polytechnic University Innovation Team Foundation, China (Grant No. T2019-5).

† Corresponding author. E-mail: [zhanghongbin2020@163.com](mailto:zhanghongbin2020@163.com)