



环面黑洞的热力学函数

管韵 王波波

Thermodynamic functions of toroidal black holes

Guan Yun Wang Bo-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 110401 (2022) DOI: 10.7498/aps.70.20212370

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20212370>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

洛伦兹破缺理论与Vaidya黑洞弯曲时空中的Dirac粒子隧穿辐射特征

Lorentz-violating theory and tunneling radiation characteristics of Dirac particles in curved spacetime of Vaidya black hole

物理学报. 2019, 68(19): 190401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190437>

非对易施瓦西黑洞的热力学及其量子修正

Thermodynamics and its quantum correction of non-commutative Schwarichild black hole

物理学报. 2019, 68(20): 200401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191054>

Kiselev黑洞的热力学性质和物质吸积特性

Thermodynamic properties and matter accretion properties of Kiselev black hole

物理学报. 2019, 68(6): 060402 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182055>

引力彩虹时空中Kerr黑洞的熵谱和面积谱

Entropy spectrum and area spectrum of Kerr black hole in gravity's rianbow

物理学报. 2018, 67(6): 060401 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172374>

临界中性Gauss-Bonnet-anti-de Sitter黑洞复杂度演化

Evolution of complexity for critical neutral Gauss-Bonnet-anti-de Sitter black holes

物理学报. 2021, 70(3): 030401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201286>

周期驱动系统的非平衡热输运与热力学几何

Nonequilibrium thermal transport and thermodynamic geometry in periodically driven systems

物理学报. 2021, 70(23): 230503 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211723>

环面黑洞的热力学函数

管韵¹⁾²⁾ 王波波^{1)†}

1) (北京交通大学理学院, 北京 100044)

2) (山东大学(威海)空间科学与物理学院, 威海 264209)

(2021年12月22日收到; 2022年1月24日收到修改稿)

本文把宇宙学常数看成与压强相当的动力学变量, 研究了环面黑洞的热力学函数. 计算得到环面黑洞的状态方程, 环面黑洞的 Smarr 关系. 然后通过计算其欧氏作用量得到了吉布斯函数, 并进一步求得环面黑洞的自由能、内能和热力学焓, 以及环面黑洞的定压热容和定容热容. 结果表明: 环面黑洞没有范德瓦耳斯型的相变. 环面黑洞的定压热容大于零, 定容热容等于零, 故是一个稳定的热力学系统.

关键词: 黑洞热力学, 环面黑洞, 扩展的相空间

PACS: 04.70.Dy, 04.70.-s

DOI: 10.7498/aps.70.20212370

1 引言

自 Bekenstein^[1,2] 发现黑洞动力学系统与热力学系统的相似性、霍金证明黑洞存在热辐射^[3] 以来, 黑洞热力学一直是理论研究的热点之一. 人们研究了史瓦西黑洞、Reissner-Nordstrom (RN) 黑洞以及 Kerr-Newman 黑洞的热辐射谱、温度以及黑洞熵.

求解带有宇宙学常数 λ 的爱因斯坦场方程, 可以得到 $\lambda > 0$ 的 de Sitter 黑洞 (如 Schwarzschild-de Sitter 黑洞, Reissner-Nordstrom-de Sitter 黑洞, Kerr-Newman-de Sitter 黑洞等) 和相应的 $\lambda < 0$ 的 Anti-de Sitter (AdS) 黑洞. 人们发现这些黑洞具有不为零的温度和熵, 是真实的热力学系统. 最初宇宙学常数 λ 是被当作一个常数 (参数) 引入的, 它不是一个动力学变量. 但是, 越来越多的研究表明, 在黑洞热力学中应该把 λ 看成是动力学变量^[4-10]. 主要原因为^[11]: 1) 人们可以考虑“更基本”的理论, 其中物理常数如规范耦合常数、牛顿引力常数或宇宙学常数不是先验固定的, 而是作为真空期望值出

现, 因此宇宙学常数 λ 应该可以变化; 2) 在宇宙学常数存在的情况下, 黑洞热力学第一定律变得与 Smarr 关系不一致 (标度论证不再有效), 除非在第一定律中包含宇宙学常数 λ 的变化; 3) 一旦将 λ 的变化包含在第一定律中, 黑洞质量就被确定为焓而不是内能. 也就是在一个扩展的相空间中应该把宇宙学常数 λ 当成热力学压强 $P = -\frac{\lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}$, 其中 AdS 半径 $l = \sqrt{\frac{3}{-\lambda}}$ (这里 $\lambda < 0$, 仅考虑 AdS 黑洞), 与压强共轭的变量就是黑洞的体积 V . 引入压强和体积这两个动力学 (热力学) 变量后, 其相空间增加了两个新的维度, 通常称其为扩展相空间. 例如, 带电的 AdS 黑洞的热力学第一定律在扩展相空间中的形式为^[12]

$$dM = TdS + VdP + \Phi dQ, \quad (1)$$

其中, M 为黑洞质量, T 为黑洞温度, Φ 是黑洞表面的电势, Q 是黑洞电荷量, $V = \frac{4\pi}{3} r_+^3$ 为黑洞的体积, 这里 r_+ 是该黑洞事件视界的半径. 文献 [12] 在扩展的相空间中研究了带电 AdS 黑洞的热力学性质, 求出了其热力学状态方程, 通过计算欧氏作用

† 通信作者. E-mail: bbwang@bjtu.edu.cn

量得到了吉布斯自由能 G , 并由此求得熵 S 、热容等热力学量.

通常人们研究比较多的黑洞, 比如史瓦西黑洞、RN 黑洞以及 Kerr-Newman 黑洞等, 它们的时间坐标 t 为常数和径向坐标 r 为常数的曲面的拓扑为 S^2 . 而环面黑洞相应的曲面拓扑为 $S^1 \times S^1$ (见第 2 节的简介). 人们研究发现, 与通常的黑洞一样, 环面黑洞也是一个热力学系统, 具有温度和熵^[13,14]. 据我们所知, 还没有人将宇宙学常数当成动力学变量来研究环面黑洞. 也还没有人求出环面黑洞熵和温度之外的热力学函数. 本文研究的问题是: 1) 环面黑洞是不是与带电的 AdS 黑洞一样, 具有范德瓦耳斯型的相变; 2) 求出环面黑洞的热力学状态方程、以及其他热力学函数.

本文利用扩展相空间, 求得环面黑洞的状态方程、欧氏作用量以及吉布斯自由能. 再利用基本热力学函数公式, 求得环面黑洞的自由能、内能、焓以及定压热容和定容热容. 第 2 节将简单介绍环面黑洞的基本性质; 第 3 节求环面黑洞的状态方程, 以及热力学第一定律; 第 4 节推导环面黑洞的 Smarr 关系; 第 5 节计算环面黑洞的欧氏作用量; 第 6 节计算吉布斯自由能等热力学函数, 以及定压和定容热容; 最后第 7 节是总结和讨论.

2 环面黑洞的基本性质

带宇宙常数 λ 的爱因斯坦场方程有一个平面对称解^[15,16],

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + d\phi^2), \quad (2)$$

其中

$$f(r) = -\frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{a}{r} + \frac{b^2}{r^2}. \quad (3)$$

可以通过认同的方式将 (2) 式转化为环面黑洞解^[16]. 分别认同 $\theta = 0, 2\sqrt{\pi}$ 以及 $\phi = 0, 2\sqrt{\pi}$ ^①, 得到一个环面时空解^[13], 其 $t = \text{常数}$ 和 $r = \text{常数}$ 的曲面是一个环面, 拓扑为 $S^1 \times S^1$. 利用高斯定理可得 $b = Q$; 计算 ADM 质量 M , 得 $M = a/2$. 可以把 (2) 式和 (3) 式重新表示为

$$ds^2 = -f(r)dt^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + d\phi^2), \quad (4)$$

$$f(r) = -\frac{1}{3}\lambda r^2 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}, \quad (5)$$

其中, $\theta \in [0, 2\sqrt{\pi}]$, $\phi \in [0, 2\sqrt{\pi}]$. 对于负宇宙常数 ($\lambda < 0$), 当 $0 < Q^2 < \frac{3}{4}\sqrt{\frac{12M^4}{|\lambda|}}$ 时, $f(r) = 0$ 有两个正根, r_+ 和 r_- (假设 $r_- < r_+$). 此时, (4) 式和 (5) 式表示一个环面黑洞, 称 $r = r_-$ 是一个柯西视界, 而 $r = r_+$ 为事件视界. 对于负宇宙常数, 可以引入特征长度 l , 把宇宙常数记为 $\lambda = -3/l^2$. 环面时空中的电磁场张量为

$$F = dA, \quad (6)$$

其中 A 为规范势,

$$A = -2\frac{Q}{r}dt. \quad (7)$$

3 环面黑洞的状态方程与黑洞热力学第一定律

与球对称黑洞相同, 环面黑洞的温度 T 也正比于黑洞视界的表面引力 κ , 即黑洞温度为

$$T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad (8)$$

表面重力的计算公式为^[17]

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla^a \xi^b)(\nabla_c \xi_d) = -\frac{1}{2}g_{ac}g_{bd}(\nabla^a \xi^b)(\nabla^c \xi^d), \quad (9)$$

其中 g_{ac} 为时空的度规张量, $\xi^b = \left(\frac{\partial}{\partial t}\right)^b$ 为类时 Killing 矢量. 将 (4) 式的度规代入, 直接计算得

$$\kappa = \frac{1}{2} \left(\frac{df}{dr} \right)_{r=r_+} = -\frac{\lambda}{3}r_+ + \frac{M}{r_+^2} - \frac{Q^2}{r_+^3}. \quad (10)$$

于是环面黑洞的温度为

$$T = -\frac{\lambda}{6}r_+ + \frac{M}{2r_+^2} - \frac{Q^2}{2r_+^3} = \frac{1}{4\pi r_+} \left(-\lambda r_+^2 - \frac{Q^2}{r_+^2} \right). \quad (11)$$

计算 (11) 式应用了 $f(r_+) = 0$, 即

$$M = \frac{r_+}{2} \left(-\frac{1}{3}\lambda r_+^2 + \frac{Q^2}{r_+^2} \right). \quad (12)$$

第 1 节提到, 人们认定 AdS 黑洞的热力学压强 P 与宇宙常数 λ 的关系是

$$P = -\frac{1}{8\pi}\lambda = \frac{3}{8\pi l^2}. \quad (13)$$

类似地, 在研究环面黑洞热力学性质时, 也应该考

① 文献 [16] 是认同 $\theta = 0$ 和 $\theta = 2\pi$ 以及 $\phi = 0$ 和 $\phi = 2\pi$, 与本文采用的认同方式没有本质区别.

考虑 λ 的变化, 并且压强与宇宙常数的关系依然如 (13) 式所示. 与压强共轭的热力学量是环面黑洞的体积, 即

$$V = \frac{4\pi}{3} r_+^3, \quad (14)$$

可将 (11) 式改写为

$$P = \frac{T}{2r_+} + \frac{Q^2}{8\pi r_+^4}, \quad (15)$$

其中 $r_+ = \left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{1/3}$, V 是黑洞的热力学体积, T 是黑洞的温度, Q 是总电量. 这里将黑洞的总电量 Q 视为常数, 而非热力学变量.

在球对称 AdS 黑洞中, 研究黑洞相变时常采用比体积 $v = 2r_+$, 而不是体积 V 来表示状态方程. 改用比体积 v , 则 (15) 式可改写为

$$P = \frac{T}{v} + \frac{2Q^2}{\pi v^4}. \quad (16)$$

将比体积 v 视为自变量, 在等温条件下, 压强 P 单调递减, 故不存在相变临界点, 环面黑洞不具有范德瓦耳斯型的相变. 环面黑洞的等温曲线如图 1 所示. 可以看到, 当比体积 v 增加时, 压强 P 单调下降. 从上到下 3 条曲线对应的温度分别是 $T = 50, 25, 1$, 其中电荷 $Q = 1$.

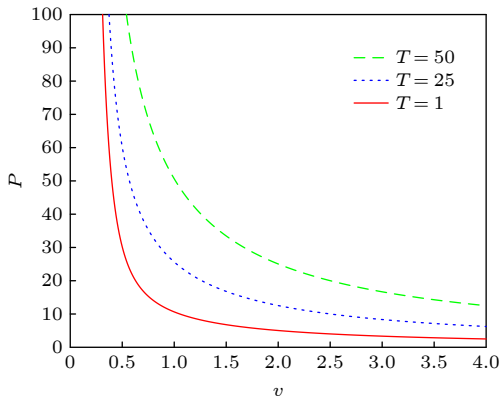


图 1 环面黑洞的等温图

Fig. 1. Isotherm of toroidal black hole.

将黑洞质量 M 看成是黑洞视界面积 A 、压强 P 和电量 Q 的函数, (12) 式可以改写为

$$M = M(A, P, Q) = \frac{4\pi}{3} P \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{\frac{3}{2}} + \frac{Q^2}{2} \left(\frac{A}{4\pi}\right)^{-\frac{1}{2}}. \quad (17)$$

质量 M 的全微分可以表示为

$$dM = \left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)_{P,Q} dA + \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{A,Q} dP + \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{A,P} dQ, \quad (18)$$

即

$$dM = TdS + VdP + \Phi dQ, \quad (19)$$

其中

$$T = 4 \left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)_{P,Q} = 4 \left(\frac{P}{2} r_+ - \frac{Q^2}{16\pi r_+^3}\right); \quad (20)$$

$$V = \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{A,Q} = \frac{4\pi}{3} r_+^3; \quad (21)$$

$$\Phi = \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{A,P} = \frac{Q}{r_+}. \quad (22)$$

(19) 式就是环面黑洞的热力学第一定律.

4 环面黑洞的 Smarr 关系

利用齐次函数的欧拉定理, 可以方便地得到环面黑洞的 Smarr 关系. 加权齐次函数的欧拉定理 (Euler's theorem on weighted homogeneous functions), 即若多元函数 $f(x, y, z)$ 满足标度关系 (scaling relation):

$$f(t^p x, t^q y, t^r z) = t^s f(x, y, z), \quad (23)$$

则该函数及其偏微分满足

$$px \frac{\partial f}{\partial x} + qy \frac{\partial f}{\partial y} + rz \frac{\partial f}{\partial z} = sf(x, y, z), \quad (24)$$

(24) 式的证明参见附录 A.

为了利用欧拉公式确定 Smarr 关系, 需要用到标度论证方法 [5,18,19]. 环面黑洞的度规表达式 (5) 式采用的是自然单位制, 把长度的量纲记为 L , 可以看出: 宇宙学常数 λ 的量纲是 L^{-2} , 质量 M 和电量 Q 的量纲均是 L . 另外, 黑洞事件视界面积 $A = 4\pi r_+^2$ 的量纲是 L^2 . 也就是对于一个长度标度 l , 有

$$A \propto l^2, P \propto \lambda \propto l^{-2}, M \propto l, Q \propto l. \quad (25)$$

把质量 M 看成是事件视界面积 A 、压强 P 以及电量 Q 的函数, $M = M(A, P, Q)$, 利用上述欧拉定理, 得

$$M = 2 \left(\frac{\partial M}{\partial A}\right)_{P,Q} A - 2 \left(\frac{\partial M}{\partial P}\right)_{A,Q} P + \left(\frac{\partial M}{\partial Q}\right)_{A,P} Q. \quad (26)$$

将 (20) 式—(22) 式中的 3 个偏导数代入, 得到环面黑洞的 Smarr 关系

$$M = 2(TS - VP) + \Phi Q. \quad (27)$$

5 环面黑洞的欧氏作用量

欧氏作用量能给出不同系综的热力学势, 而不同的系综与边界条件的选取有关^[11]. 计算欧氏作用量通常会得到一个发散的结果, 为了消除这个发散, 可以减去一个适当的背景时空的欧氏作用量. 有不同的选取背景时空的方法, 不同的选择会导致不同的结果. 我们采用 Caldarelli 等^[4]的方法计算欧氏作用量.

对环面时空线元 (4) 式的时间坐标做变换 $t \rightarrow i\tau$, 得其欧氏度规的线元,

$$ds^2 = f(r)d\tau^2 + f(r)^{-1}dr^2 + r^2(d\theta^2 + d\phi^2), \quad (28)$$

其中函数 $f(r)$ 依然为 (5) 式表示.

欧氏作用量由三部分组成:

$$I_E = I_{\text{bulk}} + I_s + I_{\text{ct}}, \quad (29)$$

其中, I_{bulk} 为 bulk 作用量; I_s 为作用量的表面项, 是在一个超曲面上积分; I_{ct} 称为欧氏作用量的补偿项, 又称背景时空项, 是为了消除作用量的发散而引入的. 作用量的 bulk 项为^[4]

$$I_{\text{bulk}} = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{g} \left(F^2 + \frac{6}{l^2} \right), \quad (30)$$

(30) 式采用了 $G = 1$ 的单位制, 其中二形式 (2-form) 的电磁张量为

$$F = dA, \quad (31)$$

这里

$$A = -2\frac{Q}{r}d\tau. \quad (32)$$

由此可得电磁张量的非零分量为

$$F_{10} = -F_{01} = \frac{Q}{r^2}, \quad (33)$$

直接计算得

$$F^2 = g^{\alpha\mu}g^{\beta\nu}F_{\alpha\beta}F_{\mu\nu} = 2\frac{Q^2}{r^4}. \quad (34)$$

将 (34) 式代入 (30) 式, 坐标 τ 的积分从 $0 \rightarrow \beta$ (β 为温度的倒数); 坐标 r 的积分从事件视界表面 $r_+ \rightarrow \infty$ (由于积分发散, 暂时记积分上限为 r , 最后取极限 $r \rightarrow \infty$), 而两个角度积分均从 $0 \rightarrow 2\sqrt{\pi}$,

具体计算得

$$\begin{aligned} I_{\text{bulk}} &= \frac{1}{16\pi} \int_0^\beta d\tau \int_{r_+}^r dr \int_0^{2\sqrt{\pi}} d\theta \\ &\quad \times \int_0^{2\sqrt{\pi}} d\phi r^2 \left(2\frac{Q^2}{r^2} + \frac{6}{l^2} \right) \\ &= \frac{1}{2}\beta \left[\frac{Q^2}{r_+} + \frac{1}{l^2} (r^3 - r_+^3) \right]. \end{aligned} \quad (35)$$

作用量的表面项为^[4]

$$I_s = -\frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} K - \frac{1}{4\pi} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} n_a F^{ab} A_b, \quad (36)$$

其中标量外曲率

$$K = h^{ab} K_{ab}, \quad (37)$$

这里 K_{ab} 是 $r = \text{常数}$ 的超曲面的外曲率. h_{ab} 为该超曲面的度规, 可具体表示为

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 \end{pmatrix}. \quad (38)$$

由此得

$$\sqrt{h} = \sqrt{f(r)} r^2. \quad (39)$$

超曲面度规的逆变分量为

$$h^{ab} = \begin{pmatrix} f(r)^{-1} & 0 & 0 \\ 0 & r^{-2} & 0 \\ 0 & 0 & r^{-2} \end{pmatrix}. \quad (40)$$

外曲率定义为

$$K_{ab} = h_a^c h_b^d \nabla_c n_d, \quad (41)$$

其中超曲面的法余矢

$$n_a = g_{ab} n^b, \quad (42)$$

这里

$$n^a = \sqrt{f(r)} \left(\frac{\partial}{\partial r} \right)^a \quad (43)$$

是该超曲面的法矢量. 直接计算得到:

$$K = \frac{1}{2\sqrt{f(r)}} \frac{\partial f(r)}{\partial r} + \frac{2}{r} \sqrt{f(r)}. \quad (44)$$

另外, 由 (32) 式、(33) 式, 以及 (43) 式可得

$$n_a F^{ab} A_b = n_1 F_{10} A_0 = -\frac{2Q^2}{r^3 \sqrt{f(r)}}. \quad (45)$$

将 (44) 式和 (45) 式代入 (36) 式, 得

$$I_s = \frac{3}{2} M \beta - \frac{3}{2l^2} r^3 \beta. \quad (46)$$

当 $r \rightarrow \infty$ 时, 分别从 (35) 式和 (46) 式可以看到, I_{bulk} 和 I_s 均发散. 采用 Caldarelli 等^[4] 的方案来消除发散, 即采用下面的补偿项:

$$I_{\text{ct}} = \frac{1}{8\pi} \int_{\partial M} d^3x \sqrt{h} \left[\frac{2}{l} + \frac{l}{2} \mathcal{R} - \frac{l^3}{2} \left(\mathcal{R}_{ab} \mathcal{R}^{ab} - \frac{3}{8} \mathcal{R}^2 \right) \right], \quad (47)$$

其中 \mathcal{R}_{ab} 为该超曲面的里奇张量, $\mathcal{R} = h^{ab} \mathcal{R}_{ab}$ 为里奇标量曲率. 对于 (28) 式的度规, $\mathcal{R} = 0$, $\mathcal{R}_{ab} = 0$. 计算 (47) 式, 得

$$I_{\text{ct}} = \frac{\beta}{l} \sqrt{f(r)} r^2. \quad (48)$$

注意到当 $r \rightarrow \infty$ 时,

$$\begin{aligned} \sqrt{f(r)} &= \frac{r}{l} \left(1 - \frac{2Ml^2}{r^3} + \frac{Q^2 l^2}{r^4} \right)^{1/2} \\ &\approx \frac{r}{l} \left(1 - \frac{Ml^2}{r^3} \right), \end{aligned} \quad (49)$$

所以

$$I_{\text{ct}} = \frac{\beta}{l^2} (r^3 - Ml^2). \quad (50)$$

最后, 将作用量的 bulk 项 (35) 式、表面项 (46) 式以及补偿项 (50) 式代入 (29) 式, 得环面黑洞的欧氏作用量

$$I_E = \frac{1}{2} \beta \left(\frac{Q^2}{r_+} - \frac{r_+^3}{l^2} \right) + \frac{1}{2} M \beta. \quad (51)$$

将质量表示式 (12) 式代入 (51) 式, 得

$$I_E = -\frac{\beta}{4l^2} \left(r_+^3 - \frac{3Q^2 l^2}{r_+} \right). \quad (52)$$

6 环面黑洞的热力学函数

第 5 节计算欧氏作用量所取的边界条件相当于采用了正则系综, 故系统的吉布斯自由能^[4] 为 $G = I_E/\beta$. 将 (52) 式代入 (51) 式, 得环面黑洞的吉布斯自由能为

$$G = G(T, P) = -\frac{2\pi}{3} r_+^3 P + \frac{3Q^2}{4r_+}, \quad (53)$$

这里, r_+ 应该理解为压强和温度的函数, 即 $r_+ = r_+(P, T)$, 正如 (15) 式所示. 吉布斯自由能与温度 T 、压强 P 的关系如图 2 所示, 图中没有范德瓦耳斯型的燕尾形状 (swallowtail behaviour), 这也说明环面黑洞没有范德瓦耳斯形式的相变.

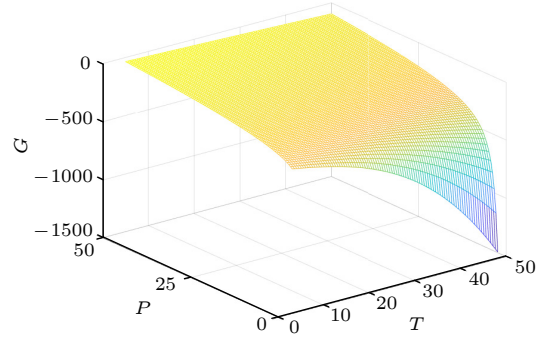


图 2 环面黑洞吉布斯函数

Fig. 2. Gibbs function of toroidal black hole.

吉布斯自由能的微分可表示为

$$dG = -SdT + VdP, \quad (54)$$

其中, 熵为

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,Q}; \quad (55)$$

体积为

$$V = \left(\frac{\partial G}{\partial P} \right)_{T,Q}. \quad (56)$$

将吉布斯函数 (53) 式代入 (55) 式, 并利用状态方程 (15) 式, 可以得到

$$S = - \left(\frac{\partial G}{\partial T} \right)_{P,Q} = \pi r_+^2, \quad (57)$$

这个结果与其他方法得到的熵的表示式相同.

环面黑洞的定压热容为

$$C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,Q} = \frac{2\pi^2 r_+^5 T}{Q^2 + \pi T r_+^3} > 0, \quad (58)$$

而定容热容定义为 $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,Q}$. 由于熵 $S = \pi r_+^2$, 而保持体积 V 不变就是保持 r_+ 不变, 故

$$C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,Q} = 0. \quad (59)$$

由此可见, 环面黑洞是一个稳定的热力学系统.

有了吉布斯函数, 其他热力学函数也可以容易地求得. 例如, 自由能

$$F = F(T, V) = G - PV = -\pi r_+^2 T + \frac{Q^2}{2r_+}, \quad (60)$$

其中 $V = \frac{4}{3} \pi r_+^3$. 环面黑洞的内能为

$$U = U(S, V) = G + TS - PV = \frac{Q^2}{2r_+}. \quad (61)$$

由此可见, 内能是 r_+ (或体积 V) 的单值函数. 环面

黑洞的焓为

$$H = H(S, P) = U + PV = \frac{2Q^2}{3r_+} + \frac{2}{3}\pi r_+^2 T. \quad (62)$$

7 结 论

本文将宇宙学常数视作变量, 在扩展的相空间中研究了环面黑洞的热力学性质. 这个扩展的相空间是在原有的相空间上增加了压强 P 和体积 V 这一对热力学共轭量. 压强 $P = -\frac{\lambda}{8\pi} = \frac{3}{8\pi l^2}$, 体积 $V = \frac{4\pi}{3}r_+^3$, 这里 r_+ 是环面黑洞的事件视界半径. 本文求得环面黑洞的状态方程、Smarr 关系, 以及环面黑洞的欧氏作用量、吉布斯自由能 (吉布斯函数) G 、自由能 F 、内能 U 和焓 H 、定压热容和定容热容. 我们注意到环面黑洞的 Smarr 关系 (27) 式与带电 AdS 黑洞的 Smarr 关系相同^[12].

从状态方程 (16) 式以及吉布斯函数 (53) 式可以看出, 环面黑洞没有范德瓦耳斯型的相变. 如图 1 的等温线所示, 压强 P 随比体积 v 单调下降, 没有范德瓦耳斯等温线那样的一个极小值和一个极大值, 所以不会有范德瓦耳斯型的相变发生. 另外, 图 2 绘制的吉布斯函数曲面, 也没有范德瓦耳斯相变的燕尾形状, 也说明没有范德瓦耳斯型形变.

环面黑洞的定压热容 $C_P = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{P,Q} = \frac{2\pi^2 r_+^5 T}{Q^2 + \pi T r_+^3} > 0$, 这表明压强一定时, 吸收热量会导致环面黑洞升温. 由此来看, 环面黑洞是正常的热力学系统. 定容热容 $C_V = T \left(\frac{\partial S}{\partial T} \right)_{V,Q} = 0$, 说明体积一定时, 不论吸热还是放热其温度都保持不变. 热容的性质说明环面黑洞是一个稳定的热力学系统.

有必要把环面黑洞与带电 AdS 黑洞做个比较. 它们的热力学第一定律以及 Smarr 关系相同, 但其状态方程不一样. 另外, 二者除了熵函数的形式

($S = \pi r_+^2$) 相同外, 其他热力学函数形式都不一样. 这说明时空拓扑结构影响黑洞的热力学性质.

附录A 加权齐次函数欧拉定理的证明

若 $f(x, y, z)$ 满足

$$f(t^p x, t^q y, t^r z) = t^s f(x, y, z), \quad (A1)$$

则称 $f(x, y, z)$ 为加权齐次函数. 令 $x' = t^p x$, $y' = t^q y$, $z' = t^r z$. (A1) 式两边对 t 求导数, 得

$$pt^{p-1}x \frac{\partial f}{\partial x'} + qt^{q-1}y \frac{\partial f}{\partial y'} + rt^{r-1}z \frac{\partial f}{\partial z'} = st^{s-1}f(x, y, z). \quad (A2)$$

(A2) 式中令 $t = 1$, 则得到

$$px \frac{\partial f}{\partial x} + qy \frac{\partial f}{\partial y} + rz \frac{\partial f}{\partial z} = sf(x, y, z). \quad (A3)$$

这正是加权齐次函数欧拉定理. 证毕.

参考文献

- [1] Bekenstein J D 1973 *Phys. Rev. D* **7** 2333
- [2] Bekenstein J D 1974 *Phys. Rev. D* **9** 3292
- [3] Hawking S W 1975 *Commun. Math. Phys.* **43** 199
- [4] Caldarella M M, Cognola G, Klemm D 2000 *Class. Quantum Grav.* **17** 399
- [5] Kastor D, Ray S, Traschen J 2009 *Class. Quantum Grav.* **26** 195011
- [6] Dolan B P 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 125020
- [7] Dolan B P 2011 *Class. Quantum Grav.* **28** 235017
- [8] Dolan B P 2011 *Phys. Rev. D* **84** 127503
- [9] Cvetič M, Gibbons G W, Kubizňák D, Pope C N 2011 *Phys. Rev. D* **84** 024037
- [10] Lu H, Pang Y, Pope C N, et al. 2012 *Phys. Rev. D* **86** 044011
- [11] Gibbons G W, Hawking S W 1977 *Phys. Rev. D* **15** 2752
- [12] Kubizňák D, Mann R B 2012 *JHEP* **7** 1
- [13] Wang B B 2004 *Gen. Relat. Gravit.* **36** 735
- [14] Wang B B 2008 *Chin. Phys. B* **17** 467
- [15] Goenner H, Stachel J 1970 *J. Math. Phys.* **11** 3358
- [16] Huang C G, Liang C B 1995 *Phys. Lett. A* **201** 27
- [17] Liang C B, Zhou B 2009 *Introduction to Differential Geometry and General Relativity* (Vol. 2) (2nd Ed.) (Beijing: Science Press) p116 (in Chinese) [梁彬彬, 周彬 2009 微分几何入门与广义相对论(下册) 第二版 (北京: 科学出版社) 第116页]
- [18] Gauntlett J P, Myers R C, Townsend P K 1999 *Class. Quant. Grav.* **16** 1
- [19] Townsend P. K. and Zamaklar M. 2001 *Class. Quant. Grav.* **18** 5269

Thermodynamic functions of toroidal black holes

Guan Yun¹⁾²⁾ Wang Bo-Bo^{1)†}

1) (*School of Science, Beijing Jiaotong University, Beijing 100044, China*)

2) (*School of Space Science and Physics, Shandong University, Weihai 264209, China*)

(Received 22 December 2021; revised manuscript received 24 January 2022)

Abstract

The thermodynamic functions of toroidal black holes are investigated in this paper by taking the cosmological constant as a dynamic variable equivalent to the pressure. The equation of state and the Smarr relation of a toroidal black hole are given. Then, the Gibbs function is obtained by calculating the Euclidian action. Further we study other thermodynamic functions of the toroidal black hole, such as free energy, internal energy, and thermodynamic enthalpy. The heat capacity of the toroidal black hole at constant pressure and constant volume is obtained. The results show that toroidal black holes have no van der Waals type phase transition. Toroidal black hole is a stable thermodynamic system because its heat capacity at constant pressure is greater than zero and its heat capacity at constant volume is equal to zero.

Keywords: black hole thermodynamics, toroidal black holes, extended phase space

PACS: 04.70.Dy, 04.70.-s

DOI: [10.7498/aps.70.20212370](https://doi.org/10.7498/aps.70.20212370)

† Corresponding author. E-mail: bbwang@bjtu.edu.cn