

轴对称指向性球面波的界面反射波

段韵达 胡恒山

Interface reflection wave of axisymmetric directional spherical-wave

Duan Yun-Da Hu Heng-Shan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 074301 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20211718

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211718>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

水下环形凹槽圆柱体散射声场空间指向性调控

Manipulating spatial directivity of acoustic scattering from a submerged cylinder by means of annular grooves

物理学报. 2021, 70(17): 174301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210111>

柱状双层声电效应测井界面电磁波

Borehole interface converted electromagnetic wave of double cylindrical formation

物理学报. 2019, 68(20): 204301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190891>

天线方向系数的一类计算逼近方法

A class of approximate computation method for antenna directivity

物理学报. 2020, 69(2): 028401 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191268>

冲击载荷下线性硬化材料中球面应力波场的理论计算方法研究

Method of theoretically calculating spherical stress wave field in linear-hardening materials under impact load

物理学报. 2022, 71(1): 018301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20210954>

基于联合波叠加法的浅海信道下圆柱壳声辐射研究

Sound radiation of cylinder in shallow water investigated by combined wave superposition method

物理学报. 2018, 67(8): 084301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171963>

基于反射超表面的偏馈式涡旋波产生装置

Offset-fed vortex wave generator based on reflective metasurface

物理学报. 2021, 70(19): 198401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210681>

轴对称指向性球面波的界面反射波*

段韵达 胡恒山†

(哈尔滨工业大学航天科学与力学系, 哈尔滨 150001)

(2021年9月15日收到; 2021年11月22日收到修改稿)

无限大平面刚性障板中圆形活塞源的声辐射场可近似为轴对称指向性球面波, 前人只给出了活塞面与界面平行时轴对称指向性球面波的界面响应表达式, 本文针对活塞面与界面不平行的情况, 推导了轴对称指向性球面波的锥面波展开式, 并进一步导出了其界面反射波的表达式. 在源距远大于声波波长的情况下通过鞍点法将界面反射波的表达式化简为了简化表达式. 简化式不仅计算上简洁, 而且物理含义清楚: 轴对称指向性球面波的界面反射波可视为镜像活塞源激发的轴对称指向性球面波与反射系数的乘积. 计算表明, 当活塞半径小于声波波长时, 反射波对活塞与界面的夹角和接收点的环向方位角不太敏感, 反射波的指向性较弱; 当活塞半径大于声波波长时, 反射波对活塞与界面的夹角和接收点的环向方位角很敏感, 反射波的指向性很强. 增加活塞与界面的夹角, 反射波先增加后减小, 反射波的指向性先增强后减弱; 当活塞与界面的夹角等于活塞中心镜像点与接收点的连线与界面法线的夹角时, 反射波最大, 反射波的指向性最强.

关键词: 声波, 反射波, 指向性, 活塞**PACS:** 43.20.+g, 43.30.+m**DOI:** 10.7498/aps.71.20211718

1 引言

声波是海洋中探测目标和传递信息的有效工具, 而声纳是利用声波获取水下信息的仪器, 被广泛用于海洋军事和地质勘探^[1,2]. 声纳的重要组成部分之一是换能器, 换能器类型多种多样, 其中复合棒换能器是目前应用最为普遍的换能器之一, 由于它产生的是一种类似于活塞式的振动, 因而也称为活塞式换能器或纵向换能器^[1,3]. 声源通常嵌入到一坚硬面板中, 使声源的辐射场只存在于面板的单侧空间, 并使该侧空间内的声辐射场比无面板时更大, 此时该面板称为障板^[4]. 障板可以是球形、圆柱或平面, 其中平面障板是最基本的障板模型, 当声波波长远小于障板尺度时, 有限平面障板模型可由无限大平面障板模型描述^[5,6]. 多个活塞安装在障板上形成阵列, 可提高声源的发射功率, 使声辐射

集中于同一方向, 更有利于定位水下目标^[7].

无限大平面刚性障板中圆形活塞源的声辐射是经典的声辐射模型^[8-10], 其中活塞面内所有的面元从零时刻开始以相同的速度沿活塞轴线方向振动, 障板与活塞面共面, 障板在任意时刻都不会发生变形和运动. 当活塞中心到接收点的距离远大于活塞半径时, 无限大平面刚性障板中圆形活塞(简称为障板活塞)的声辐射场可近似为一种轴对称指向性球面波(轴对称是指波场关于活塞的轴线对称), 即^[4]

$$p_f(M) = \frac{A(\omega)}{\pi a^2} \int_{S_P} \frac{\exp(ik_f R_{MP})}{R_{MP}} dS_P$$

$$= \frac{A(\omega)}{R_{ME}} D(\theta_{ME}) \exp(ik_f R_{ME}), \quad (R_{ME} \gg a), \quad (1)$$

式中第2个等号的左边为障板活塞源的辐射场, 右边为轴对称指向性球面波; p_f 是流体中的声压(流体可以是水或者空气), a 为活塞半径, k_f 是流体中

* 国家自然科学基金(批准号: 11972132, 11734017)资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hhs@hit.edu.cn

的声波波数; R_{MP} 为接收点 M 到活塞面上任意点 P 的距离, S_P 为圆形活塞面, R_{ME} 为接收点 M 到活塞中心 E 的距离; $D(\theta_{ME})$ 为指向性函数, 有

$$D(\theta_{ME}) = \frac{2 J_1(k_f a \sin \theta_{ME})}{k_f a \sin \theta_{ME}}, \quad (2)$$

其中 J_1 为一阶第一类贝塞尔函数, θ_{ME} 为接收点 M 与活塞中心 E 的连线与活塞轴线的夹角, $D(\theta_{ME})$ 的量纲为 1; $A(\omega)$ 为声压源的频谱(单位为 Pa), 有

$$A(\omega) = -\frac{1}{2}i\rho_f\omega a^2 v_0(\omega), \quad (3)$$

其中 $v_0(\omega)$ 为活塞振动速度, ρ_f 为流体密度, ω 为角频率, i 为单位虚数. 这种轴对称指向性球面波的辐射阻抗和指向特征对指导水下换能器设计^[6,11]、水雷探测器设计^[12]、隧道微压波计算^[13]和医学超声涡旋声场设计^[14]有着重要意义.

前面介绍了轴对称指向性球面波在声辐射方面的诸多研究, 但轴对称指向性球面波的界面响应却少见报道. Amédin 等^[15]针对孔隙介质夹层介于障板活塞与空气之间的情况, 推导了障板活塞源的声辐射场对孔隙介质-空气界面的响应表达式, 当孔隙介质夹层厚度远大于活塞半径时, 该障板活塞源的界面响应式等于轴对称指向性球面波的界面响应式. Wang 和 Cho^[16]考虑了各向异性孔隙介质夹层介于障板活塞与空气之间的情况, 当孔隙介质夹层厚度远大于活塞半径时, Wang 和 Cho 给出的障板活塞源的界面响应式等于轴对称指向性球面波的界面响应式. Schakel 等^[17-19]为了检验孔隙介质电效应理论^[20,21]的有效性, 推导了指向性球面声波入射流体-孔隙介质界面的响应式. 文献^[15-19]都是基于人为设计的实验模型给出轴对称指向性球面波的界面响应式, 由于实验模型中活塞面与界面平行, 所以他们只考虑活塞面与界面平行这一特殊情况, 但从理论模型的角度看, 活塞面与界面不平行的情况比两者平行的情况更为一般, 然而目前未见活塞与界面不平时轴对称指向性球面波的界面响应式的文献报道. 从应用的角度看, 海洋地震勘探和水下目标探测时活塞面与界面通常不平行^[5,22], 在没有理论公式的情况下, 虽然可通过数值仿真模拟轴对称指向性球面波的界面反射波, 然而当目标界面远离活塞面和接收点时, 数值仿真将面临很大的计算量和很长的计算时间, 这不利于海底储层和水下目标的探测. 因此,

本文以轴对称指向性球面波从流体入射固体界面为例, 推导活塞面不平行于界面时轴对称指向性球面波的界面反射波的表达式, 完善障板活塞源的声辐射场的界面响应理论; 推导轴对称指向性球面波的界面反射波的简化表达式, 为障板活塞型声源快速探测水下界面提供思路.

2 轴对称指向性球面波的锥面波展开

欲得均匀球面波的界面反射波需先导出均匀球面波的锥面波展开式^[23], 类似地, 欲得轴对称指向性球面波的界面反射波, 需先导出轴对称指向性球面波的锥面波展开式. 由(1)式知 $R_{ME} \gg a$ 时障板活塞源辐射场近似为轴对称指向性球面波, 因而本节从障板活塞源辐射场出发, 先导出障板活塞源辐射场的锥面波展开式, 再令 $R_{ME} \gg a$, 则该锥面波展开式近似为轴对称指向性球面波的锥面波展开式. 图1是无限大平面刚性障板中的圆形活塞与界面的示意图, 坐标系建立的方式为: 从圆形活塞中心 E 向界面作垂线, 交点为 O , 以 EO 的连线为 z 轴, 方向向下; 使活塞轴线与界面相交, 该交点与 O 点的连线为 x 轴, 方向向右, $Oxyz$ 构成右手直角坐标系; 使 Oxy 面与界面重合. 活塞中心 E 到界面的距离为 d_E , 活塞轴线与界面法线的夹角为 α , 亦即活塞面与界面的夹角为 α . 本节只考虑入射波的情况, 下节再考虑界面反射波的情况.

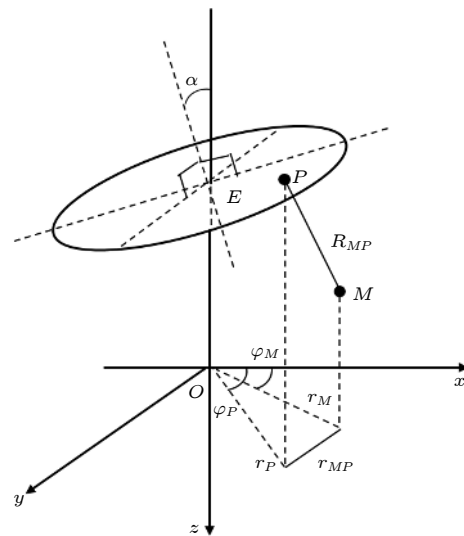


图1 无限大平面刚性障板中的圆形活塞与界面的示意图
Fig. 1. Schematic diagram of a piston in an infinite plane rigid baffle and an interface.

2.1 障板活塞源辐射场的锥面波展开式

无限大平面刚性障板中圆形活塞的模型如图 1 所示, 图中 P 是活塞面内的点, M 为接收点, 由 (1) 式可知障板活塞源的声压辐射场为^[4]

$$p_f(M) = \frac{A(\omega)}{\pi a^2} \int_{S_P} \frac{\exp(ik_f R_{MP})}{R_{MP}} dS_P. \quad (4)$$

(4) 式表明障板活塞源的辐射场可视为活塞面 S_P 内频谱为 $\frac{A(\omega)}{\pi a^2} dS_P$ 的点源辐射场在 M 点处叠加 (点源指均匀球面波的点源, 下文均为该含义), 所以可利用均匀球面波的锥面波展开式处理 (4) 式. 均匀球面波的锥面波展开式为^[23]

$$\frac{\exp(ik_f R_{MP})}{R_{MP}} = i \int_0^\infty \frac{k_r}{k_z} J_0(k_r r_{MP}) \exp[ik_z |z_M - z_P|] dk_r, \quad (5)$$

其中 $k_z = \sqrt{k_f^2 - k_r^2}$ 是流体中声波的轴向波数, k_r 为径向波数, $k_f = \omega/v_f$ 为流体中声波波数, v_f 为流体声速; R_{MP} 为 M 点和 P 点的距离, r_{MP} 为 M 与 P 的连线在 Oxy 面上的投影值 (见图 1), z_P 为 P 的轴向坐标, z_M 为 M 的轴向坐标, J_0 为零阶第一类贝塞尔函数. 将 (5) 式代入 (4) 式得 (设 M 点位于活塞下方, 则 $|z_M - z_P| = z_M - z_P$, 见图 1)

$$p_f(M) = \frac{A}{\pi a^2} \int_{S_P} i \int_0^\infty \frac{k_r}{k_z} J_0(k_r r_{MP}) \times \exp[ik_z (z_M - z_P)] dk_r dS_P, \quad (6)$$

由于径向波数 k_r 及 k_r 积分的上下限均与空间坐标无关, 所以可以交换 (6) 式中的积分次序, 得

$$p_f(M) = \frac{A}{\pi a^2} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} \int_{S_P} J_0(k_r r_{MP}) \times \exp[ik_z (z_M - z_P)] dS_P dk_r. \quad (7)$$

由图 1 知, 圆形活塞的面元 dS_P 与其在 Oxy 面的投影面元 dS_F 满足

$$dS_P \cdot \cos \alpha = dS_F, \quad (8)$$

这表明圆形活塞面 S_P 在 Oxy 面的投影 S_F 是一个椭圆, 并且该椭圆的周线方程在直角坐标系和极坐标系下可分别写为

$$\frac{x^2}{(a \cos \alpha)^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1, \quad r = \frac{a}{\sqrt{1 + \cos^2 \varphi \tan^2 \alpha}}. \quad (9)$$

记 P 点在 Oxy 面上的投影点为 F , 由 (8) 式可知

$$z_P = -d_E - x_F \tan \alpha, \quad (10)$$

其中 d_E 为活塞中心 E 到 Oxy 面的距离, $-a \cos \alpha \leq x_F \leq a \cos \alpha$ (因 x_F 位于椭圆 S_F 内). 由于 P 在 Oxy 面上的投影为 F , 所以 $r_{MP} = r_{MF}$, 将 $r_{MP} = r_{MF}$, (8) 式和 (10) 式代入 (7) 式得

$$p_f(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} \exp[ik_z (z_M + d_E)] \tilde{P} dk_r, \quad (11)$$

其中

$$\tilde{P} = \int_{S_F} J_0(k_r r_{MF}) \exp[ik_z x_F \tan \alpha] dS_F. \quad (12)$$

由贝塞尔函数加法定理可得^[24]

$$J_0(k_r r_{MF}) = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \cos[n(\varphi_M - \varphi_F)] \times J_n(k_r r_M) J_n(k_r r_F), \quad (13)$$

其中 ε_n 为纽曼因子, 满足 $\varepsilon_0 = 1$, 而 $n \geq 1$ 时 $\varepsilon_n = 2$; r_M 和 r_F 分别为 M 点和 F 点的径向坐标, φ_M 和 φ_F 分别为 M 点和 F 点的环向坐标 (见图 1). 将 (13) 式代入 (12) 式, 并交换积分和求和的次序得

$$\tilde{P} = \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n J_n(k_r r_M) Q_n, \quad (14)$$

其中

$$Q_n = \int_{S_F} \cos[n(\varphi_M - \varphi_F)] J_n(k_r r_F) \times \exp[ik_z x_F \tan \alpha] dS_F, \quad (15)$$

利用三角关系, 可将 (15) 式改写为

$$Q_n = \cos(n\varphi_M) \int_{S_F} \cos(n\varphi_F) J_n(k_r r_F) \times \exp[ik_z x_F \tan \alpha] dS_F + \sin(n\varphi_M) \int_{S_F} \sin(n\varphi_F) J_n(k_r r_F) \times \exp[ik_z x_F \tan \alpha] dS_F. \quad (16)$$

观察 (16) 式第二行的积分式可知, $n \geq 1$ 时 $J_n(k_r r_F)$ 和 $\exp(i k_z x_F \tan \alpha)$ 均关于 $\varphi_F = 0$ 对称, 而 $\sin(n\varphi_F)$ 关于 $\varphi_F = 0$ 反对称, 又椭圆面 S_F 关于 $\varphi_F = 0$ 对称 (见 (9) 式), 所以 $n \geq 1$ 时 (16) 式第二行的积分式为零. 此外, $n = 0$ 时 $\sin(n\varphi_F) = 0$, 所以综上知 $n \geq 0$ 时 (16) 式第二行的积分项为零, 得

$$Q_n = \cos(n\varphi_M) G_n, \quad (17)$$

其中

$$G_n = \int_{S_F} \cos(n\varphi_F) J_n(k_r r_F) \exp(ik_z x_F \tan \alpha) dS_F. \quad (18)$$

将 (17) 式和 (14) 式代入 (11) 式得障板活塞源辐射场的锥面波展开式

$$p_f(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} \exp[ik_z(z_M + d_E)] \times \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n J_n(k_r r_M) \cos(n\varphi_M) G_n dk_r, \quad (19)$$

其中 G_n 由 (18) 式表达. (19) 式表明障板活塞源的辐射场可视为顶点位于 z 轴 $z_M = -d_E$ 处的多阶锥面波在 M 点处的叠加. 因 (4) 式推倒到 (19) 式的过程中没有用到任何近似条件, 而 (4) 式适用于任意场点^[4], 所以 (19) 式也适用于任意场点.

2.2 轴对称指向性球面波的锥面波展开式

由 (1) 式可知, 当活塞中心 E 到接收点 M 的距离远大于活塞半径时 ($R_{ME} \gg a$), 障板活塞源辐射场 (4) 式近似为轴对称指向性球面波, 所以 $R_{ME} \gg a$ 时障板活塞源辐射场的锥面波展开式 (19) 近似为轴对称指向性球面波的锥面波展开式. $R_{ME} \gg a$ 时 (19) 式不仅能用来推导轴对称指向性球面波的界面反射波, 也能用来推导界面透射波, 本文关注的是界面反射波.

2.3 算例检验

前文看到, $R_{ME} \gg a$ 时 (19) 式为轴对称指向性球面波的锥面波展开式, 而 $R_{ME} \gg a$ 时 (1) 式为轴对称指向性球面波 (即 (1) 式中的 $\frac{A(\omega)}{R_{ME}} D(\theta_{ME}) \times \exp(ik_f R_{ME})$), 所以 $R_{ME} \gg a$ 时 (19) 式应等于 (1) 式. 因此, 这里为了检验 (19) 式, 在 $R_{ME} \gg a$ 的条件下比较 (19) 式和 (1) 式.

由轴对称指向性球面波的表达式 (1) 式和 (2) 式知, 参数 $k_f a$ 控制了障板活塞源的指向能力 (k_f 为流体中声波波长, a 为活塞半径), 因而本文考虑两类活塞, 一类是活塞半径小于声波波长的小活塞, 即 $a < \lambda$, 而另一类是活塞半径大于声波波长的大活塞, 即 $a > \lambda$. (19) 式中的 A 为声源频谱, 设声源波形为余弦包络脉冲函数, 脉冲长度为 0.5 ms, 中心频率为 6 kHz, 频率范围为 2—10 kHz (高频海洋地震勘探的声源频段^[25]), 则有 $\lambda = 0.15$ —

0.75 m, 所以设小活塞的半径为 $a = 0.1$ m, 大活塞的半径为 $a = 1$ m. 设距离小活塞源 1 m 处的声压为 10^5 Pa, 距大活塞源 1 m 处的声压为 10^7 Pa. 对于流体中的入射波而言, 只需考虑流体的参数 (见表 1), 设流体的品质因子为 100. (19) 式和 (1) 式乘以声源频谱函数可得频域波形, 再经傅里叶变换可得时域波形.

表 1 流体和固体参数
Table 1. Parameters of fluid and solid.

	密度/ ($\text{kg} \cdot \text{m}^{-3}$)	纵波速度/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)	横波速度/ ($\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$)
流体	1000	1500	—
快速地层	2600	4000	2300
慢速地层	2000	2200	1200

设活塞中心 E 位于 z 轴上 $z = -d_E = -25$ m 处, 活塞面与 Oxy 面的夹角 $\alpha = 30^\circ$, 接收点 M 位于 $(r_M, \varphi_M, z_M) = (21.65, 0, -12.5)$, 其中 r_M, φ_M 和 z_M 的单位分别为米、度和米, 则有 $R_{ME} = 25$ m $\gg 1 \geq a$, 因而 $R_{ME} \gg a$ 条件满足. 由 M 点与 E 点的位置可知 (参考图 1), M 点位于 Oxz 面, 线段 ME 与 z 轴的夹角为 60° , ME 与活塞轴线的夹角为 30° , 因而 M 点与 O 点关于活塞的轴线对称, 则 M 与 O 点的声压应相等. 记锥面波展开式 (19) 在 M 点处的计算结果为 $p_f(M)$, (19) 式在 O 点处的

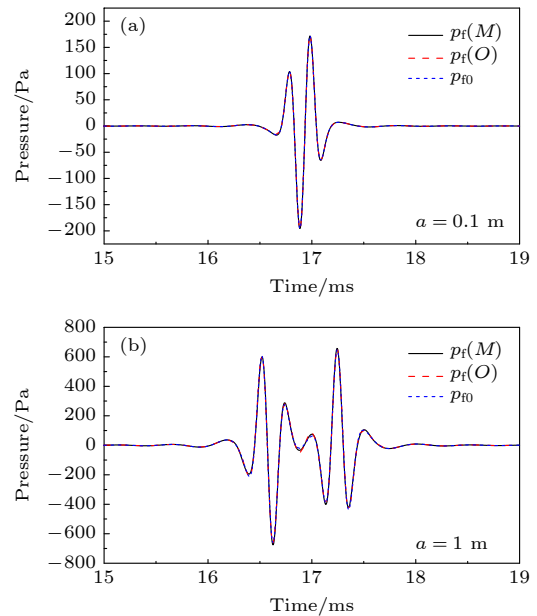


图 2 $p_f(M)$, $p_f(O)$ 和 p_0 的时域波形 (a) $a = 0.1$ m; (b) $a = 1$ m
Fig. 2. Time-domain waveforms of $p_f(M)$, $p_f(O)$ and p_0 : (a) $a = 0.1$ m; (b) $a = 1$ m.

计算结果为 $p_f(O)$, (1) 式在 $R_{ME} = 25 \text{ m}$ 且 $\theta_{ME} = 30^\circ$ 下的计算结果为 p_{f0} . 图 2 给出了 $p_f(M)$, $p_f(O)$ 和 p_{f0} 的计算结果, 其中图 2(a) 和图 2(b) 分别对应 $a = 0.1 \text{ m}$ 和 $a = 1 \text{ m}$, 即分别对应小活塞和大活塞. 图 2(a) 和图 2(b) 表明 $p_f(M)$, $p_f(O)$ 和 p_{f0} 几乎没有区别, 因此 $R_{ME} \gg a$ 时轴对称指向性球面波的锥面波展开式 (19) 与轴对称指向性球面波 (1) 式一致.

3 轴对称指向性球面波的界面反射波的表达式

前文表明 $R_{ME} \gg a$ 时障板活塞源辐射场的锥面波展开式 (19) 近似为轴对称指向性球面波的锥面波展开式, 由此可知 $R_{ME} \gg a$ 时障板活塞源辐射场的界面反射波表达式近似为轴对称指向性球面波的界面反射波表达式, 因此本节先推导障板活塞源辐射场的界面反射波表达式, 再令 $R_{ME} \gg a$ 即得轴对称指向性球面波的界面反射波表达式. 图 3 给出了活塞面关于界面的镜像, 图中活塞 S_P 为活塞 S_P 的镜像, E_1 为 E 的镜像, P_1 为 P 的镜像, M 为反射波的接收点, M_2 为 M 在 Oxy 面上的投影点.

参考锥面波展开式 (19) 的形式, 设障板活塞源辐射场的界面反射波为

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} \exp[-ik_z(z_M - d_E)] \times \sum_{n=0}^\infty B_n J_n(k_r r_M) \cos(n\varphi_M) G_n dk_r, \quad (20)$$

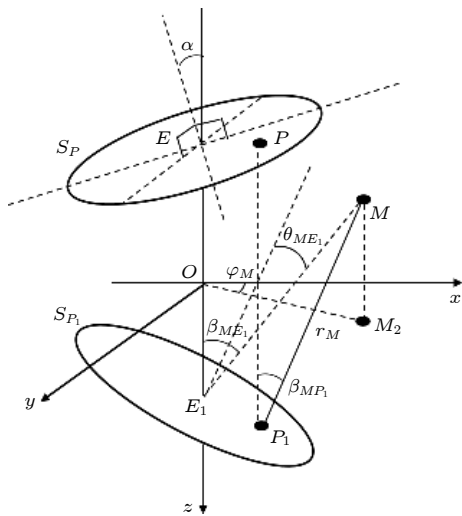


图 3 活塞面关于界面的镜像

Fig. 3. Mirror image of the piston surface with respect to the interface.

其中 M 点为反射波的接收点, $B_n = B_n(k_r)$ 为待定系数, 需通过边界条件确定, 具体过程为: 参考 (19) 式的形式先列出透射纵波和横波的表达式, 再将它们和 (20) 式代入流体-固体界面边界连续条件可得 B_n 满足的线性方程组, 最后求解该线性方程组即得 B_n . 然而, 我们并不打算通过上述方式求解 B_n 以获得界面反射波的表达, 因为由 (1) 式注意到障板活塞源的辐射场等于活塞面 S_P 上点源辐射场的叠加, 则障板活塞源辐射场的界面反射波等于活塞面 S_P 上点源辐射场的界面反射波的叠加. 对于活塞面 S_P 上的单个点源 P 而言, 其界面反射波为 [23]

$$\tilde{p}_{f_ref}(M, P) = \frac{A}{\pi a^2} \int_0^\infty B(k_r) i \frac{k_r}{k_z} J_0(k_r r_{MP_1}) \times \exp[-ik_z(z_M - z_{P_1})] dk_r, \quad (21)$$

其中 $\frac{A}{\pi a^2}$ 来自 (4) 式, P_1 为 P 的镜像 (见图 3), $B(k_r)$ 为反射系数, 即平面波入射界面的反射系数 (Aki 和 Richards [23] 指出, 对于均匀球面波由流体入射无限大平面界面的模型, 界面反射波表达式中的待定系数即平面波入射该界面的反射系数.) $\tilde{p}_{f_ref}(M, P)$ 表示的是 S_P 面上单个点源 P 的辐射场的界面反射波, 所以障板活塞源辐射场的界面反射波等于 S_P 面上 $\tilde{p}_{f_ref}(M, P)$ 的叠加 (因声压是标量, 所以这里直接叠加)

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2} \int_{S_{P_1}} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) J_0(k_r r_{MP_1}) \times \exp[-ik_z(z_M - z_{P_1})] dk_r dS_{P_1}, \quad (22)$$

由于径向波数 k_r 及 k_r 的积分上下限均与空间坐标无关, 所以可以交换 (22) 式中的积分次序, 得

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) \int_{S_{P_1}} J_0(k_r r_{MP_1}) \times \exp[-ik_z(z_M - z_{P_1})] dS_{P_1} dk_r. \quad (23)$$

由于 P_1 为 P 的镜像, 所以由 (10) 式得

$$z_{P_1} = -z_P = d_E + x_F \tan \alpha, \quad (24)$$

由于 S_P 在 Oxy 面的投影为 S_F , 而 S_P 和 S_{P_1} 关于 Oxy 面对称, 所以 S_{P_1} 面在 Oxy 面的投影也是 S_F (参照图 3), 则有 $dS_{P_1} \cdot \cos \alpha = dS_F$ 和 $r_{MP_1} = r_{MF}$, 再将这两式代入 (23) 式得

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) \int_{S_F} J_0(k_r r_{MF}) \times \exp[-ik_z(z_M - z_{P_1})] dS_F dk_r, \quad (25)$$

将 (24) 式代入 (25) 式得

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) \times \exp[-ik_z(z_M - d_E)] \tilde{P}_{ref} dk_r, \quad (26)$$

其中

$$\tilde{P}_{ref} = \int_{S_F} J_0(k_r r_{MF}) \exp(ik_z x_F \tan \alpha) dS_F, \quad (27)$$

比较 (27) 式和 (12) 式可知 $\tilde{P}_{ref} = \tilde{P}$. 将 $\tilde{P}_{ref} = \tilde{P}$, (14) 式和 (17) 式代入 (26) 式得轴对称指向性球面波的界面反射波为

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) \exp[-ik_z(z_M - d_E)] \times \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n J_n(k_r r_M) \cos(n\varphi_M) G_n dk_r, \quad (28)$$

其中 G_n 由 (18) 式表达; ε_n 为纽曼因子, 满足 $\varepsilon_0 = 1$, 而 $n \geq 1$ 时 $\varepsilon_n = 2$. 至此, 我们导出了活塞面与界面不平行时障板活塞源的界面反射波表达式 (28) 式, 令 $R_{ME_1} \gg a$ 则 (28) 式近似为活塞面与界面不平行时轴对称指向性球面波的界面反射波表达式, 相比前人只考虑活塞面与界面平行的情况而言 [15-19], (28) 式完善了轴对称指向性球面波的界面响应理论. 比较 (28) 式和 (20) 式可知 $B_n = \varepsilon_n B(k_r)$, 而 $B(k_r)$ 已由前人给出 [23], 所以无需求解 B_n 满足的线性方程组, 通过点源叠加的方式就可以获得轴对称指向性球面波的界面反射波. 此外, 前文的算例表明 $R_{ME} \gg a$ 时轴对称指向性球面波的锥面波展开式 (19) 正确, 而这里从 (19) 式到 (28) 式的过程中用的都是恒等式, 因而 $R_{ME} \gg a$ 时轴对称指向性球面波的界面反射波 (28) 式也正确, 从而无需再通过算例检验 (28) 式.

4 轴对称指向性球面波的界面反射波的简化表达式

当活塞半径远小于声波波长 ($a \ll \lambda$) 时有 $k_f a \ll 1$, 代入 (2) 式得 $D(\theta_{ME}) \rightarrow 1$, 即指向性函数几乎不随 M 点的方位改变, 则由 (1) 式知轴对称指向性球面波退化为均匀球面波, 从而其界面反射波退化为均匀面波的界面反射波, 因此 $a \ll \lambda$ 的情况无需研究, 而对于 a 不远小于 λ 的一般情况, 本文研究轴对称指向性球面波的界面反射波的

简化表达式. 海洋地震勘探 [25] 和水下目标超声探测 [26,27] 时, 活塞中心 E 关于界面的镜像 E_1 到接收点 M 的距离通常远大于声波波长 ($R_{ME_1} \gg \lambda$), 则鞍点法的使用条件 $k_f R_{ME_1} \gg 1$ 得到满足, 从而可用鞍点法化简轴对称指向性球面波的界面反射波的表达式 (28).

4.1 基于鞍点法的简化表达式

由图 3 可知 $(z_M - d_E) = -|z_M - d_E|$, 将其代入 (28) 式, 再将 n 写为偶数和奇数阶的形式得

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{\pi a^2 \cos \alpha} \int_0^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) \exp[ik_z |z_M - d_E|] \times \sum_{m=0}^\infty [\varepsilon_{2m} J_{2m}(k_r r_M) \cos(2m\varphi_M) G_{2m} + \varepsilon_{2m+1} J_{2m+1}(k_r r_M) \times \cos(2m\varphi_M + \varphi_M) G_{2m+1}] dk_r. \quad (29)$$

由贝塞尔函数教材可知 [28] $J_{2m}(x) = J_{2m}(-x)$ 和 $J_{2m+1}(x) = -J_{2m+1}(-x)$, 其中 $m = 0, 1, 2, 3, \dots$, 再代入 (18) 式得

$$G_{2m}(k_r) = G_{2m}(-k_r), \\ G_{2m+1}(k_r) = -G_{2m+1}(-k_r). \quad (30)$$

由贝塞尔函数教材可知 [28]

$$J_{2m}(x) = \frac{1}{2} [H_{2m}^{(1)}(x) + H_{2m}^{(2)}(x)], \\ J_{2m+1}(x) = \frac{1}{2} [H_{2m+1}^{(1)}(x) + H_{2m+1}^{(2)}(x)], \\ H_{2m}^{(1)}(x) = -H_{2m}^{(2)}(-x), \\ H_{2m+1}^{(1)}(x) = H_{2m+1}^{(2)}(-x). \quad (31)$$

利用 (30) 式和 (31) 式, 并考虑到 k_z 和 $B(k_r)$ 是关于 k_r 的偶函数 [23], 则 (29) 式可改写为

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A}{2\pi a^2 \cos \alpha} \int_{-\infty}^\infty i \frac{k_r}{k_z} B(k_r) \exp[ik_z |z_M - d_E|] \times \sum_{n=0}^\infty \varepsilon_n H_n^{(1)}(k_r r_M) \cos(n\varphi_M) G_n(k_r) dk_r. \quad (32)$$

当 $k_r r_M \gg 1$ 时, $H_n^{(1)}(k_r r_M)$ 可以写为 [28]

$$H_n^{(1)}(k_r r_M) = \sqrt{\frac{2}{\pi k_r r_M}} \exp\left[i\left(k_r r_M - \frac{n\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right)\right]. \quad (33)$$

再将 (33) 式代入 (32) 式得

$$p_{f_ref} = A \sqrt{\frac{1}{2\pi r_M}} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_r}}{k_z} B(k_r) G^*(k_r) \times \exp[i(k_r r_M + k_z |z_M - d_E|)] dk_r, \quad (34)$$

其中

$$G^*(k_r) = \frac{1}{\pi a^2 \cos \alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n (-i)^n \cos(n\varphi_M) G_n(k_r), \quad (35)$$

其中 $G_n(k_r)$ 由 (18) 式表达. 由附录 A 可知, 最速下降路径和鞍点是由 e 指数函数中的宗量决定, 因而需确定 (34) 式中所有的 e 指数函数. (34) 式中 $B(k_r)$ 是平面波的反射系数, 不是 e 指数函数^[23], 而 $G^*(k_r)$ 也不是 e 指数函数 (见附录 B), 因此 (34) 式中只有 $\exp[i(k_r r_M + k_z |z_M - d_E|)]$ 是 e 指数函数, 则 (34) 式可改写为

$$p_{f_ref}(M) = A \sqrt{\frac{1}{2\pi r_M}} \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sqrt{k_r}}{k_z} B(k_r) \times G^*(k_r) \exp[k R_{ME_1} f(k_r)] dk_r, \quad (36)$$

其中 $R_{ME_1} = \sqrt{(z_M - d_E)^2 + r_M^2}$, 即活塞中心 E 的镜像 E_1 到接收点 M 的距离 (见图 3), $f(k_r)$ 写为

$$f(k_r) = i \left(\frac{k_r}{k} \frac{r_M}{R_{ME_1}} + \frac{k_z}{k} \frac{|z_M - d_E|}{R_{ME_1}} \right). \quad (37)$$

令 $f'(k_r) = 0$ 得鞍点 k_{an} 为

$$k_{an} = k_f \frac{r_M}{R_{ME_1}}, \quad (38)$$

由图 3 知 M_2 是 M 在 Oxy 面的投影, E_1 是 E 在 Oxy 面的投影, 则 MM_2 与 OE_1 平行, OM_2 垂直于 OE_1 , 又 $R_{OM_2} = r_M$, 所以

$$\frac{r_M}{R_{ME_1}} = \sin \beta_{ME_1}, \quad (39)$$

其中 $\beta_{ME_1} = \angle ME_1 E$, 即 M 与 E_1 的连线与界面法线的夹角 (见图 3). 我们注意到, (36) 式与 Aki 和 Richards^[23] 文献中的 (6.18) 式的形式相似, 并且它们有着相同的 e 指数函数, 这意味着它们的最速下降路径和鞍点也相同, 因此根据 Aki 和 Richards^[23] 中图 6.8 将实轴积分式 (36) 变换到最速下降路径

$$\sin \beta_{ME_1} = \frac{r_M}{R_{ME_1}} = \frac{r_M}{\sqrt{(z_M - d_E)^2 + r_M^2}},$$

$$\sin \theta_{ME_1} = \frac{\sqrt{[\cos \alpha \cdot r_M \cos \varphi_M + \sin \alpha \cdot (z_M - d_E)]^2 + r_M^2 \sin^2 \varphi_M}}{R_{ME_1}}, \quad (45)$$

上. 海洋地震勘探和 underwater 目标超声探测时有 $R_{ME_1} \gg \lambda$, 则鞍点法的使用条件 $k_f R_{ME_1} \gg 1$ 得到满足, 将 (36) 式—(39) 式代入鞍点法公式 (A1) 和 (A2) 得

$$p_{f_ref}(M) \rightarrow \frac{A(\omega)}{R_{ME_1}} B(k_f \sin \beta_{ME_1}) G^*(k_f \sin \beta_{ME_1}) \times \exp(ik_f R_{ME_1}), \quad (40)$$

其中 $R_{ME_1} = \sqrt{(z_M - d_E)^2 + r_M^2}$ 为接收点 M 与镜像点 E_1 的距离, G^* 由 (35) 式表达. 由反射波 (28) 式和入射波 (19) 式可知两者的不同处只在于 $B(k_r) \exp[ik_z |z_M - d_E|]$ 和 $\exp[ik_z (z_M + d_E)]$, 由于这两项均不参与鞍点法的代数处理 (见 (28) 式到 (40) 式的推导过程), 所以 $k_f R_{ME} \gg 1$ 下 ($k_f R_{ME_1} \gg 1$ 满足意味着 $k_f R_{ME} \gg 1$ 也满足) 入射波 (19) 式可通过鞍点法简化为

$$p_f(M) \rightarrow \frac{A(\omega)}{R_{ME}} G^*(k_f \sin \beta_{ME}) \exp(ik_f R_{ME}), \quad (41)$$

其中 $R_{ME} = \sqrt{(z_M + d_E)^2 + r_M^2}$ 为接收点 M 与活塞中心 E 的距离, β_{ME} 为 M 与 E 的连线与界面法线的夹角. 比较 (1) 式和 (41) 式可知

$$G^*(k_f \sin \beta_{ME}) = D(\theta_{ME}), \quad (42)$$

其中 θ_{ME} 为 M 与 E 的连线与活塞 S_P 轴线的夹角. 由 (42) 式可得

$$G^*(k_f \sin \beta_{ME_1}) = D(\theta_{ME_1}), \quad (43)$$

其中 θ_{ME_1} 为 M 与 E_1 的连线与活塞 S_{P_1} 轴线的夹角 (见图 3). 将 (43) 式代入 (40) 式得轴对称指向性球面波的界面反射波的简化表达式

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A(\omega)}{R_{ME_1}} B(k_f \sin \beta_{ME_1}) D(\theta_{ME_1}) \times \exp(ik_f R_{ME_1}), \quad (44)$$

其中 $R_{ME_1} = \sqrt{(z_M - d_E)^2 + r_M^2}$ 为 M 与 E_1 的距离, $d_E = d_{E_1}$ 为 E_1 点到界面的距离, $D(\theta_{ME_1}) = \frac{2 J_1(k_f a \sin \theta_{ME_1})}{k_f a \sin \theta_{ME_1}}$ 即指向性函数 (见 (2) 式), B 为平面波由流体入射流体-固体平面界面的反射系数^[23]. 利用坐标变换关系可知

其中 (r_M, φ_M, z_M) 为 M 点的柱坐标 (见图 3). 比较反射波简化式 (44) 和入射波 (1) 式可知, 轴对称指向性球面波的反射波可视为镜像源的波乘以反射系数 B , 其中镜像源的波指镜像活塞面 S_{P_1} 激发的轴对称指向性球面波. 因此简化式 (44) 的物理含义比 (28) 式更为清楚. 此外, 与 (28) 式相比, 简化式 (44) 无需计算贝塞尔函数在椭圆面上积分、不同阶锥面波的求和及波数域的积分, 所以简化式 (44) 省去了巨大的计算量, 减少了大量计算时间. 另外, 需要说明的是, (1) 式表明当活塞中心到接收点的距离远大于活塞半径时 ($R_{ME} \gg a$), 障板活塞源辐射场近似为轴对称指向性球面波, 所以我们考虑轴对称指向性球面波时应默认 $R_{ME} \gg a$ 成立, 从而考虑其界面反射波时有 $R_{ME_1} \gg a$ 成立. 因此简化式 (44) 的成立条件是 $R_{ME_1} \gg a$ 和 $k_f R_{ME_1} \gg 1$ 同时成立, 其中 $k_f R_{ME_1} \gg 1$ 是鞍点法的使用条件, 而 $R_{ME_1} \gg a$ 是默认成立的条件.

值得一提的是, 简化式 (44) 也可用另一种更为简单的方式导出. 因考虑轴对称指向性球面波的界面反射波时默认 $R_{ME_1} \gg a$ 成立, 则由 $k_f R_{ME_1} \gg 1$ 条件可导出 $k_f R_{MP_1} \gg 1$, 即对于活塞面上任意一点 P 鞍点法的使用条件成立, 所以可通过鞍点法将活塞面 S_P 上单个点源 P 的辐射场的界面反射波 (21) 式化简为^[23]

$$\tilde{p}_{f_ref}(M, P) = \frac{A}{\pi a^2} B(k_f \sin \beta_{MP_1}) \frac{\exp(ik_f R_{MP_1})}{R_{MP_1}}, \quad (46)$$

其中 R_{MP_1} 为 M 到 P_1 (即 P 的镜像) 的距离, β_{MP_1} 为 M 与 P_1 的连线与界面法线的夹角, 即 $\beta_{MP_1} = \angle MP_1 P$ (见图 3). 由 (1) 式知 $R_{ME} \gg a$ 时活塞面 S_P 上所有点源辐射场的界面反射波的叠加近似为轴对称指向性球面波的界面反射波, 又因在活塞面 S_P 上叠加 (46) 式相当于在镜像活塞面 S_{P_1} 上作叠加, 所以轴对称指向性球面波的界面反射波为

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A(\omega)}{\pi a^2} \int_{S_{P_1}} B(k_f \sin \beta_{MP_1}) \frac{\exp(ik_f R_{MP_1})}{R_{MP_1}} dS_{P_1}. \quad (47)$$

前文提到 $R_{ME_1} \gg a$ 成立, 即接收点 M 到活塞中心镜像 E_1 的距离远大于活塞半径, 则对于 M 点的观察者而言, 活塞面 S_{P_1} 上的动点 P_1 与定点 E_1 几乎没有区别, 因而 $\sin \beta_{MP_1} \approx \sin \beta_{ME_1}$, 所以 (47) 式中的 B 可以拿到积分号外, 即

$$p_{f_ref}(M) = \frac{A(\omega)}{\pi a^2} B(k_f \sin \beta_{ME_1}) \times \int_{S_{P_1}} \frac{\exp(ik_f R_{MP_1})}{R_{MP_1}} dS_{P_1}, \quad (48)$$

再利用 (1) 式可得

$$\begin{aligned} & \int_{S_{P_1}} \frac{\exp(ik_f R_{MP_1})}{R_{MP_1}} dS_{P_1} \\ &= \frac{A(\omega)}{R_{ME_1}} D(\theta_{ME_1}) \exp(ik_f R_{ME_1}), \\ & (R_{ME_1} \gg a), \end{aligned} \quad (49)$$

最后将 (49) 式代入 (48) 式即得简化式 (44).

4.2 算例检验

本节通过算例检验简化式 (44) 的正确性, 即比较 (44) 式和 (28) 式的一致性. 声源设定与前文算例相同, 流体和固体参数见表 1, 地层纵波和横波的品质因子分别为 80 和 60, 流体中声波的品质因子为 100.

参照图 3, 设活塞面 S_P 与界面 Oxy 的夹角为 $\alpha = 30^\circ$, 活塞中心 E 与界面的距离为 $d_E = 5$ m, 则 E 点位于 z 轴上 $z = -d_E = -5$ m 处; 设接收点 M 的位置为 $(r_M, \varphi_M, z_M) = (10\sqrt{3}, 0, -5)$, 其中 r_M, φ_M 和 z_M 的单位分别为米 (m)、度 ($^\circ$) 和米 (m), 此后默认为该单位. 由 M 点和 E_1 点的坐标可知 $R_{ME_1} = 20$ m $\gg 1$ m, 而小活塞和大活塞的半径分别为 $a = 0.1$ m 和 $a = 1$ m, 所以有 $R_{ME_1} \gg a$; 由于流体中声波波长为 $\lambda = 0.15\text{--}0.75$ m, 则 $R_{ME_1}/\lambda \geq 26.7$ m $\gg 1$ m, 所以鞍点法的使用条件 $kR_{ME_1} \gg 1$ 成立. 综上可得 $R_{ME_1} \gg a$ 和 $kR_{ME_1} \gg 1$ 成立, 则简化式 (44) 可以用来计算轴对称指向性球面波的界面反射波.

记 (28) 式和简化式 (44) 计算幅度谱分别为 P_{ref} 和 P_{ref_jian} . 图 4 为 P_{ref} 与 P_{ref_jian} 的比较, 其中图 4(a) 对应 $a = 0.1$ m 时快速地层, 图 4(b) 对应 $a = 0.1$ m 时慢速地层, 图 4(c) 对应 $a = 1$ m 时快速地层, 图 4(d) 对应 $a = 1$ m 时慢速地层. 图 4(a)—图 4(d) 表明, 无论快速地层还是慢速地层, 无论小活塞还是大活塞, 均有 P_{ref_jian} 与 P_{ref} 一致, 因此简化式 (44) 与 (28) 式一致, 即简化式 (44) 正确. 另外, 因简化式 (44) 是通过鞍点法导出的, 所以鞍点法的使用条件 $kR_{ME_1} \gg 1$ 决定了简化式 (44) 的适用范围. 上述算例中声源频率为高频海洋地震勘

探频率 (2—10 kHz), 并且有 $R_{ME_1} = 20$ m, 所以简化式 (44) 适用于 $R_{ME_1} \geq 20$ m 的高频海洋地震勘探问题, 由于活塞中心 E 距地层界面 10 m 以上还是容易满足的, 所以简化式 (44) 有着较为广泛的适用范围. 另外, 超声频率下 ($f > 20$ kHz), $R_{ME_1} \geq 1$ m 时简化式 (44) 也是适用的, 但这里不再给出具体算例.

5 位置参数对界面反射波的影响

本节基于简化式 (44), 研究活塞面与界面的夹角 α 、接收点 M 的环向方位角 φ_M 和线段 ME_1 与界面法线的夹角 β_{ME_1} 对轴对称指向性球面波的界面反射波的影响, 其中接收点 M 的位置由柱坐标 (r_M, φ_M, z_M) 描述 (见图 3), 活塞中心 E 位于 $(0, 0, -d_E)$, 则活塞中心镜像 E_1 位于 $(0, 0, d_E)$. 由于活塞源嵌入无限大障板中, 所以障板背面不存在活塞源的辐射场, 例如当活塞与界面的夹角为 $\alpha = 90^\circ$ 时, 由图 3 可知源的辐射场 (即入射波) 只存在于 $x \geq 0$ 的半空间, 而当 $\alpha = 0^\circ$ 时源的辐射场只存在于 $z \geq -d_E$ 的半空间; 因此对于 $\alpha = 0^\circ - 90^\circ$ 的活

塞源而言, 设界面反射波的接收点 M 位于 $x \geq 0$ 且 $-d_E \leq z \leq 0$ 的空间. 声源设定与第 4 节一致, 流体和固体地层参数见表 1, 流体中声波品质因子为 100, 固体中纵波和横波的品质因子分别为 80 和 60.

5.1 活塞与界面的夹角的影响

记过活塞轴线且与界面垂直的面为 η 面, 则 $\varphi_M = 0^\circ$ 时 M 位于 η 面, $\varphi_M = 90^\circ$ 时 M 位于与 η 面垂直的面. 设活塞中心 E 位于 z 轴上 $z = -d_E = -10$ m 处, 反射波接收点 M 位于 $(r_M, \varphi_M, z_M) = (20\sqrt{3}, 0, -10)$, 其中 r_M, φ_M 和 z_M 的单位分别为米 (m)、度 ($^\circ$) 和米 (m), 此后默认为该单位. 参考图 3 可知, M 位于 η 面, 并且 $\beta_{ME_1} = \angle ME_1O = 60^\circ$. 地层取为快速地层, 见表 1. 图 5 给出了不同夹角 α 下在 M 点 $(20\sqrt{3}, 0, -10)$ 处的反射波, 其中图 5(a) 和图 5(b) 分别对应 $a = 0.1$ m 和 $a = 1$ m. 由图 5(a) 可知, 小活塞源 ($a < \lambda$) 的辐射场的界面反射波随 α 变化不大, 波形随 α 增加出现先增后减的现象, 并且与活塞面和界面平行时 ($\alpha = 0^\circ$) 的结果相差不大. 由图 5(b) 可知, 大活塞源 ($a > \lambda$) 的辐射场的界面反射波随

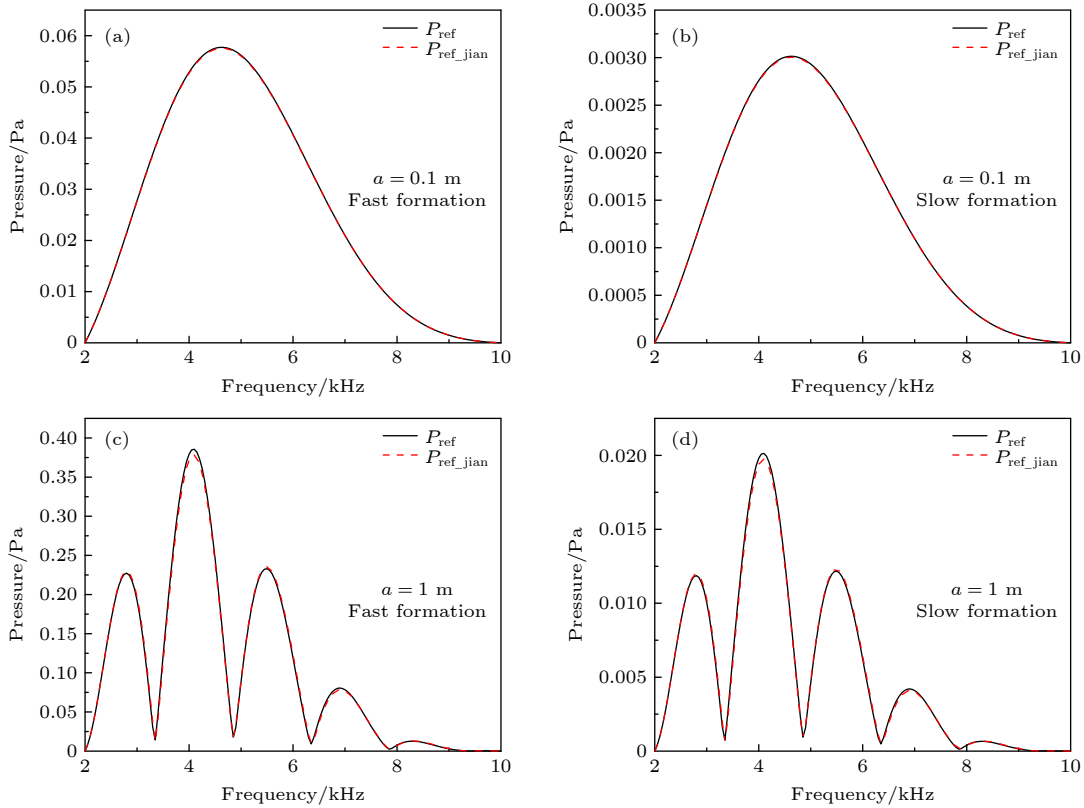


图 4 P_{ref} 与 P_{ref_jian} 的比较 (a) $a = 0.1$ m 且快速地层; (b) $a = 0.1$ m 且慢速地层; (c) $a = 1$ m 且快速地层; (d) $a = 1$ m 且慢速地层
 Fig. 4. Comparison of P_{ref} and P_{ref_jian} : (a) $a = 0.1$ m and fast formation; (b) $a = 0.1$ m and slow formation; (c) $a = 1$ m and fast formation; (d) $a = 1$ m and slow formation.

α 显著改变, 波形随着 α 的增加出现先增后减的现象, 并且 $\alpha = 30^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 下的波形相等. 慢速地层下的结果类似, 结论同上. 接下来对图 5 的结果做出解释, 由于 $a < \lambda$ 时入射波的指向性函数 D 随 θ 的改变不太敏感, 所以小活塞源的辐射场的指向性较弱, 因而其界面反射波随 α 的改变不大 (见图 5(a)), 而 $a > \lambda$ 时情况相反 (见图 5(b)). (44) 式表明轴对称指向性球面波的界面反射波可以视为镜像活塞源激发的波 $\frac{A(\omega)}{R_{ME_1}} D(\theta_{ME_1}) \exp(ikR_{ME_1})$ (下文简称镜像源的波) 与反射系数 $B(k \sin \beta_{ME_1})$ 的乘积, 由于图 5 中变化的位置参数只有 α , 则由 (45) 式和 (2) 式可知镜像源的波受影响, 而反射系数 B 不受影响, 所以镜像源的波随 α 的变化规律即界面反射波随 α 的变化规律. 对于图 5 而言, $\alpha = 60^\circ$ 时镜像活塞轴线经过 M 点, 得 $\theta_{ME_1} = 0^\circ$ (见图 3), 则 D 取得最大值 1, 此时 M 点处镜像源的波取得最大值; 由于图 5 中 R_{ME_1} 不变, 则从 0° 开

始增加 α 直至 90° 的过程中, 镜像活塞轴线先接近 M 点再远离 M 点, 所以 M 点处镜像源的波先增大后减小. 因此, 由镜像源的波随 α 的变化规律可知, 图 5 中界面反射波随 α 的增加而先增大后减小, 并且在 $\alpha = 60^\circ$ 处取得最大值. 此外, 图 5 中 $\alpha = 30^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 下的镜像活塞轴线关于 ME_1 对称, 则 $\alpha = 30^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 下的界面反射波也关于 ME_1 对称, 又因 M 点接收的是声压, 所以图 5 中 $\alpha = 30^\circ$ 和 $\alpha = 90^\circ$ 下的界面反射波相等.

前面算例表明, 在给定 M 点 (r_M, φ_M, z_M) 和 E_1 点 ($0, 0, d_E$) 的情况下, 改变 α 则镜像活塞的轴线与 M 点的距离 d 改变, 又因 R_{ME_1} 不随 α 改变, 所以最小的 d 值对应镜像源的波最大 (见 (44) 式、(45) 式和 (2) 式). 因此, 需要找到使 d 最小的 α 值, 从而判断镜像源的波随 α 的变化规律, 继而判断界面反射波随 α 的变化规律. 由图 3 知镜像活塞的轴线与 M 点的距离 d 等于 $R_{ME_1} \sin \theta_{ME_1}$, 则由 (45) 式知

$$d = \sqrt{[\cos \alpha \cdot r_M \cos \varphi_M + \sin \alpha \cdot (z_M - d_E)]^2 + r_M^2 \sin^2 \varphi_M}. \quad (50)$$

在给定 M 点 (r_M, φ_M, z_M) 和 E_1 点 ($0, 0, d_E$) 的情况下, 求 d 的导数零点 (d 对 α 的导数) 可得

$$\alpha^* = \arctan \left(\frac{r_M \cos \varphi_M}{d_E - z_M} \right), \quad (51)$$

由于 d 的二阶导数在 $\alpha = \alpha^*$ 处大于零, 所以 $\alpha = \alpha^*$ 时镜像活塞轴线与 M 点的距离 d 最小, 此时 M 点处镜像源的波最大. 由于反射系数不随 α 改变, 则镜像源的波随 α 的变化规律即界面反射波随 α 的变化规律, 所以 $\alpha = \alpha^*$ 时 M 点处的界面反射波最

大. 因此 $0^\circ \leq \alpha < \alpha^*$ 时界面反射随 α 增加而增大, $\alpha^* \leq \alpha \leq 90^\circ$ 时界面反射随 α 增加而减小.

图 6 给出了不同夹角 α 下在 M 点 ($20\sqrt{3}, 45, -10$) 处 (此时 M 点离开 η 面) 的反射波, 其中图 6(a) 和图 6(b) 分别对应 $a = 0.1 \text{ m}$ 和 $a = 1 \text{ m}$. 由图 6(a) 可知, 小活塞源 ($a < \lambda$) 的辐射场的界面反射波随 α 变化较小, 与活塞面和界面平行时 ($\alpha = 0^\circ$) 的结果相差较小. 由图 6(b) 可知大活塞源 ($a > \lambda$) 的辐射场的界面反射波随 α 改变明显, 波形随着

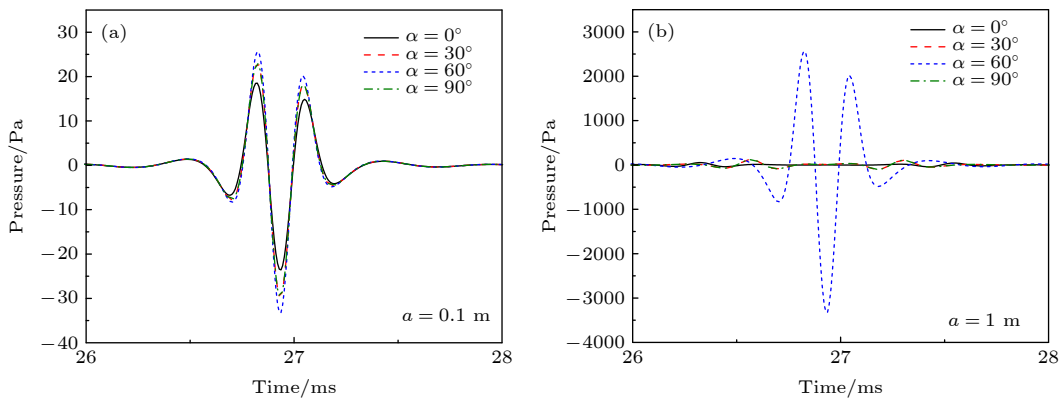


图 5 不同夹角 α 下在 M 点 ($20\sqrt{3}, 0, -10$) 处的反射波 (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$

Fig. 5. Reflected wave under different included angle α for point M at ($20\sqrt{3}, 0, -10$): (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$.

α 的增加出现先增后减的现象. 慢速地层下的结果类似, 结论同上. 图 7 给出了不同夹角 α 下在 M 点 $(20\sqrt{3}, 90, -10)$ 处 (此时 M 点位于与 η 面垂直的平面) 的反射波, 其中图 7(a) 和图 7(b) 分别对应 $a = 0.1 \text{ m}$ 和 $a = 1 \text{ m}$. 由图 7(a) 可知, 小活塞源 ($a < \lambda$) 的辐射场的界面反射波几乎不随 α 变化, 与活塞面和界面平行时 ($\alpha = 0^\circ$) 的结果几乎没有差别. 由图 7(b) 可知大活塞源 ($a > \lambda$) 的辐射场的界面反射波随 α 改变较为明显, 波形随着 α 的增加而减小, 不同于图 6 中波形随着 α 的增加而先增后减. 慢速地层下的结果类似, 结论同上. 接下来对上述结果做出解释, 由 (51) 式知图 6 对应 $\alpha^* = 50.8^\circ$, 则界面反射波在 $\alpha = \alpha^* = 50.8^\circ$ 处最大, 所以波形随 α 的增加而先增后减; 由 (51) 式知图 7 对应 $\alpha^* = 0^\circ$, 则界面反射波在 $\alpha = \alpha^* = 0^\circ$ 处最大, 所以波形随 α 增加而减小.

5.2 接收点的环向方位角的影响

由于障板背面无辐射场存在, 则有意义的方位

角范围为 $\varphi_M = -90^\circ \sim 90^\circ$. 由图 3 知活塞和界面均关于 Oxz 面对称, 又 M 点接收的是流体中的声压, 所以 $\varphi_M = 0^\circ \sim 90^\circ$ 范围的界面反射波与 $\varphi_M = -90^\circ \sim 0^\circ$ 范围的界面反射波对称且相等. 设活塞中心 E 位于 $(0, 0, -10)$, 则 E 的镜像 E_1 位于 $(0, 0, 10)$, 设接收点 M 的位置为 $(20\sqrt{3}, \varphi_M, -10)$, 得 $R_{ME_1} = 40 \text{ m}$ 和 $\beta_{ME_1} = 60^\circ$, 并且 R_{ME_1} 和 β_{ME_1} 不随 φ_M 改变. 地层取为快速地层, 见表 1.

图 8 给出了 $\alpha = 45^\circ$ 时不同 φ_M 下的界面反射波和其指向图, 其中指向图是向 $\varphi_M = 0^\circ$ 处的波形的最大幅度归一, 图 8(a) 对应 $a = 0.1 \text{ m}$ 时的反射波, 图 8(b) 对应 $a = 0.1 \text{ m}$ 时的指向图, 图 8(c) 对应 $a = 1 \text{ m}$ 时的反射波, 图 8(d) 对应 $a = 1 \text{ m}$ 时的指向图. 由图 8(a) 和图 8(c) 可知, 反射波在 $\varphi_M = 0^\circ$ 处最大, 并且随着 φ_M 的增加而减小. 因 β_{ME_1} 不随 φ_M 改变, 则反射系数也不随 φ_M 改变 (见 (45) 式), 所以镜像源的波随 φ_M 的变化规律决定了反射波随 φ_M 的变化规律; 由于镜像活塞的轴线位于 $\varphi = 0^\circ$

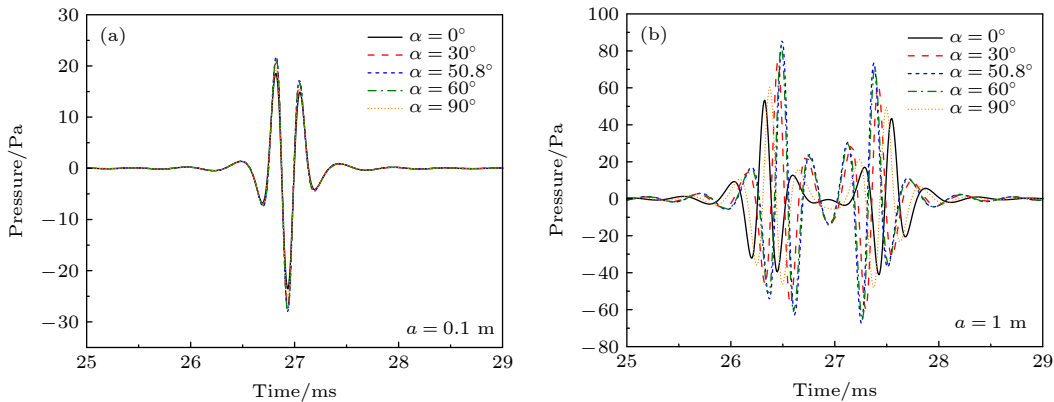


图 6 不同夹角 α 下在 M 点 $(20\sqrt{3}, 45, -10)$ 处的反射波 (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$

Fig. 6. Reflected wave under different included angle α for point M at $(20\sqrt{3}, 45, -10)$: (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$.

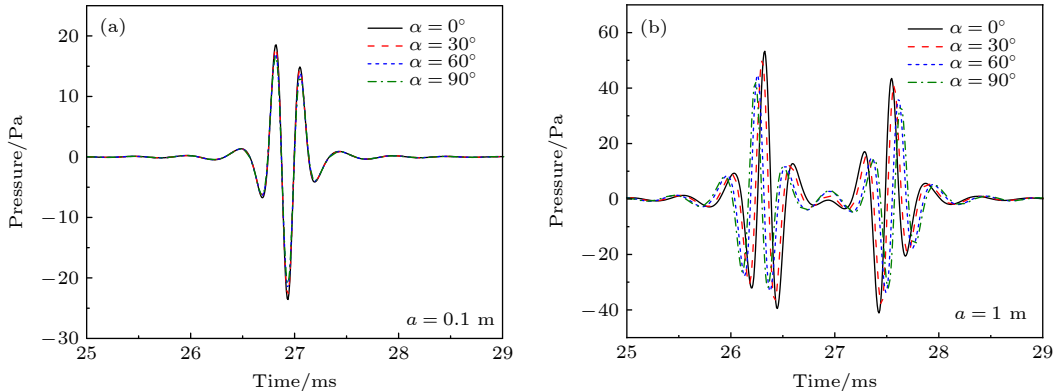


图 7 不同夹角 α 下在 M 点 $(20\sqrt{3}, 90, -10)$ 处的反射波 (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$

Fig. 7. Reflected wave under different included angle α for point M at $(20\sqrt{3}, 90, -10)$: (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$.

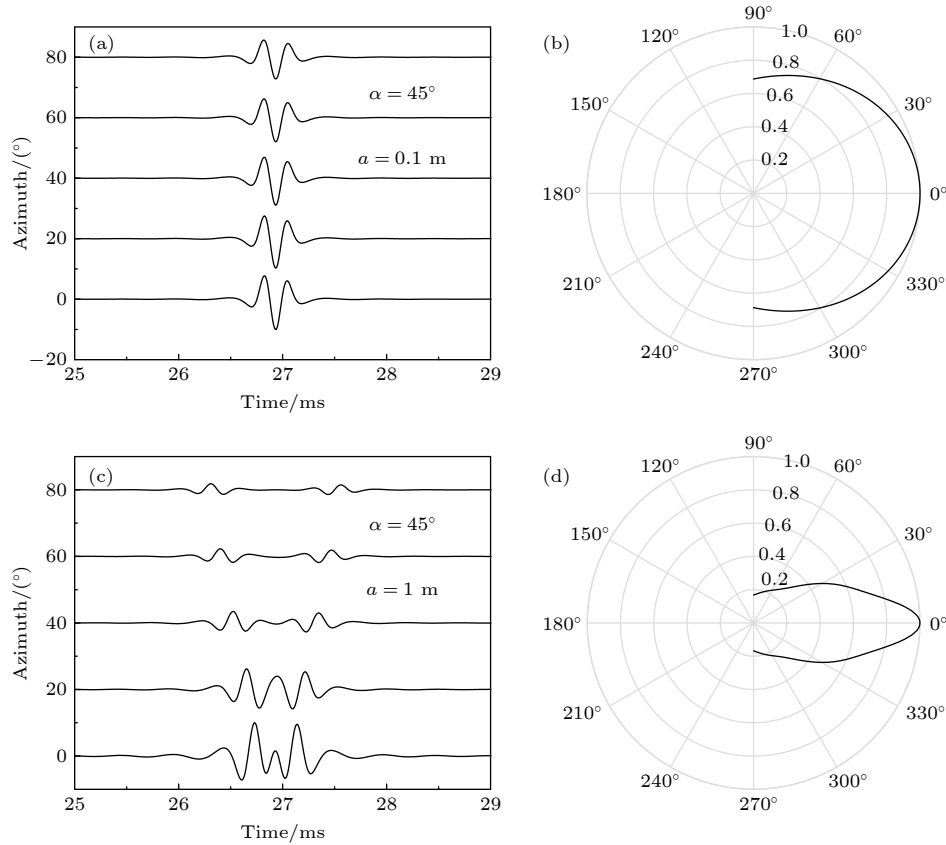


图 8 $\alpha = 45^\circ$ 时不同 φ_M 下的反射波和其指向图 (a) $a = 0.1$ m 时的反射波; (b) $a = 0.1$ m 时的指向图; (c) $a = 1$ m 时的反射波; (d) $a = 1$ m 时的指向图

Fig. 8. Reflected waves and directional diagrams at different azimuths φ_M for $\alpha = 45^\circ$: (a) Reflected waves for $a = 0.1$ m; (b) directional diagram for $a = 0.1$ m; (c) reflected waves for $a = 1$ m; (d) directional diagram for $a = 1$ m.

面 (即 Oxz 面, 见图 3), 且 R_{ME_1} 不变, 则增加 φ_M 导致 M 点与镜像活塞轴线的距离增加, 所以镜像源的波减小, 因而反射波在 $\varphi_M = 0^\circ$ 处最大, 并且随 φ_M 的增加而减小. 另外, 比较图 8(a) 和图 8(c) 可知, 小活塞情况下反射波随 φ_M 的增加缓慢减小, 而大活塞情况下反射波随 φ_M 的增加迅速减小, 所以大活塞情况下反射波对 φ_M 更为敏感. 此外, 比较图 8(b) 和图 8(d) 可知, 大活塞情况下的反射波的指向性强于小活塞, 这是因为在反射系数不变的情况下, 镜像活塞源的辐射场的指向性决定了反射波的指向性, 而由 (2) 式可知大活塞源的辐射场的指向性强于小活塞源, 那么其反射波的指向性也强于小活塞.

图 9 给出了不同 α 下的反射波的指向图, 其中图 9(a) 和图 9(b) 分别对应 $a = 0.1$ m 和 $a = 1$ m. 由图 9(a) 和图 9(b) 可知有两个特征存在: 小活塞情况下反射波的指向性对 α 的改变不太敏感, 而大活塞情况下反射波的指向性对 α 的改变很敏感; 反射波的指向性随 α 的增加出现先增后减的现象.

第一个特征的出现是因为 α 的改变不影响反射系数, 则镜像活塞源的辐射场的指向性决定了反射波的指向性, 由于镜像小活塞源的指向性较弱, 所以反射波的指向性对 α 的改变不太敏感, 由于镜像大活塞源的指向性强, 所以反射波的指向性对 α 的改变很敏感. 第二个特征的出现是因为 $\alpha = \beta_{ME_1}$ 且 $\varphi_M = 0^\circ$ 时镜像活塞的轴线通过 M 点, 对应镜像源的波最大, 又 $\beta_{ME_1} = 60^\circ$ (由 M 点 E_1 点的位置确定, 但不随 φ_M 改变), 则 $\alpha = 60^\circ$ 且 $\varphi_M = 0^\circ$ 时的镜像源的波最大, 所以在 $\alpha = 60^\circ$ 下从 $\varphi_M = 0^\circ$ 开始增加或减小 φ_M 将导致镜像源的波剧烈变化, 因而 $\alpha = 60^\circ$ 下反射波的指向性最强, 则反射波的指向性随 α 的增加出现先增后减的现象.

5.3 线段 ME_1 与界面法线的夹角的影响

线段 ME_1 与界面法线的夹角即 β_{ME_1} , 设活塞中心 E 位于 z 轴上 $z = -d_E = -10$ m 处, 当 M 点位于 $(7.279, \varphi_M, -10)$ 时有 $\beta_{ME_1} = 20^\circ$, 而当 M 点位于 $(16.782, \varphi_M, -10)$ 时有 $\beta_{ME_1} = 40^\circ$. 图 10 给

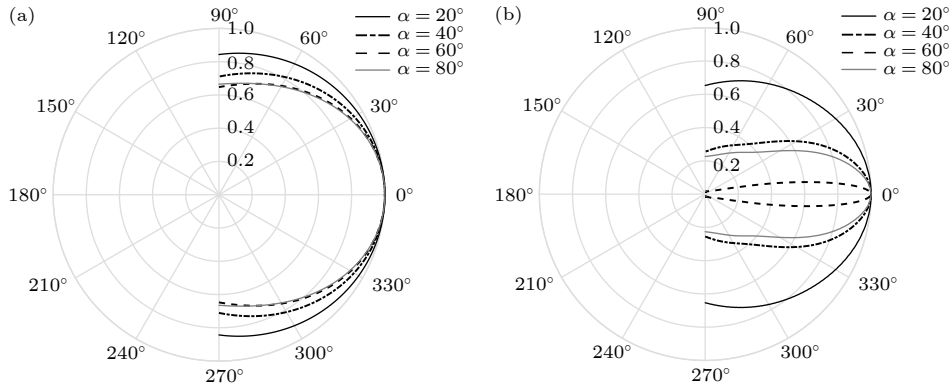


图 9 不同夹角 α 下的反射波的指向图 (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$.
Fig. 9. Directional diagrams under different angle α : (a) $a = 0.1 \text{ m}$; (b) $a = 1 \text{ m}$.

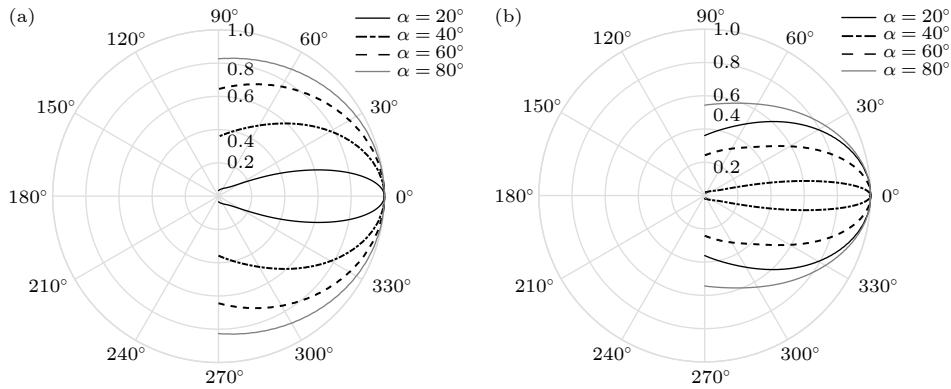


图 10 $a = 1 \text{ m}$ 时不同夹角 α 下的指向图 (a) $\beta_{ME_1} = 20^\circ$; (b) $\beta_{ME_1} = 40^\circ$.
Fig. 10. Directional diagrams under different angle α for $a = 1 \text{ m}$: (a) $\beta_{ME_1} = 20^\circ$; (b) $\beta_{ME_1} = 40^\circ$.

出了 $a = 1 \text{ m}$ 时不同 α 下的反射波的指向图, 其中图 10(a) 和图 10(b) 分别对应 $\beta_{ME_1} = 20^\circ$ 和 $\beta_{ME_1} = 40^\circ$. 图 10(a) 表明反射波的指向性随着 α 的增加而先增后减, 在 $\alpha = \beta_{ME_1} = 20^\circ$ 处达到最大值; 图 10(b) 表明反射波的指向性随着 α 的增加而先增后减, 在 $\alpha = \beta_{ME_1} = 40^\circ$ 处达到最大值; 因此, 界面反射波的指向性随着 α 的增加而先增后减, 在 $\alpha = \beta_{ME_1}$ 处达到最大值.

由 (44) 式和 (45) 式可知, β_{ME_1} 直接影响反射系数 B , 所以在给定镜像源的波 $\frac{A(\omega)}{R_{ME_1}} D(\theta_{ME_1}) \times \exp(ikR_{ME_1})$ 和地层参数的情况下, β_{ME_1} 决定了界面反射波的大小. 图 11 给出了反射系数的绝对值 $|B|$ 随 β_{ME_1} 的变化曲线 (B 的量纲为 1), 可以看出, 快速地层下的反射系数大于慢速地层下的反射系数, 因而快速地层下的界面反射波总是大于慢速地层, 而图 4 恰好说明了这一点.

另外, 由 (44) 式可知, 轴对称指向性球面波的反射波中含有 $\frac{1}{R_{ME_1}} \exp(ikR_{ME_1})$ 项, 所以反射波的

到时 t_d 等于镜像活塞中心到接收点的距离 R_{ME_1} 除以流体中声速 v_f , 即 $t_d = \frac{R_{ME_1}}{v_f} = \frac{[(z_M - d_E)^2 + r_M^2]^{1/2}}{v_f}$, 其中 z_M 和 r_M 分别为接收点的轴向和径向坐标. 因此, 利用反射波的到时 t_d 可推算活塞源与界面的距离 d_E , 而图 5—图 7 中反射波的到时都符合 t_d 的上述表达式.

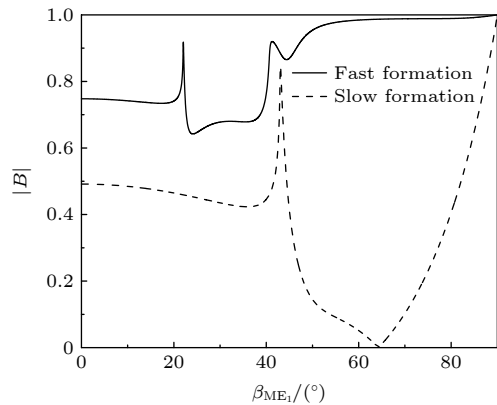


图 11 $|B|$ 随 β_{ME_1} 的变化曲线
Fig. 11. Variation curve of $|B|$ with β_{ME_1} .

6 结 论

本文导出了无限大平面刚性障板中圆形活塞源 (简称障板活塞源) 辐射场的锥面波展开式 (19), 该式由多阶锥面波构成, 适用于任意场点. 前人在活塞中心到接收点的距离远大于活塞半径的条件下, 将障板活塞源辐射场近似为轴对称指向性球面波 (1) 式, 而本文算例表明该条件下障板活塞源辐射场的锥面波展开式 (19) 近似为轴对称指向性球面波的锥面波展开式. 利用 (19) 式导出了活塞面与界面呈任意夹角时障板活塞源辐射场的界面反射波 (28) 式, 并且当活塞中心的镜像点到接收点的距离远大活塞半径时, (28) 式近似为轴对称指向性球面波的界面反射波表达式. (28) 式相比前人只考虑活塞面与界面平行的情况而言, 完善了无限大平面刚性障板中圆形活塞源的界面响应理论.

海洋地震勘探和水下目标超声探测中, 活塞中心的镜像点到接收点的距离通常远大于声波波长, 从而鞍点法的使用条件得到满足. 本文利用鞍点法和 (1) 式将轴对称指向性球面波的反射波 (28) 式化简为了 (44) 式. 简化式 (44) 适用于活塞中心的镜像点到接收点的距离同时远大于声波波长和活塞半径的情况. 简化式 (44) 数学形式简洁, 物理含义清楚, 即轴对称指向性球面波的反射波等于镜像活塞源激发的轴对称指向性球面波与反射系数的乘积.

本文基于简化式 (44), 通过数值算例研究了活塞面与界面的夹角 α 、接收点 M 的环向方位角 φ_M 和线段 ME_1 与界面法线的夹角 β_{ME_1} 对轴对称指向性球面波的界面反射波的影响. 当活塞半径小于流体中声波波长时 ($a < \lambda$), 反射波对 α 不太敏感, 当活塞半径大于流体中声波波长时 ($a > \lambda$), 反射波对 α 很敏感. 增加活塞与界面的夹角 α , 反射波先增加后减小, 而且 $\alpha = \beta_{ME_1}$ 时取得最大值. 因障板背面无波场存在, 则接收点 M 有意义的方位角范围为 $\varphi_M = -90^\circ \sim 90^\circ$, 又反射波场关于 $\varphi_M = 0^\circ$ 平面对称, 且 M 点接收的是声压, 所以 $\varphi_M = 0^\circ \sim 90^\circ$ 与 $\varphi_M = -90^\circ \sim 0^\circ$ 的反射波对称且相等. 在 $\varphi_M = -90^\circ \sim 90^\circ$ 上, 反射波随方位角 φ_M 的增加而先增后减, 在 $\varphi_M = 0^\circ$ 处取得最大值. $a < \lambda$ 时反射波对 φ_M 不太敏感, 反射波的指向性较弱, $a > \lambda$ 时反射波对 φ_M 很敏感, 反射波的指向性很强 (相比 $a < \lambda$

而言). $a < \lambda$ 时反射波的指向性对 α 不太敏感, $a > \lambda$ 时反射波的指向性对 α 很敏感; 增加活塞与界面的夹角 α , 反射波的指向性先增强后减小, 当 $\alpha = \beta_{ME_1}$ 时反射波的指向性最强. β_{ME_1} 直接影响反射系数, $\beta_{ME_1} = 0^\circ \sim 90^\circ$ 时快速度地层的反射系数大于慢速地层的反射系数, 因而快速度地层下的反射波大于慢速地层下的反射波.

附录A 鞍点法

这里给出鞍点法的简要介绍^[23]. 对于积分式

$$I(p) = \int_C F(p) \exp(xf(p)) dp, \quad (A1)$$

其中 $F(p)$ 和 $f(p)$ 是关于复数 p 的解析函数, x 是正实数, C 是积分路径 (通常为实轴积分路径). 当 x 是足够大的正实数时, $I(p)$ 的值由 $\exp(x\text{Re}f(p))$ 控制, 若将积分路径 C 变换为最速下降路径 (即 $\text{Im}f(p) = \text{const}$ 且经过鞍点, 而鞍点满足 $f'(p_{\text{an}}) = 0$), 则 $I(p)$ 主要由鞍点附近的最速下降路径积分决定, 并可以写为

$$I(p) \rightarrow \sqrt{\frac{2\pi}{xf''(p_{\text{an}})}} F(p_{\text{an}}) e^{i\chi} \exp(xf(p_{\text{an}})), \quad x \rightarrow \infty, \quad (A2)$$

其中 χ 是鞍点附近的最速下降路径与正 $\text{Re}(p)$ 轴的夹角, 设 ϕ 是 $f''(p_{\text{an}})$ 的相位角 ($\phi \in (-\pi, \pi)$), 当积分路径是从左往右走时则 $\chi = -\frac{1}{2}(\pi + \phi)$, 反之则 $\chi = \frac{1}{2}(\pi - \phi)$.

附录B $G^*(k_r)$ 的结构分析

由 (35) 式可知, $G^*(k_r)$ 中只有 $G_n(k_r)$ 可能是 e 指数函数. $G_n(k_r)$ 是贝塞尔函数在椭圆面上的积分, 与活塞面与界面的夹角 α 有关, 而与接收点的位置无关. 当活塞面与界面平行时 $\alpha = 0$, 由 (18) 式得 $G_n(k_r) = 0$ ($n \geq 1$) 和 $G_0(k_r) = \frac{2\pi a^2}{k_r a} J_1(k_r a)$, 又因 $\left| \frac{J_1(k_r a)}{k_r a} \right| \leq \frac{1}{2}$, 所以 $\alpha = 0$ 时 $G_n(k_r)$ 不是 e 指数函数. 因此我们推测当 $\alpha \neq 0$ 时, $G_n(k_r)$ 也不是 e 指数函数, 而数值计算表明确实如此, 但这里不再给出详细结果. 综上所述可知 $G_n(k_r)$ 不是 e 指数函数, 所以 $G^*(k_r)$ 中不含 e 指数函数.

参考文献

- [1] Ten D, Yang H, Li D J 2016 *Underwater Acoustic Transducer Foundation* (Xi'an: Northwestern Polytechnical University Press) pp1-3 (in Chinese) [腾舵, 杨虎, 李道江 2016 水声换能器基础 (西安: 西北工业大学出版社) 第1-3页]
- [2] Yang K D, Duan R, Li H, Ma Y L 2019 *Theory and Technology of Underwater Sound Source Location* (Beijing:

- Publishing House of Electronics Industry) pp1-3 (in Chinese)
[杨坤德, 段睿, 李辉, 马远良 2019 水下声源定位理论与技术 (北京: 电子工业出版社) 第1—3页]
- [3] Mo X P 2012 *Appl. Acoust.* **31** 171 (in Chinese) [莫喜平 2012 *应用声学* **31** 171]
- [4] Hall D E 1987 *Basic Acoustics* (New York: Harper & Row Publishers) pp161-177
- [5] Zhu Z R 2015 *Introduction to the Application of Vector Hydrophone under Sonar Baffle* (Harbin: Harbin Engineering University Press) p29 (in Chinese) [朱中锐 2015 声呐障板下矢量水听器应用引论 (哈尔滨: 哈尔滨工程大学出版社) 第29页]
- [6] Mo X P, Yu J H 2019 *Acta Acustica* **44** 751 (in Chinese) [莫喜平, 于婧涵 2019 *声学学报* **44** 751]
- [7] Hei Z Y 2020 *Modeling and Design of Underwater Acoustic Transducer and Array* (Beijing: Science Press) p2 (in Chinese) [何正耀 2020 水声换能器及基阵建模与设计 (北京: 科学出版社) 第2页]
- [8] New R, Becker R I, Wilhelmij P 1981 *J. Acoust. Soc. Am.* **70** 1518
- [9] Mast T D, Yu F 2005 *J. Acoust. Soc. Am.* **118** 3457
- [10] Mellow T 2006 *J. Acoust. Soc. Am.* **120** 90
- [11] Mo X P 2018 *J. Appl. Acoust.* **37** 671 (in Chinese) [莫喜平 2018 *应用声学* **37** 671]
- [12] Ji W, Liu Z L 2017 *Mine Warf. Ship Def.* **25** 7 (in Chinese) [纪伟, 刘忠乐 2017 水雷战与舰船防护 **25** 7]
- [13] Mei Y G, Xu J L, Geng F, Zhou C H, Li G 2006 *J. China Rail. Soc.* **28** 74 (in Chinese) [梅元贵, 许建林, 耿烽, 周朝晖, 李刚 2006 *铁道学报* **28** 74]
- [14] Li Y Z, Li X J, Wang Q D, Guo G P, Ma Q Y 2019 *Tech. Acoust.* **38** 327 (in Chinese) [李禹志, 李昕珈, 王青东, 郭各朴, 马青玉 2019 *声学技术* **38** 327]
- [15] Amédin C K, Berry A, Champoux Y, Allard J F 1995 *J. Acoust. Soc. Am.* **98** 1757
- [16] Wang C N, Cho H M 2005 *Appl. Acoust.* **66** 866
- [17] Schakel M D, Smeulders D, Slob E C, Heller H K 2011 *J. Appl. Phys.* **109** 15678
- [18] Schakel M D, Smeulders D, Slob E C, Heller H K 2011 *Geophysics* **76** N29
- [19] Schakel M D, Smeulders D, Slob E C, Heller H K 2012 *Transport Porous Med.* **93** 1
- [20] Pride S R 1994 *Phys. Rev. B* **50** 15678
- [21] Pride S R, Haartsen M W 1996 *J. Acoust. Soc. Am.* **100** 1301
- [22] Wang X 2020 *Chem. Eng. Eq.* **285** 115 (in Chinese) [王鑫 2020 *化学工程与装备* **285** 115]
- [23] Aki K, Richards P G 2002 *Quantitative Seismology* (California: University Science Books) pp194-207
- [24] Morse P M, Feshbach H 1953 *Methods of Theoretical Physics* (Part II) (New York: McGraw-Hill) pp1323, 1457
- [25] Pei Y L, Wang K Y, Li G B, Li X S, Liu C G 2007 *Petrol. Instrum.* **21** 20 (in Chinese) [裴彦良, 王揆洋, 李官保, 李西双, 刘晨光 2007 *石油仪器* **21** 20]
- [26] Tang G J 2010 *Jiangsu Water Resour.* **000** 28 (in Chinese) [谈国君 2010 *江苏水利* **000** 28]
- [27] Zhang H B, Zhou Z H, Liu J L, Cheng G X 2012 *China Water Transport* **12** 211 (in Chinese) [张虹斌, 周忠海, 刘军礼, 程广欣 2012 *中国水运* **12** 211]
- [28] Xi D P 1998 *Bessel Function* (Beijing: Higher Education Press) pp13-16 (in Chinese) [奚定平 1998 贝塞尔函数 (北京: 高等教育出版社) 第13—16页]

Interface reflection wave of axisymmetric directional spherical-wave*

Duan Yun-Da Hu Heng-Shan †

(Department of Astronautics and Mechanics, Harbin Institute of Technology, Harbin 150001, China)

(Received 15 September 2021; revised manuscript received 22 November 2021)

Abstract

The sound radiation field of a circular piston source in an infinite plane rigid baffle can be approximated as an axisymmetric directional spherical-wave. The interface response expressions of the axisymmetric directional spherical-wave for the piston parallel with the interface has already been obtained in previous studies. On condition that the distance from the piston center to the interface is much greater than the piston radius, we first derive the conical wave expansion of the axisymmetric directional spherical-wave which is obtained by using the conical wave expansion of the homogeneous spherical-wave and the formula of the axisymmetric directional spherical-wave excited by a circular piston in an rigid infinite plane, and then derive the expression of the interface reflection wave of the axisymmetric directional spherical-wave for the piston non-parallel to the interface. The expression of the interface reflection wave is simplified into a simplified expression by saddle point method on condition that the source distance is much larger than the acoustic wavelength. The simplified expression is not only simple in the calculation, but also clear in the physical meaning. The simplified expression shows that the interface reflection wave of the axisymmetric directional spherical-wave can be regarded as the product of the axisymmetric directional spherical-wave excited by the piston mirror image and the reflection coefficient. The calculations show that when the piston radius is smaller than the acoustic wavelength, the reflected wave is less sensitive to the angle included between the piston and the interface and the azimuth of the receiving point, and the directivity of the reflected wave is weak. When the piston radius is greater than the acoustic wavelength, the reflected wave is very sensitive to the angle included between the piston and the interface and the azimuth of the receiving point, and the directivity of the reflected wave is strong. Increasing the angle included between the piston and the interface, the reflected wave and its directivity both first increase and then decrease. The reflected wave is largest and the directivity of the reflected wave is strongest when the angle included between the piston and the interface is equal to that between the interface normal and the connecting line between the mirror image of the piston center and the receiving point.

Keywords: acoustic wave, reflected wave, directivity, piston**PACS:** 43.20.+g, 43.30.+m**DOI:** [10.7498/aps.71.20211718](https://doi.org/10.7498/aps.71.20211718)

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11972132, 11734017).

† Corresponding author. E-mail: hhs@hit.edu.cn