



## 一维晶格中全同任意子的量子动力学与关联

王利 贾丽芳 张云波

### Quantum dynamics and correlations of indistinguishable anyons in one-dimensional lattices

Wang Li Jia Li-Fang Zhang Yun-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 130501 (2022) DOI: 10.7498/aps.70.20220188

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220188>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 基于置换群的多粒子环上量子行走的反馈搜索算法

Feedback search algorithm for multi-particle quantum walks over a ring based on permutation groups

物理学报. 2022, 71(3): 030201 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211000>

#### 随机纵场对一维量子Ising模型动力学性质的影响

Effects of random longitudinal magnetic field on dynamics of one-dimensional quantum Ising model

物理学报. 2021, 70(19): 197501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210631>

#### 格点量子色动力学蒸馏算法中关联函数的计算优化

Calculation and optimization of correlation function in distillation method of lattice quantum chromodynamics

物理学报. 2021, 70(16): 161201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210030>

#### 级联环境下三量子比特量子关联动力学研究

Dynamics of quantum correlation for three qubits in hierarchical environment

物理学报. 2021, 70(10): 100301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202133>

#### 单量子点光谱与激子动力学研究进展

Research progress of single quantum-dot spectroscopy and exciton dynamics

物理学报. 2022, 71(6): 067802 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212050>

#### 两次淬灭下横场中XY链的动力学量子相变

Dynamical quantum phase transitions in transverse field XY chain after a double quench

物理学报. 2021, 70(18): 180502 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210728>

## 一维晶格中全同任意子的量子动力学与关联\*

王利<sup>1)†</sup> 贾丽芳<sup>1)</sup> 张云波<sup>2)</sup>

1) (山西大学, 理论物理研究所, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

2) (浙江理工大学理学院物理系, 光场操控省重点实验室, 杭州 310018)

(2022年1月26日收到; 2022年2月25日收到修改稿)

任意子介于玻色子与费米子之间, 遵从奇特的分数统计, 隐含着许多有趣的物理特性. 本文研究了一维晶格中相互作用全同任意子的少体量子动力学及其量子关联性质. 基于严格的数值方法, 分析了任意子在晶格中局域粒子密度分布的动力学演化过程. 结果表明, 分数统计可以明显影响任意子动力学演化过程中实空间的局域粒子密度分布, 产生新的动力学结构. 特别地, 当存在相互作用时, 分数统计粒子的局域粒子密度分布会呈现有趣的依赖于相互作用性质的不对称性. 最后计算了任意子的密度密度关联, 分析了粒子统计性质和相互作用对体系量子关联的调制, 同时进一步证实了任意子分数统计在实空间中的动力学效应.

**关键词:** 全同任意子, 分数统计, 多粒子量子行走, 动力学不对称性**PACS:** 05.30.Pr, 05.40.Fb, 37.10.Jk**DOI:** 10.7498/aps.70.20220188

## 1 引言

量子行走<sup>[1,2,3]</sup>是经典随机行走的量子力学拓展, 是当前物理学前沿重要的研究课题. 目前, 物理学家已经在许多重要的实验平台中实现和观测了量子行走<sup>[4]</sup>, 如超冷原子系统<sup>[5,6]</sup>、单光子系统<sup>[7,8]</sup>、超导量子比特系统<sup>[9-11]</sup>、耦合光波导系统<sup>[12]</sup>、核磁共振系统<sup>[13]</sup>、囚禁离子系统<sup>[14]</sup>等. 量子行走以其系统的简洁性与物理的深刻性, 吸引了当今物理学家广泛的研究兴趣, 现在已经逐渐成长为极为重要的研究和模拟少体量子动力学的理论框架和实验平台. 除了在量子搜索算法设计<sup>[15]</sup>、量子计算<sup>[16]</sup>、量子信息<sup>[17,18]</sup>等方面具有巨大的应用潜力之外, 它已经在方方面面展示了自己的独特物理价值, 如可以用来探测拓扑态<sup>[19,20]</sup>, 可以用来实验观测非布洛赫拓扑不变量<sup>[21]</sup>, 还可以用于精密测量<sup>[22,23]</sup>等. 此外, 国内外研究人员还考察了无序<sup>[24,25]</sup>、缺陷<sup>[26]</sup>、

量子统计<sup>[27,28]</sup>, 相互作用<sup>[29-32]</sup>以及跃迁调制<sup>[33-35]</sup>等基本物理因素在量子行走动力学中的新奇效应.

目前, 有关量子行走的研究工作大多专注于单粒子或两粒子系统. 最近有工作基于量子行走框架分别研究了三个玻色子和三个费米子的非平衡动力学<sup>[36]</sup>. 相比于两体系统, 三体系统有望展示出量子多体效应, 因此该工作将量子行走相关研究推进到了真正的量子多体范畴. 在此基础上, 本文进一步基于三粒子量子行走研究全同任意子的量子动力学性质. 任意子是玻色子、费米子的统计学推广<sup>[37-39]</sup>. 众所周知, 当交换两个费米子时, 量子多体波函数会出现一个负号, 而交换两个玻色子时, 波函数则不变号. 任意子则对应更一般的情形, 当两个任意子交换时, 量子多体波函数会产生一个分数相位因子  $\exp(i\chi\pi)$ . 容易看出: 当  $\chi = 0$  时, 对应玻色统计; 当  $\chi = 1$  时, 对应费米统计; 当  $0 < \chi < 1$  时, 则对应奇特的任意子分数统计. 任意子不是凭空想象, 它具有真实的物理对应, 如分数量子霍尔

\* 国家自然科学基金(批准号: 11404199, 12147215, 12074340)和山西省自然科学基金(批准号: 2015021012, 1331KSC)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: liwangiphy@sxu.edu.cn

态表面激发的准粒子就是一种任意子<sup>[40]</sup>, 最近也有新的实验对任意子进行了观测<sup>[41,42]</sup>. 分数统计还是拓扑量子计算的决定性基础<sup>[43]</sup>. 然而分数统计的深刻物理内涵仍待广泛和深入的挖掘研究. 本文基于量子行走框架, 研究了分数统计对任意子少体量子动力学的影响, 并进一步研究了分数统计与相互作用的竞争合作导致的综合物理效应. 最后, 计算并分析了三任意子量子态演化过程中的密度密度关联性质.

## 2 理论模型与研究方法

处于一维晶格中的全同任意子, 在紧束缚近似下可由如下 Anyon-Hubbard 模型哈密顿量描述:

$$\hat{H}^a = -J \sum_l \left( \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_{l+1} + \text{h.c.} \right) + \frac{U}{2} \sum_l \hat{n}_l (\hat{n}_l - 1), \quad (1)$$

其中  $J$  是最近邻格点间跃迁振幅, 在进行数值模拟时通常取为能量单位;  $U$  是同一格点上粒子间的相互作用强度;  $\hat{a}_l^\dagger$  ( $\hat{a}_l$ ) 是任意子在  $l$  格点上的产生 (湮灭) 算符;  $\hat{n}_l = \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l$  是任意子的粒子数算符.

对一维系统, 不同格点  $l, k$  上的任意子产生湮灭算符满足如下广义对易关系:

$$\begin{aligned} \hat{a}_l \hat{a}_k^\dagger &= e^{-i\chi\pi\varepsilon(l-k)} \hat{a}_k \hat{a}_l^\dagger, \\ \hat{a}_l \hat{a}_k &= e^{i\chi\pi\varepsilon(l-k)} \hat{a}_k \hat{a}_l, \end{aligned} \quad (2)$$

式中  $\chi$  是表征全同粒子统计性质的统计参数;  $\varepsilon(x)$  表示符号函数, 根据  $x$  是正数、负数还是零三种情况分别给出值 1, -1, 0. 由 (2) 式的广义对易关系可知, 当  $\chi = 0$  时, 产生湮灭算符就是玻色子算符, 当  $\chi = 1$  时, 产生湮灭算符就是费米子算符. 在这二者之间, 当  $0 < \chi < 1$  时, 则对应满足分数统计的粒子. 对于同一格点上的对易关系, 存在两种定义方式<sup>[44-46]</sup>, 这里采用与文献<sup>[44, 45]</sup>一致的做法, 即  $[\hat{a}_l, \hat{a}_l^\dagger] = 1$ . 这表明, 当粒子在同一个格点上时, 粒子的行为等同于玻色子. 在此定义下, 当  $\chi$  减少到零时, 任意子可以平顺地回到玻色子极限. 而当  $\chi$  增加至 1 时, 任意子过渡到费米子极限<sup>[47,48]</sup>: 不同格点间满足反对易关系, 但同一格点上为玻色对易关系.

进一步, 借助于 fractional Jordan-Wigner 变换,

$$\hat{a}_l = \hat{b}_l \exp \left( -i\chi\pi \sum_{k<l} \hat{n}_k \right), \quad (3)$$

Anyon-Hubbard 模型 (1) 式可以严格映射为一个玻色型的哈密顿量:

$$\begin{aligned} \hat{H}^b &= -J \sum_l \left( \hat{b}_l^\dagger e^{-i\chi\pi\hat{n}_l} \hat{b}_{l+1} + \text{h.c.} \right) \\ &+ \frac{U}{2} \sum_l \hat{n}_l (\hat{n}_l - 1), \end{aligned} \quad (4)$$

其中,  $\hat{b}_l^\dagger$  ( $\hat{b}_l$ ) 是玻色子产生 (湮灭) 算符. 由 (4) 式可知, 当粒子从格点  $l+1$  跃迁至格点  $l$  时, 会产生一个依赖于格点上粒子占据数的相位因子  $\exp(-i\chi\pi\hat{n}_l)$ . 基于以上严格的映射, 有研究给出了抽象的任意子在光晶格中的实验模拟方案<sup>[47,48]</sup>. 本文的研究正是基于以上与实验紧密联系的哈密顿量 (4) 式展开. 我们采用严格的 TEBD (time-evolving block decimation)<sup>[49]</sup> 数值方法研究了全同任意子的少体量子动力学. 为刻画任意子的少体量子动力学特征, 计算了任意子在一维晶格上的局域密度分布  $n_l(t)$  随时间的演化, 其中

$$n_l(t) = \langle \psi(t) | \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_l | \psi(t) \rangle. \quad (5)$$

此外, 研究了任意子量子态在时间演化过程中的关联性质, 数值计算了任意子的两体关联函数, 也即密度密度关联函数, 其具体表达式为

$$\Gamma_{lk}(t) = \langle \psi(t) | \hat{a}_l^\dagger \hat{a}_k^\dagger \hat{a}_k \hat{a}_l | \psi(t) \rangle. \quad (6)$$

本文着重围绕三粒子量子初态  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$  展开具体研究和分析. 该量子初态中, 三个任意子彼此紧挨, 粒子间彼此影响最强<sup>[6,36]</sup>, 因而上述密度依赖的跃迁过程的物理效应最明显, 能够更好地观测全同粒子分数统计因子在少体量子动力学过程中的物理效应. 此外, 本文针对一些不同的量子初态进行了数值模拟. 研究发现, 数值结果中展示的关键物理与上述初态一致, 只是相应物理效应在局域密度分布演化图中不如正文所示明显. 附录 A 展示了其他量子初态中的一个例子.

## 3 三任意子量子行走及其量子关联

考虑长度  $L = 101$  的一维晶格系统, 标记其中中心格点为 0, 则左右边界格点分别为 -50 和 50. 此外, 在以下 TEBD 计算过程中均采用开边界条件.

首先, 研究统计参数  $\chi$  取不同值和在不同的在位相互作用强度  $U$  下, 三个全同任意子从上述量子初态出发在一维晶格中的时间演化过程. 对应此

动力学过程, 任意子局域密度分布的 TEBD 计算结果如图 1 所示. 从左到右各列, 统计参数的取值分别为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. 从上到下各行, 相互作用强度取值为 0, -1, -4, -80. 第一列对应玻色子极限, 中间三列对应具有分数统计的粒子, 最后一列则对应费米子极限. 对于无相互作用玻色系统, 三个粒子的动力学过程具有大家熟知的量子行走行为. 如图 1(a) 所示, 粒子作线性传输, 波前的速度接近 2. 而当统计参数  $\chi$  的取值逐渐增大时, 在原有锥形结构内部会出现新的锥形结构. 最外层的锥形结构一直存在, 速度不变, 内部的锥形结构会随  $\chi$  值增加而逐渐收紧, 这表明内部锥形对应的粒子传输速度越来越慢, 如图 1(b)–(e) 所示. 可见, 单纯的量子统计性质就可以明显影响粒子的动力学行为, 粒子统计具有明显的量子动力学效应. 粒子间的在位相互作用同样可以使得最初的锥形结构内部出现新的锥形结构, 如图 1(f) 和图 1(k) 所示. 而当在位相互作用强度非常大以至趋于硬核极限时, 相互作用效应会覆盖掉统计参数的影响.

粒子的统计性质除了可以对三任意子的量子动力学施加上述细节的渐进的影响外, 观察图 1 中的各图, 仔细对照可以看到一个非常有趣的现象. 在分数统计区域, 即  $0 < \chi < 1$  的参数区间, 当存在

有限大小的在位相互作用时, 可以看到任意子的局域密度分布在随时间演化过程中出现了一种明显的不对称性, 这是任意子分数统计的一种量子动力学效应, 见图 1(g)–(i) 和图 1(l)–(n). 而在无相互作用时 (图 1 第一行)、在玻色极限 (图 1 第一列) 以及费米子极限 (图 1 最后一列) 下, 则没有上述动力学不对称性, 粒子的局域密度分布在动力学过程中始终保持对称. 进一步可以看到, 强的在位相互作用也会抑制这种分数统计效应, 使粒子的局域密度分布动力学演化过程恢复对称, 如图 1(p)–(t) 所示.

为了更清晰地揭示这种有趣的不对称性, 图 2 给出了系统动力学演化过程中在时刻  $t_c = 22$  的任意子的局域密度分布曲线. 观察图 1 各图可以看到, 在  $t_c = 22$  时刻, 任意子量子态的波前距离晶格边界仍然有足够距离, 故而可以不计边界的影响, 主要关注晶格体内的部分. 同时, 在此时刻, 三任意子的量子初态的动力学演化也已经足够充分, 其在一维晶格中的分布范围已经比较大. 图 2 第一行对应无相互作用的自由粒子系统, 可以看到, 随着统计参数  $\chi$  的增加, 任意子局域密度分布中两侧的峰值会压低, 内部区域的粒子局域密度逐渐抬高. 不过, 在统计参数  $\chi$  的整个变化过程中, 任意子的

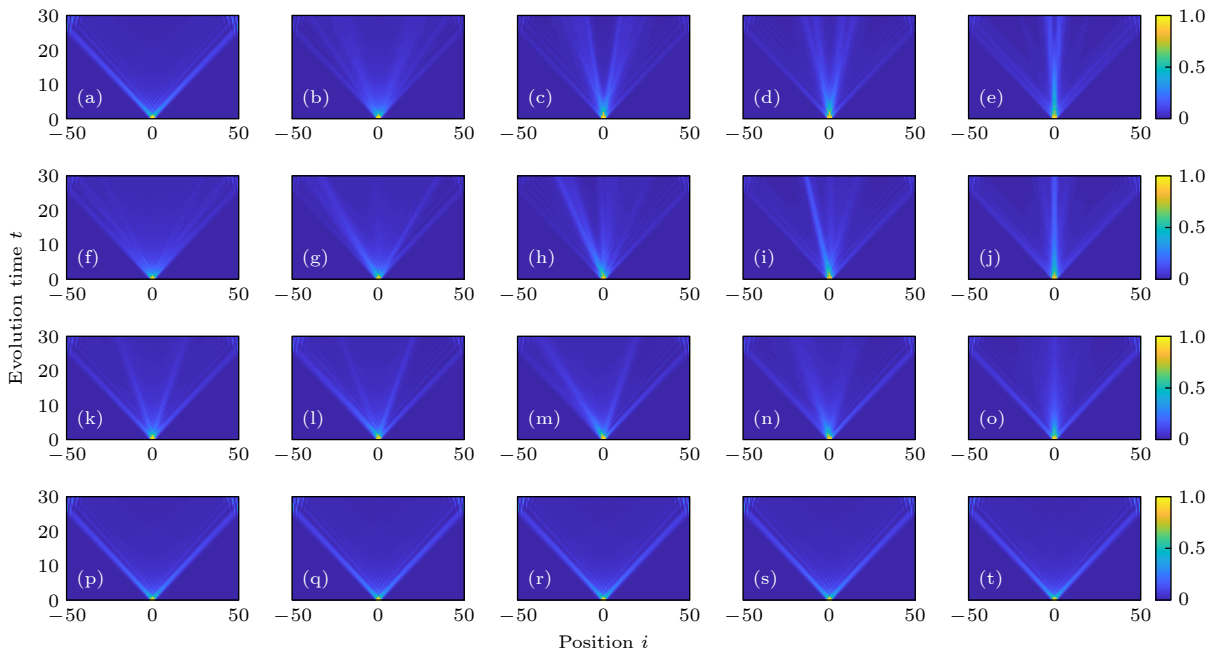


图 1 三任意子在一维晶格中局域粒子密度分布的时间演化过程. 晶格尺寸为  $L = 101$ . 从左至右各列对应的统计参数  $\chi$  的取值为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. 从上至下各行对应的相互作用强度  $U$  的取值为 0, -1, -4, -80

Fig. 1. Dynamical evolution of the local density distribution of three identical anyons among one-dimensional lattices of  $L = 101$ . From left to right, the statistical parameter  $\chi$  is set to be 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. From top to bottom, the on-site interaction strength  $U$  takes value 0, -1, -4, -80, respectively.

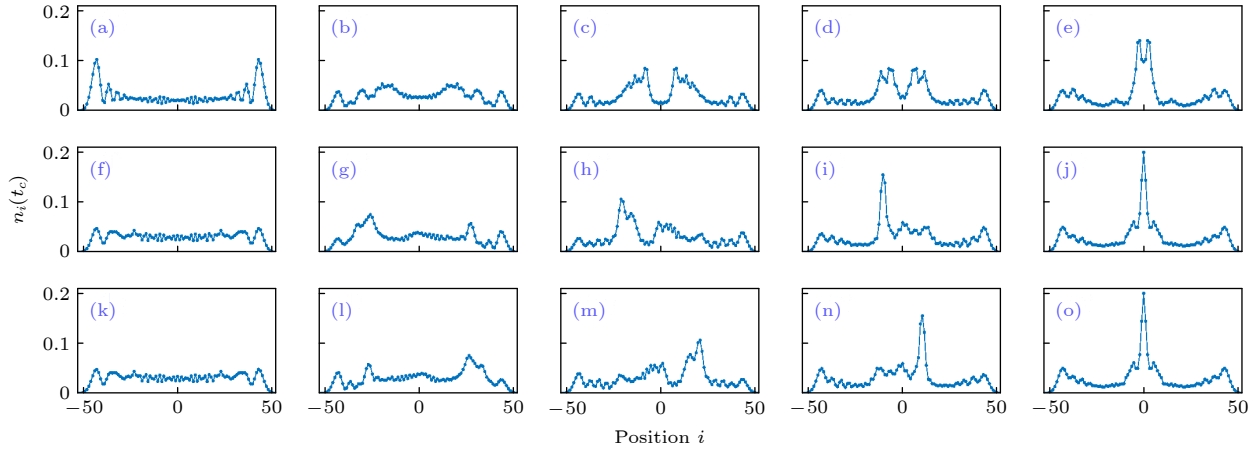


图 2 不同量子统计及不同在位相互作用下, 任意子于时刻  $t = t_c = 22$  在一维晶格中的局域密度分布. 从左到右, 统计参数  $\chi$  取值为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. 从上至下各行对应的相互作用强度  $U$  的取值为 0, -1, 1

Fig. 2. Local density profiles of anyons among the whole lattice at time  $t = t_c = 22$ . From left to right, the statistical parameter  $\chi$  is set to be 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. From top to bottom, the on-site interaction strength  $U$  takes values 0, -1, 1, respectively.

局域密度分布一直保持对称. 图 2 中第二行, 对应的任意子系统中存在在位相互作用, 相互作用的强度  $U$  为 -1. 图 2(g)–(i) 对应粒子具有分数量子统计的情形, 容易看出, 任意子的局域密度分布呈现出清晰的不对称性; 吸引相互作用时, 粒子局域密度分布总体偏向左侧一方. 而图 2(f) 和图 2(j) 分别对应玻色子极限以及费米子极限, 它们的局域密度分布仍然与初态一样保持对称. 进一步计算了排斥相互作用的情形, 见图 2(k)–(o), 图中给出了在位相互作用强度为 1 的 TEBD 计算结果. 可以看到, 排斥相互作用下, 具有分数量子统计的粒子在动力学演化过程中其局域密度分布也是不对称的. 更为有意思的是, 任意子在一维晶格中的局域密度分布的这种不对称性对在位相互作用的性质是敏感的. 在排斥相互作用和吸引相互作用这两种情形下, 任意子在晶格中的局域密度分布在总体上的偏向是相反的. 与其他研究工作<sup>[47,48,50]</sup>给出的动量空间中的不对称性不同, 这里展示的是任意子在动力学过程中表现出的实空间的不对称性, 而且这种实空间中分数统计导致的动力学不对称效应敏感地依赖于相互作用性质, 排斥相互作用下与吸引相互作用下的结果不同. 对比观察图 2(f)–(j) 与图 2(k)–(o) 可见, 如果将排斥相互作用下的任意子局域密度分布空间反演一下, 可以得到吸引相互作用下的任意子局域密度分布. 鉴于此特点, 在图 1 和图 3 中只给出了吸引相互作用, 即  $U \leq 0$  下的结果.

现在分析三任意子量子行走过程中量子关联

性质. 基于 (6) 式利用 TEBD 方法计算任意子的两体关联函数, 即密度密度关联函数. 密度密度关联函数是刻画粒子间关联性质的重要物理量, 它可以非常直观地反映多个粒子在晶格中运动时的聚束 (bunching) 或反聚束 (anti-bunching) 的统计行为. 粒子共同行走 (co-walking) 与独自行走 (individual walking) 对应的密度密度关联函数具有显著不同的特征, 因而可以方便地分析粒子的共同性 (togetherness).

图 3 给出了  $t_c = 22$  时刻, 在不同的量子统计以及不同的在位相互作用强度下任意子的密度密度关联函数计算结果, 图 3 中每个子图都用各子图相应的最大值  $\Gamma_{lk}^{\max}(t)$  进行了重新标度. 图 3 中各子图的物理参数与图 1 各子图对应相同. 图 3(a) 对应熟悉的无相互作用玻色子系统, 可以看到, 关联函数的峰值 (色值最大区域) 出现在对角线上, 两个最大峰值分处中心格点 0 的两侧. 这是玻色统计的典型特征, 玻色子间存在等效的统计吸引, 粒子倾向于聚集在一块, 共同运动, 表现为聚束效应. 图 3(b) 对应统计参数  $\chi = 0.25$ , 对比图 3(a) 可以看出, 粒子的统计性明显改变了粒子的关联函数的结构. 全同粒子关联函数的峰值仍然出现在对角线上, 但是峰值位置与中心格点 0 的距离明显变小. 关联函数的值主要分布在对角线及对角线两侧的次对角线以及次次对角线上, 这是粒子共同行走的标志. 以图 3(b) 和图 3(d) 为例, 各自的内插图展示了密度密度关联函数在对角线及对角线两侧次对角线上的分布. 通过时间点的对照, 可知图 3(b) 关联函数

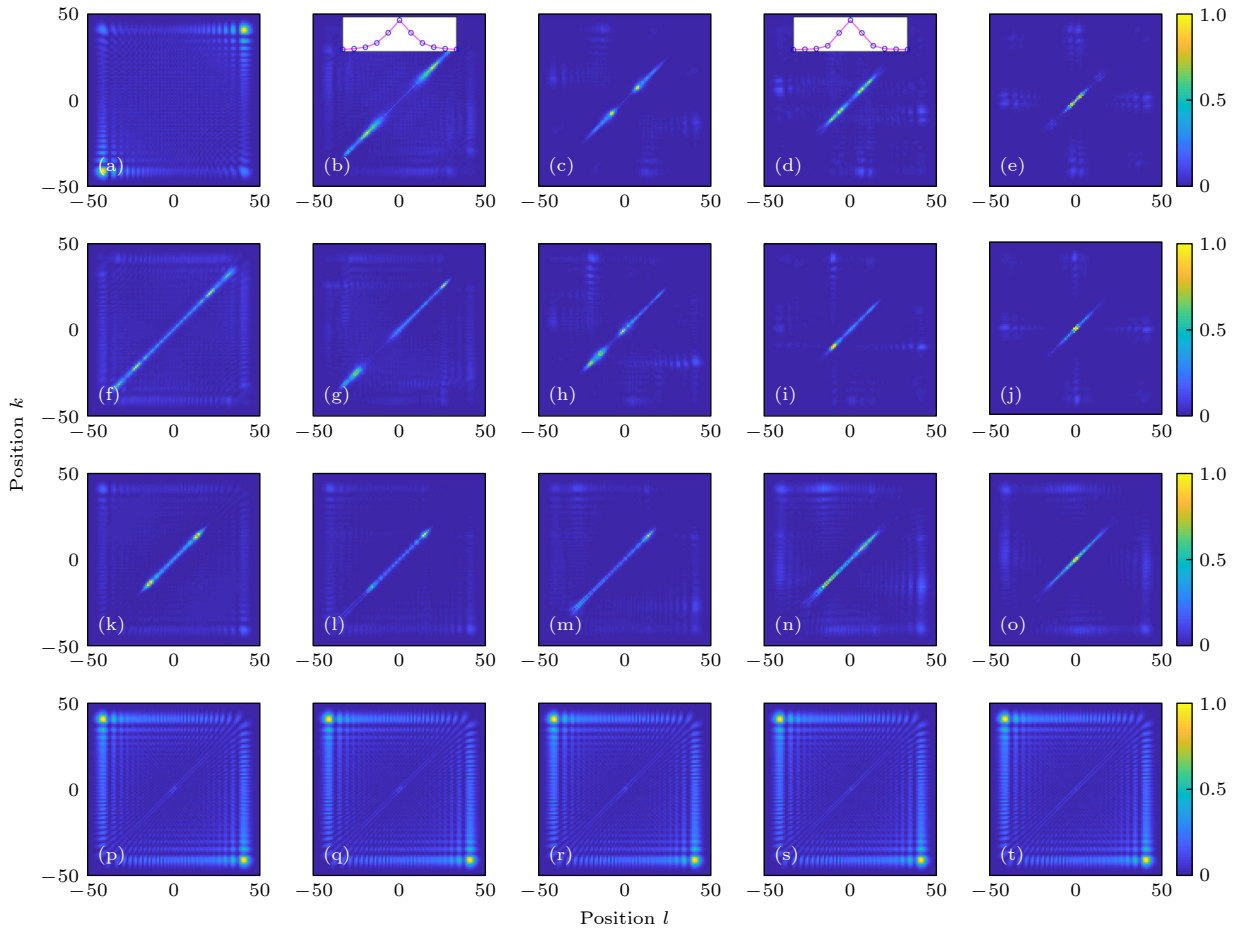


图 3 三任意子量子行走过程中的密度密度关联  $\Gamma_{lk}(t)/\Gamma_{lk}^{\max}(t)$ , 图中对应时刻为  $t = t_c = 22$ . 从左至右各列对应的统计参数  $\chi$  的取值为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. 从上至下各行对应的相互作用强度  $U$  的取值为 0, -1, -4, -80

Fig. 3. The density-density correlations  $\Gamma_{lk}(t)/\Gamma_{lk}^{\max}(t)$  of the three identical anyons at time  $t = t_c = 22$ . From left to right, the statistical parameter  $\chi$  is set to be 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. From top to bottom, the on-site interaction strength  $U$  takes value 0, -1, -4, -80, respectively.

对角线的部分对应图 1(b) 中的内部锥形结构, 这说明图 1(b) 中内锥形结构是量子行走中共同行走的成份. 由此可知, 统计参数  $\chi$  增大主要影响的是量子行走中共同行走的那部分粒子, 使之速度变慢. 依据密度密度关联函数结构可知图 1(c)—(e) 中外层锥形结构对应的是单粒子量子行走, 它们的运动过程不受统计参数  $\chi$  的影响, 速度保持不变. 图 3(c)—(e) 与图 3(b) 的行为类似, 随着统计参数  $\chi$  增加, 共同行走的部分速度越来越慢, 体现在密度密度关联函数上就是对角线上的峰值越来越向中心格点 0 靠拢. 当在系统中引入相互作用时, 由图 3(g)—(i) 和图 3(l)—(n) 可以看到具有分数统计的任意子在实空间中的密度密度关联函数的结构呈现出了奇特的不对称性. 当  $U > 0$ , 粒子间为排斥相互作用时, 关联函数同样会出现这种不对称性, 且不对称性的偏向与吸引相互作用相反, 进一

步印证了图 2 中给出的任意子动力学不对称性. 当在位相互作用强度非常大时, 系统接近硬核极限, 玻色系统成为硬核玻色系统, 此时密度密度关联函数呈现出反聚束效应, 见图 3(p). 进一步, 极强的相互作用会抑制掉分数统计的效应, 此时不同统计参数下的密度密度关联都展示出与硬核玻色子类似的反聚束现象且关联函数结构恢复了对称性, 如图 3(q)—(t) 所示.

## 4 结 论

本文基于三粒子量子行走的理论框架研究了全同任意子在一维晶格中的少体量子动力学行为和量子关联性质, 着重分析了任意子的分数量子统计与粒子间在位相互作用在实空间中的动力学效应. 借助于严格数值计算 TEBD 方法, 计算了任意

子系统从三粒子量子初态出发随时间演化过程中的局域密度分布特点. 研究发现, 对于无相互作用的自由粒子情形, 粒子的统计性质可以显著地影响粒子的动力学行为, 任意子共同行走的部分会随统计参数变大而变慢, 而非共同行走部分速度不受统计参数影响. 特别地, 当存在有限大小的相互作用时, 粒子分数统计会导致粒子的局域密度分布在随时间演化过程中出现明显的动力学不对称性, 而且这种有趣的不对称性对相互作用是敏感的. 排斥相互作用与吸引相互作用下, 粒子密度分布的演化过程都会出现不对称性, 但具有相反的偏向. 最后, 计算了三任意子在动力学演化过程中密度密度关联, 分析了分数统计对粒子关联性质的影响. 量子关联函数的结构分析进一步证实了上述不对称性及其对相互作用性质的敏感性.

## 附录 A

正文中研究了任意子的少体量子动力学, 着重分析了任意子的分数统计性质对三体任意子量子初态的动力学演化结构的影响. 主要基于三体量子初态  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$  对物理效应进行展示和分析. 上述量子初态中, 三个任意子相互邻近. 此种情形下, 依赖于邻近格点上粒子

占据数的跃迁过程具有明显的物理效应. 此外, 在研究过程中, 对其他的一些量子初态也进行了相应的 TEBD 数值模拟. 如研究了一系列粒子间具有不同间隔的三任意子量子初态的动力学演化过程, 分析了分数统计与相互作用的竞争合作关系. 在本附录中, 给出其中一个例子, 见图 A1. 图中相应的量子初态为  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$ , 即任意子之间存在一个格点的间隔.

从图 A1 可以看到, 在量子初态  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$  下, 任意子在一维晶格中的局域密度分布的时间演化结构仍然会随着分数统计因子及相互作用强度的变化而发生改变. 只是粗略一看, 肉眼不容易分辨出各图中微观结构随物理参数变化而显现的具体特征. 图 A2 给出了由量子初态  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$  出发, 经过时间演化, 在  $t = t_c = 9$  时刻任意子在一维晶格中的局域密度分布. 虽然单从图 A1 中不容易清晰分辨出任意子分数统计对实空间中动力学演化过程的影响, 但是结合图 A1 和图 A2 便可分析得到与正文一致的物理结果. 没有相互作用时, 在不同的分数统计因子下, 全同粒子的动力学演化过程是空间对称的, 见图 A2(a)—(e). 同样, 如图 A2(f), 图 A2(k) 及图 A2(j) 和图 A2(o) 所示, 在具有相互作用时, 玻色极限及费米子极限下三粒子的动力学演化过程也是对称的. 但在有限大小的相互作用下, 分数统计区内的粒子的动力学演化过程则呈现空间中的不对称性, 见图 A2(g)—(i) 和图 A2(l)—(n).

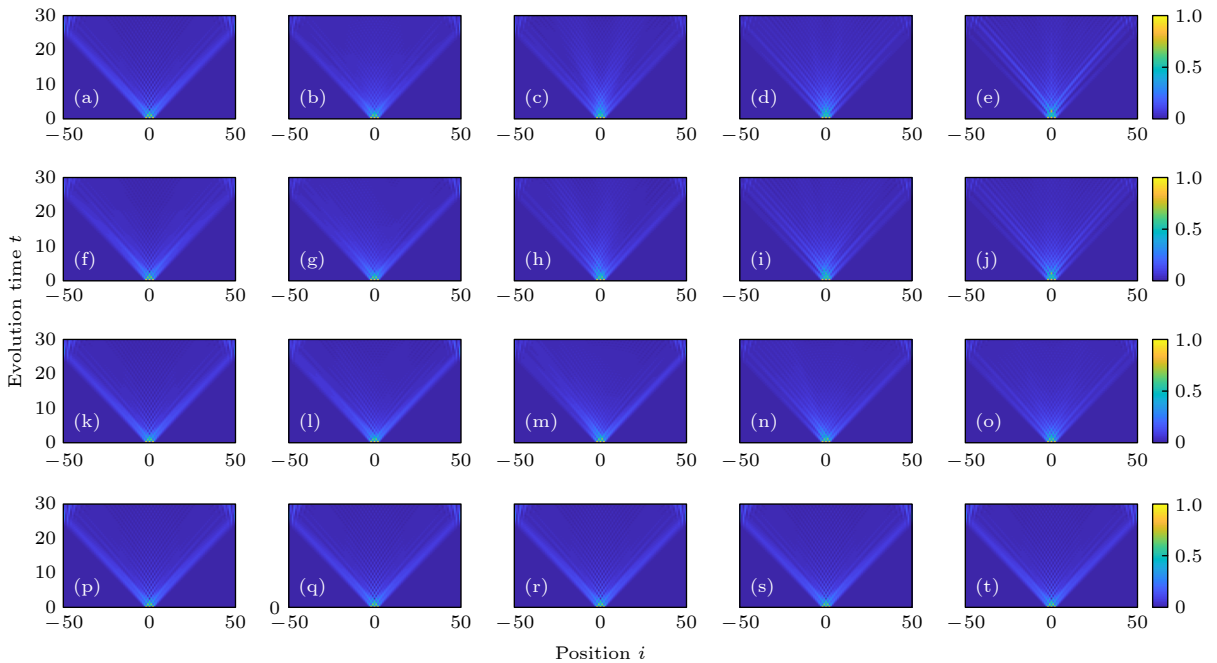


图 A1 三任意子态  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$  在一维晶格中动力学演化过程. 晶格尺寸为  $L = 101$ . 从左至右各列对应的统计参数  $\chi$  的取值为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. 从上至下各行对应的相互作用强度  $U$  的取值为 0, -1, -4, -80

Fig. A1. (Color online) Dynamical evolution of the three-anyon state  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$  among one-dimensional lattices of  $L = 101$ . From left to right, the statistical parameter  $\chi$  is set to be 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. From top to bottom, the on-site interaction strength  $U$  takes value 0, -1, -4, -80, respectively.

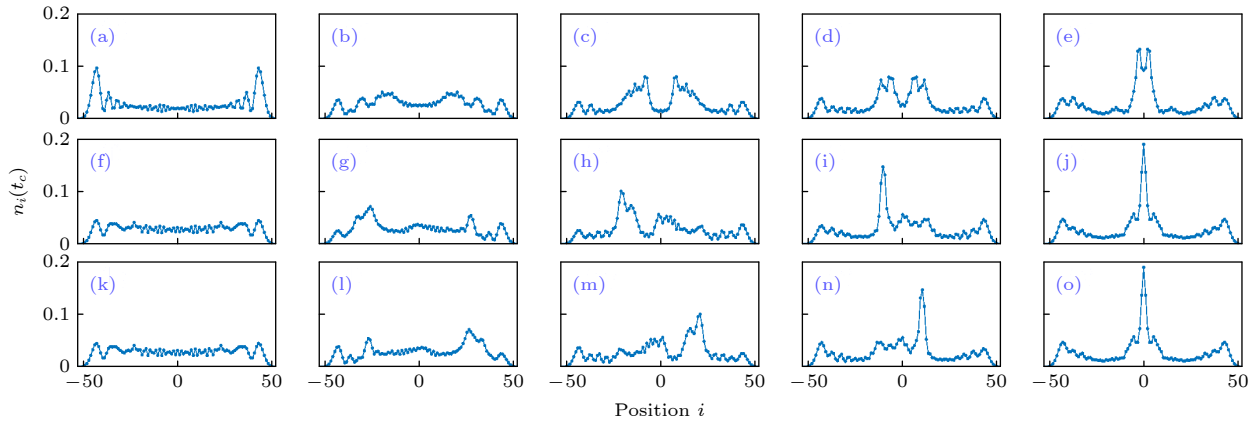


图 A2 不同量子统计及不同位相互作用下,任意子于时刻  $t = t_c = 9$  在一维晶格中的局域密度分布. 任意子的量子初态为  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$ . 从左到右统计参数  $\chi$  取值为 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. 从上至下各行对应的相互作用强度  $U$  的取值为 0, -1, 1

Fig. A2. Local density profiles of anyons among the whole lattice at time  $t = t_c = 9$ . The initial state is chosen as  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-2}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_2^\dagger |0\rangle$ . From left to right, the statistical parameter  $\chi$  is set to be 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1. From top to bottom, the on-site interaction strength  $U$  takes values 0, -1, 1, respectively.

## 参考文献

- [1] Farhi E, Gutmann S 1998 *Phys. Rev. A* **58** 915
- [2] Aharonov Y, Davidovich L, Zagury N 1993 *Phys. Rev. A* **48** 1687
- [3] Kempe J 2003 *Contemp. Phys.* **44** 307
- [4] Manouchehri K, Wang J B 2013 *Physical Implementation of Quantum Walks* (Berlin: Springer)
- [5] Karski M, Förster L, Choi J M, Steffen A, Alt W, Meschede D, Widera A 2009 *Science* **325** 174
- [6] Preiss P M, Ma R, Tai M E, Lukin A, Rispoli M, Zupancic P, Lahini Y, Islam R, Greiner M 2015 *Science* **347** 1229
- [7] Broome M A, Fedrizzi A, Lanyon B P, Kassal I, Aspuru-Guzik A, White A G 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 153602
- [8] Xue P, Zhang R, Qin H, Zhan X, Bian Z H, Li J, Sanders B C 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 140502
- [9] Ramasesh V V, Flurin E, Rudner M, Siddiqi I, Yao N Y 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 130501
- [10] Yan Z, Zhang Y R, Gong M, et al. 2019 *Science* **364** 753
- [11] Ye Y S, Ge Z Y, Wu Y L, et al. 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 050502
- [12] Sansoni L, Sciarrino F, Vallone G, Mataloni P, Crespi A, Ramponi R, Osellame R 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 010502
- [13] Du J F, Li H, Xu X D, Shi M J, Wu J H, Zhou X Y, Han R D 2003 *Phys. Rev. A* **67** 042316
- [14] Schmitz H, Matjeschk R, Schneider C, Glueckert J, Enderlein M, Huber T, Schaetz T 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 090504
- [15] Ambainis A 2003 *Int. J. Quantum Inf.* **1** 507
- [16] Childs A M, Gosset D, Webb Z 2013 *Science* **339** 791
- [17] Zattelli F, Benedetti C, Paris M G A 2020 *Entropy* **22** 1321
- [18] Venegas-Andraca S E 2012 *Quantum Inf. Process.* **11** 1015
- [19] Kitagawa T, Broome M A, Fedrizzi A, et al. 2012 *Nat. Commun.* **3** 882
- [20] Kitagawa T, Rudner M S, Berg E, Demler E 2010 *Phys. Rev. A* **82** 033429
- [21] Wang K K, Li T Y, Xiao L, Han Y W, Yi W, Xue P 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 270602
- [22] Liu W J, Ke Y G, Zhang L, Lee C H 2019 *Phys. Rev. A* **99** 063614
- [23] Tarallo M G, Mazzoni T, Poli N, Sutyryn D V, Zhang X, Tino G M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 023005
- [24] Yin Y, Katsanos D E, Evangelou S N 2008 *Phys. Rev. A* **77** 022302
- [25] Beggi A, Buscemi F, Bordone P 2016 *Quantum Inf. Process.* **15** 3711
- [26] Li Z J, Wang J B 2015 *Sci. Rep.* **5** 13585
- [27] Wang L M, Wang L, Zhang Y B 2014 *Phys. Rev. A* **90** 063618
- [28] Qin X Z, Ke Y G, Guan X W, Li Z B, Andrei N, Lee C H 2014 *Phys. Rev. A* **90** 062301
- [29] Wang L, Hao Y J, Chen S 2010 *Phys. Rev. A* **81** 063637
- [30] Ganahl N, Rabel E, Essler F H L, Evertz H G 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 077206
- [31] Sarkar S, Sowiński T 2020 *Phys. Rev. A* **102** 043326
- [32] Wang L, Hao Y J, Chen S 2008 *Eur. Phys. J. D* **48** 229
- [33] Kraus Y E, Lahini Y, Ringel Z, Verbin M, Zilberberg O 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 106402
- [34] Wang L, Liu N, Chen S, Zhang Y B 2015 *Phys. Rev. A* **92** 053606
- [35] Wang L, Liu N, Chen S, Zhang Y B 2017 *Phys. Rev. A* **95** 013619
- [36] Cai X M, Yang H T, Shi H L, Lee C H, Andrei N, Guan X W 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 100406
- [37] Wilczek F 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 957
- [38] Halperin B I 1984 *Phys. Rev. Lett.* **52** 1583
- [39] Haldane F D M 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 937
- [40] Stern A 2008 *Ann. Phys.* **323** 204
- [41] Bartolomei H, Kumar M, Bisognin R, et al. 2020 *Science* **368** 173
- [42] Nakamura J, Liang S, Gardner G C, Manfra M J 2020 *Nat. Phys.* **16** 931
- [43] Nayak C, Simon S H, Stern A, Freedman M, Das Sarma S 2008 *Rev. Mod. Phys.* **80** 1083
- [44] Batchelor M T, Guan X W, Oelkers N 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 210402
- [45] Kundu A 1999 *Phys. Rev. Lett.* **83** 1275
- [46] Girardeau M D 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 100402
- [47] Keilmann T, Lanzmich S, McCulloch I, Roncaglia M 2011 *Nat. Commun.* **2** 361
- [48] Greschner S, Santos L 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 053002
- [49] Vidal G 2003 *Phys. Rev. Lett.* **91** 147902
- [50] Hao Y J, Zhang Y B, Chen S 2008 *Phys. Rev. A* **78** 023631

# Quantum dynamics and correlations of indistinguishable anyons in one-dimensional lattices\*

Wang Li<sup>1)†</sup> Jia Li-Fang<sup>1)</sup> Zhang Yun-Bo<sup>2)</sup>

1) (*Institute of Theoretical Physics, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

2) (*Department of Physics and Key Laboratory of Optical Field Manipulation of Zhejiang Province, Zhejiang Sci-Tech University, Hangzhou 310018, China*)

( Received 26 January 2022; revised manuscript received 25 February 2022 )

## Abstract

Anyons, namely particles obeying fractional quantum statistics that interpolate between bosons and fermions, possess a lot of new and exotic physical properties related to the particle exchange statistics. In this work, we explore the few-body quantum dynamics and quantum correlations of indistinguishable anyons with on-site interactions in one-dimensional lattices within the scheme of three-body continuous-time quantum walks. By employing a time-evolving block decimation (TEBD) algorithm, we numerically calculate the dynamical evolution process of the local density distribution of anyons among the whole lattice. Numerical simulations shown in the main text mainly focus on a three-body initial state as  $|\psi(t=0)\rangle = \hat{a}_{-1}^\dagger \hat{a}_0^\dagger \hat{a}_1^\dagger |0\rangle$ , in which three particles are located on neighbouring sites at lattice centre. This choice of initial state features that the three particles influence one another most strongly, while we have also implemented numerical simulations on other choices of three-body initial states as are discussed in appendix. It is shown that the local density distribution of anyons is dramatically altered by fractional particle statistics with new dynamical structure showing up during the time evolution. For free anyons, an inner cone emerges as the statistical parameter increases, while the outer cone remains robust all along. When the on-site interaction joins in, the structure of the inner cone is further modified with new features. Specifically, for interaction of finite strength, an exotic dynamical asymmetry in real space, is clearly demonstrated during the time evolution of the local density distribution for particles within the fractional statistics regime. However, for boson limit and pseudofermion limit, the time evolution of the local density distribution keeps symmetric as the three-body initial state. And remarkably, the dynamical asymmetry is interaction-dependent manifested as the local density distribution of anyons favors opposite side of the lattice for repulsive and attractive interaction, respectively. Moreover, when the on-site interaction is further increased to hard-core limit, the dynamical asymmetry will then be largely suppressed. We also calculate the density-density correlations for anyons before they reach the lattice boundary to reveal the interesting effect of fractional statistics on quantum correlations. It is shown that the inner cone corresponds to co-walking of anyons, while the outer cone is related to individual walking and is immune to the variation of statistical parameter. Furthermore, the exotic real-space asymmetry originated from the interplay of fractional statistics and finite interaction is also shown up in the density-density correlations.

**Keywords:** indistinguishable anyons, fractional statistics, multi-particle quantum walk, dynamical asymmetry

**PACS:** 05.30.Pr, 05.40.Fb, 37.10.Jk

**DOI:** [10.7498/aps.70.20220188](https://doi.org/10.7498/aps.70.20220188)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11404199, 12147215, 12074340) and the Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant Nos. 2015021012, 1331KSC).

† Corresponding author. E-mail: [liwangiphy@sxu.edu.cn](mailto:liwangiphy@sxu.edu.cn)