



洛伦兹对称破缺框架下的广义克莱因-戈尔登谐振子

王恩权 陈浩 杨毅 隆正文 Hassanabadi Hassan

**Generalized Klein-Gordon oscillator in Lorentz symmetry violation framework**

Wang En-Quan Chen Hao Yang Yi Long Zheng-Wen Hassanabadi Hassan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 060301 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20211733

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211733>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

洛伦兹破缺理论与Vaidya黑洞弯曲时空中的Dirac粒子隧穿辐射特征

Lorentz-violating theory and tunneling radiation characteristics of Dirac particles in curved spacetime of Vaidya black hole

物理学报. 2019, 68(19): 190401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190437>

洛伦兹破缺标量场的霍金隧穿辐射

Hawking tunneling radiation in Lorentz-violating scalar field theory

物理学报. 2019, 68(6): 060401 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182050>

一维谐振子束缚的自旋轨道耦合玻色气体

One-dimensional spin-orbit coupling Bose gases with harmonic trapping

物理学报. 2019, 68(17): 173201 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190143>

二维耦合谐振子的非对易能谱

On noncommutative energy spectra in two-dimensional coupling harmonic oscillator

物理学报. 2021, 70(20): 200301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210092>

三维各向同性谐振子的几何动量分布

Geometric momentum distribution for three-dimensional isotropic harmonic oscillator

物理学报. 2019, 68(1): 010301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181634>

非扩散洛伦兹系统的周期轨道

Periodic orbits of diffusionless Lorenz system

物理学报. 2018, 67(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181581>

# 洛伦兹对称破缺框架下的广义 克莱因-戈尔登谐振子\*

王恩权<sup>1)</sup> 陈浩<sup>1)</sup> 杨毅<sup>1)</sup> 隆正文<sup>1)†</sup> Hassanabadi Hassan<sup>2)</sup>

1) (贵州大学物理学院, 贵阳 550025)

2) (Faculty of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran)

(2021年9月17日收到; 2021年11月28日收到修改稿)

在洛伦兹对称破缺的背景下研究了广义克莱因-戈尔登谐振子, 主要使用 Nikiforov-Uvarov 方法分析了有磁场和无磁场两种情况下的克莱因-戈尔登谐振子. 在此基础上, 详细分析了具有康奈尔势函数的克莱因-戈尔登谐振子的一些特殊情况. 结果表明, 广义克莱因-戈尔登谐振子的波函数和能量本征值明显依赖于洛伦兹对称破缺效应, 另外, 康奈尔势函数对克莱因-戈尔登谐振子也有着不可忽略的影响.

**关键词:** 洛伦兹对称破缺, 克莱因-戈尔登谐振子, 康奈尔势, 相对论束缚态

**PACS:** 03.65.-w, 04.62.+v, 11.30.Qc, 11.30.Cp

**DOI:** 10.7498/aps.71.20211733

## 1 引言

众所周知, 应用于无自旋标量粒子的克莱因-戈尔登 (Klein-Gordon, KG) 谐振子<sup>[1,2]</sup> 是受狄拉克谐振子<sup>[3,4]</sup> 的启发而提出的, 而狄拉克谐振子是在线性相互作用下描述自旋为 1/2 粒子的物理对象. 目前, 相对论谐振子的推广, 如 KG 谐振子<sup>[5-10]</sup>、Kemmer 谐振子<sup>[11]</sup>、Duffin-Kemmer-Petiau 谐振子<sup>[12-14]</sup> 以及狄拉克谐振子<sup>[15,16]</sup> 的广义化是理论物理学家特别感兴趣的研究课题, 尤其是在拓扑缺陷背景下的谐振子研究吸引了许多物理学家的兴趣. 文献 [8] 在宇宙弦时空中通过一个新的动量算符来替代之前的动量算符实现了 KG 谐振子的广义化, 即作这样一个动量算符的替换:  $p_\mu \rightarrow p_\mu + im\omega X_\mu$ .

此外, 随着量子力学<sup>[17]</sup> 和相对论的发展, 由麦克斯韦电磁学衍生出来的规范理论已逐渐在物理学的各个分支中得到证实, 如粒子物理学中弱电相

相互作用的统一解释了放射性衰变现象, 基于希格斯机制, 阐明了粒子物理学中的对称性和对称性自发破缺问题, 建立了统一除引力之外的所有相互作用的标准模型 (standard model, SM). 然而, SM 面临着一些无法解释的物理现象, 如暗物质和暗能量及引力相互作用等, 因此, Kosteleck 和 Samuel<sup>[18]</sup> 在弦理论的基础上提出了具有洛伦兹对称破缺 (Lorentz symmetry violation, LSV) 的标准模型扩展理论 (standard model extension, SME). 后来, 在考虑有效场论的情况下, 具有量子效应的 SME 得到了广泛应用. 如 Bakke 和 Belich<sup>[19-21]</sup> 提出的朗道型量子化理论, 他们在 LSV 背景下研究了自旋为 1/2 的中性粒子与磁场和电场组成的混合场的相互作用. 另外, 许多物理学家也在 LSV 背景下研究了中性粒子与不同类型的势函数相互作用的情况, 如反平方电势<sup>[22]</sup> 和库仑型电势<sup>[23]</sup> 等. LSV 的应用还包括几何量子相位<sup>[24,25]</sup> 和宇宙弦背景时空<sup>[26,27]</sup> 等领域.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11465006, 11565009) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zwlong@gzu.edu.cn

本文主要基于 LSV 框架研究 KG 方程描述的标量粒子的相对论量子效应. 文献 [28] 分析了 LSV 对 KG 方程的影响. Vitória 和 Belich<sup>[29]</sup> 研究了 KG 谐振子与 LSV 产生的线性中心势的相互作用. 因此, 我们计划基于 LSV, 在存在和不存在磁场两种情况下研究康奈尔势函数在洛伦兹对称破坏框架中对广义 KG 谐振子的影响. 本文其他部分的主要内容如下: 第 2 节简要回顾 LSV, 并给出在 LSV 背景下具有康奈尔函数的 KG 谐振子方程; 第 3 节分别考虑康奈尔函数在有磁场和无磁场的情况下对 KG 谐振子的作用; 第 4 节是结论.

## 2 洛伦兹对称破缺下的广义 KG 谐振子

本节首先介绍洛伦兹对称破缺框架下的广义 KG 谐振子, 从标准模型扩展理论的角度来看, 描述存在非最小耦合和电磁张量, 且静止质量为  $m$  的相对论标量粒子的 KG 方程为 ( $\hbar = c = 1$ )<sup>[29]</sup>

$$\left[ \hat{P}_\mu \hat{P}^\mu - \frac{g}{4} (K_F)_{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} - m^2 \right] \phi(t, r) = 0, \quad (1)$$

这里的电磁张量  $F_{\mu\nu}$  满足关系  $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ , 恒定的背景张量场  $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  来自于标准模型扩展理论之外的洛伦兹对称破缺, 无量纲的张量系数  $(K_F)_{\mu\nu\alpha\beta}$  是具有 19 个独立非零分量的黎曼张量<sup>[30]</sup>. 此外张量系数  $\kappa_{DE}, \kappa_{DB}, \kappa_{HE}$  和  $\kappa_{HB}$  被定义为<sup>[31,32]</sup>

$$\begin{aligned} (\kappa_{DE})_{ij} &= -2(K_F)_{0i0j}, \\ (\kappa_{HB})_{jk} &= \frac{1}{2} \varepsilon_{jppq} \varepsilon_{klm} (K_F)^{pqlm}, \end{aligned} \quad (2)$$

$$(\kappa_{DB})_{jk} = -(\kappa_{HE})_{kj} = \varepsilon_{kpq} (K_F)^{0jppq}. \quad (3)$$

需要强调的是张量  $(\kappa_{DB})_{jk}$  和  $(\kappa_{HE})_{kj}$  是反对称矩阵,  $(\kappa_{DE})_{ij}$  和  $(\kappa_{HB})_{jk}$  是对称矩阵. 因此协变 KG 方程被重新表示为

$$\begin{aligned} \hat{p}_\mu \hat{p}^\mu \phi - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j \phi + \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{ij} B^i B^j \phi \\ - g (\kappa_{DB})_{ij} E^i B^j \phi - m^2 \phi = 0. \end{aligned} \quad (4)$$

众所周知, KG 谐振子也被称为带有谐振子的 KG 场<sup>[1,2]</sup>, 通过非最小耦合, 动量算符的相应变化如下:

$$\hat{p}_\mu \rightarrow \hat{p}_\mu + im\omega \mathbf{X}_\mu, \quad (5)$$

其中  $\omega$  表示角频率. 基于这一点, 本文应用 (1 + 3) 维柱坐标形式下的闵可夫斯基时空度规

$$ds^2 = -dt^2 + d\rho^2 + \rho^2 d\varphi^2 + dz^2. \quad (6)$$

因此在考虑 (5) 式的作用后, (4) 式中的 KG 谐振

子方程被重新写为

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} - (\hat{p} + im\omega \mathbf{X}_\mu) \cdot (\hat{p} - im\omega \mathbf{X}_\mu) \phi \\ - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j \phi + \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{ij} B^i B^j \phi \\ - g (\kappa_{DB})_{ij} E^i B^j \phi - m^2 \phi = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

众所周知, KG 谐振子是通过考虑一个非最小耦合项的向量  $\mathbf{X}_\mu = (0, \rho, 0, 0) = \rho \hat{\rho}$  得出的, 在这种情况下, 用径向势函数  $f(\rho)$  来代替  $\rho$  把 KG 谐振子广义化, 也就是

$$\mathbf{X}_\mu = (0, f(\rho), 0, 0) = f(\rho) \hat{\rho}. \quad (8)$$

因此把 (8) 式代入 (7) 式, 就可以得到如下二阶微分方程:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \\ - m\omega \left[ \frac{f(\rho)}{\rho} + \left( \frac{df(\rho)}{d\rho} \right) + m\omega f^2(\rho) \right] \phi + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} \\ - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j \phi + \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{ij} B^i B^j \phi \\ - g (\kappa_{DB})_{ij} E^i B^j \phi - m^2 \phi = 0. \end{aligned} \quad (9)$$

下面研究康奈尔势函数对广义 KG 谐振子的影响, 康奈尔势函数  $f(\rho)$  可以写为

$$f(\rho) = \Xi_1/\rho + \Xi_2 \rho, \quad (10)$$

其中参数  $\Xi_1$  和  $\Xi_2$  分别表示规范理论中的库仑强度和弦张力. 值得一提的是, 康奈尔势在粒子物理学中有广泛的应用<sup>[33-36]</sup>, 它包含一个描述夸克和胶子相互作用的短程库仑势, 以及一个长距离线性势. 把 (10) 式代入 (9) 式可以得到

$$\begin{aligned} -\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \varphi^2} \\ - 2m\omega \Xi_2 (1 + m\omega \Xi_1) \phi - m^2 \omega^2 \left( \frac{\Xi_1^2}{\rho^2} + \Xi_2^2 \rho^2 \right) \phi \\ + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{ii} E^i E^j \phi + \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{ii} B^i B^j \phi \\ - g (\kappa_{DB})_{ii} E^i B^j \phi - m^2 \phi = 0, \end{aligned} \quad (11)$$

其中动量算符为  $\hat{p}_z = -i\partial_z$ , 角动量算符为  $\hat{L}_z = -i\partial_\varphi$ . 假设方程 (11) 的特解为

$$\phi(t, \mathbf{r}) = e^{-iEt + i\ell\varphi + ikz} R(\rho), \quad (12)$$

我们知道, 径向波函数独立于坐标系的其他分量  $t$ ,  $\varphi$  和  $z$ , (12) 式中的  $\ell = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  是角动量算符的特征值,  $k$  是线性动量算符在  $z$  分量的特征值.

此时, 把 (12) 式代入 (11) 式中得到

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} - 2m\omega\Xi_2(1+m\omega\Xi_1)R(\rho) \\ & - m^2\omega^2 \left( \frac{\Xi_1^2}{\rho^2} + \Xi_2^2\rho^2 \right) R(\rho) \\ & - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{ij} E^i E^j R(\rho) + \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{ij} B^i B^j R(\rho) \\ & - g (\kappa_{DB})_{ij} E^i B^j R(\rho) \\ & - \frac{\ell^2}{\rho^2} R(\rho) + (E^2 - m^2 - k^2) R(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

第 3 节将研究在存在康奈尔势情况下洛伦兹对称破缺对广义 KG 谐振子的影响.

### 3 洛伦兹对称破缺下广义 KG 谐振子的能级与波函数

本节求解具有电场作用的广义 KG 谐振子, 即  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2$ ,  $\mathbf{E}_1 = \frac{\gamma}{\rho}\hat{\rho}$ ,  $\mathbf{E}_2 = \frac{\lambda}{2}\rho\hat{\rho}$ . 文献 [37–40] 研究了电偶极子运动系统的类似结构. 当在 (13) 式中考虑电场时可以得到

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left[ E^2 - k^2 - m^2 \right. \\ & - 2m\omega\Xi_2(1+m\omega\Xi_1) - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda\gamma \\ & - \left( \ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2 \right) \frac{1}{\rho^2} \\ & - \left( m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \right) \rho^2 \\ & + \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{ij} B^i B^j \\ & \left. - g (\kappa_{DB})_{1j} \left( \frac{\gamma}{\rho} + \frac{\lambda}{2}\rho \right) B^j \right] R(\rho) = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

现在来求解方程 (14) 在两种不同情况下的能量本征值与束缚态波函数.

**情况一** 不存在磁场, 即  $B = 0$ , 此时待求解的方程 (14) 可被重新写为

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left( -\zeta_1\rho^2 + \zeta_2 - \frac{\zeta_3}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad (15)$$

其中

$$\begin{cases} \zeta_1 = m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4}, \\ \zeta_2 = E^2 - k^2 - m^2 - 2m\omega\Xi_2(1+m\omega\Xi_1) \\ \quad - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda\gamma, \\ \zeta_3 = \ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2. \end{cases} \quad (16)$$

为了求解方程 (15), 令  $r = \rho^2$ , 则方程 (15) 变为

$$\begin{aligned} & \frac{d^2 R(r)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR(r)}{dr} \\ & + \frac{1}{4r^2} (-\zeta_1 r^2 + \zeta_2 r - \zeta_3) R(r) = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

此时, 可以发现波动方程与 NU 方法 [41,42] 中的方程形式类似, Nikiforov-Uvarov (NU) 方法对于求解量子理论中波动方程束缚态的精确解是非常有用的 [43–48], NU 方法的详细说明见附录 A. 根据文献 [48] 结果, 再依据附录 A 中的 NU 方法, 可以得到波函数

$$R(s) = N s^{\alpha_{12}} \exp(\alpha_{13}s) L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s), \quad (18)$$

其中  $L_n^\alpha(x)$  表示广义拉盖尔多项式,  $N$  表示归一化常数. 另外, 根据 NU 方法可以得到

$$\begin{cases} \alpha_1 = 1, \alpha_2 = 0, \alpha_3 = 0, \alpha_4 = 0, \alpha_5 = 0, \\ \alpha_6 = \frac{1}{4} \left( m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \right), \\ \alpha_7 = -\frac{1}{4} \left[ E^2 - k^2 - m^2 - 2m\omega\Xi_2(1+m\omega\Xi_1) \right. \\ \quad \left. - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda\gamma \right], \\ \alpha_8 = \frac{1}{4} \left( \ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2 \right), \\ \alpha_9 = \frac{1}{4} \left( m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \right), \end{cases} \quad (19)$$

$$\begin{cases} \alpha_{10} = 1 + \sqrt{\ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2}, \\ \alpha_{11} = \sqrt{m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4}}, \\ \alpha_{12} = \frac{1}{2} \sqrt{\ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2}, \\ \alpha_{13} = -\frac{1}{2} \sqrt{m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4}}. \end{cases} \quad (20)$$

将 (19) 式和 (20) 式代入 (15) 式, 得到无磁场时洛伦兹对称破缺下 KG 谐振子的非归一化径向波函数为

$$R_{n,\ell}(\rho) = \rho \sqrt{\ell^2 + m^2 \omega^2 \Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2} \exp \left( -\frac{1}{2} \sqrt{m^2 \omega^2 \Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \rho^2} \right) \times L_n \sqrt{\ell^2 + m^2 \omega^2 \Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2} \left( \sqrt{m^2 \omega^2 \Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \rho^2} \right). \quad (21)$$

此外, 为了更直观地反映不同  $\lambda$  值对波函数的影响, 图 1 给出了径向波函数  $R(\rho)$  的图像. 可以看出, 在  $\rho \rightarrow 0$  时径向波函数  $R(\rho)$  的值为零, 另外, 径向波函数的振幅随着电场强度的增加而减少. 通过系数关系

$$(2n+1)\sqrt{\alpha_9} + \alpha_7 + 2\sqrt{\alpha_8 \alpha_9} = 0, \quad (22)$$

得到能量特征值为

$$E_{n,\ell} = \pm \left\{ k^2 + m^2 + 2m\omega \Xi_2 (1 + m\omega \Xi_1) + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda \gamma + 2 \left[ 2n + 1 + \left( \ell^2 + m^2 \omega^2 \Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2 \right)^{1/2} \right] A_1 \right\}^{1/2}, \quad (23)$$

其中  $A_1 = \left( m^2 \omega^2 \Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \right)^{1/2}$ .

如果康奈尔势函数参数满足  $\Xi_1 = 0, \Xi_2 = 1$ , 可以得到线性势作用下 KG 谐振子的能量特征值为

$$E_{n,\ell} = \pm \left\{ k^2 + m^2 + 2m\omega + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda \gamma + 2 \left[ 2n + 1 + \left( \ell^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2 \right)^{1/2} \right] A_1 \right\}^{1/2}. \quad (24)$$

**情况二** 求解存在磁场  $\mathbf{B} = B_0 \rho \hat{z}$  的情况. 方

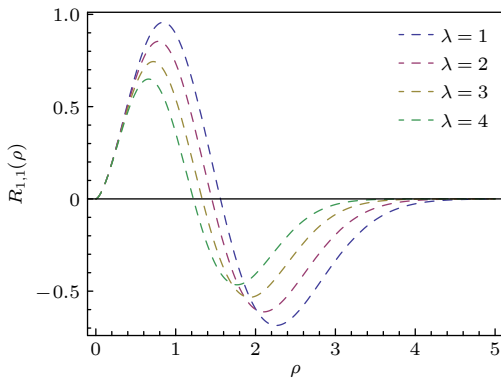


图 1 以  $\rho$  为变量取 4 个不同  $\lambda$  值的径向波函数

Fig. 1. Radial wave functions as a function of  $\rho$  for different  $\lambda$ .

程 (14) 可重新写为

$$\frac{d^2 R(\rho)}{d\rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{dR(\rho)}{d\rho} + \left( -\tau_1 \rho^2 + \tau_2 - \frac{\tau_3}{\rho^2} \right) R(\rho) = 0, \quad (25)$$

其中

$$\begin{aligned} \tau_1 &= m^2 \omega^2 \Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} \\ &\quad - \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{33} B_0^2 + g (\kappa_{DB})_{13} \frac{\lambda B_0}{2}, \\ \tau_2 &= E^2 - k^2 - m^2 - 2m\omega \Xi_2 (1 + m\omega \Xi_1) \\ &\quad - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda \gamma - g (\kappa_{DB})_{13} \gamma B_0, \\ \tau_3 &= \ell^2 + m^2 \omega^2 \Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2. \end{aligned} \quad (26)$$

为了得到一个可解的波函数, 令  $\eta = \rho^2$ , 则有

$$\frac{d^2 R(\eta)}{d\eta^2} + \frac{1}{\eta} \frac{dR(\eta)}{d\eta} + \frac{1}{4s^2} (-\tau_1 \eta^2 + \tau_2 \eta - \tau_3) R(\rho) = 0. \quad (27)$$

不难发现, 方程 (27) 与 NU 方程形式类似, 所以同样利用 NU 方法来处理这种情况. 因此方程 (27) 的波函数可以假定为

$$R(s) = \tilde{N} s^{\tilde{\alpha}_{12}} \exp(\tilde{\alpha}_{13} s) L_n^{\tilde{\alpha}_{10}-1}(\tilde{\alpha}_{11} s), \quad (28)$$

相关系数表示为

$$\left\{ \begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= 1, \tilde{\alpha}_2 = 0, \tilde{\alpha}_3 = 0, \tilde{\alpha}_4 = 0, \tilde{\alpha}_5 = 0, \\ \tilde{\alpha}_6 &= \frac{1}{4} \left( m^2 \omega^2 \Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} - \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{33} B_0^2 + g (\kappa_{DB})_{13} \frac{\lambda B_0}{2} \right), \\ \tilde{\alpha}_7 &= -\frac{1}{4} \left[ E^2 - k^2 - m^2 - 2m\omega \Xi_2 (1 + m\omega \Xi_1) - \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \lambda \gamma - g (\kappa_{DB})_{13} \gamma B_0 \right], \\ \tilde{\alpha}_8 &= \frac{1}{4} \left( \ell^2 + m^2 \omega^2 \Xi_1^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \gamma^2 \right), \\ \tilde{\alpha}_9 &= \frac{1}{4} \left( m^2 \omega^2 \Xi_2^2 + \frac{g}{2} (\kappa_{DE})_{11} \frac{\lambda^2}{4} - \frac{g}{2} (\kappa_{HB})_{33} B_0^2 + g (\kappa_{DB})_{13} \frac{\lambda B_0}{2} \right), \end{aligned} \right. \quad (29)$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_{10} = 1 + \sqrt{\ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\gamma^2}, \\ \tilde{\alpha}_{11} = \sqrt{m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\frac{\lambda^2}{4} - \frac{g}{2}(\kappa_{HB})_{33}B_0^2 + g(\kappa_{DB})_{13}\frac{\lambda B_0}{2}}, \\ \tilde{\alpha}_{12} = \frac{1}{2}\sqrt{\ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\gamma^2}, \\ \tilde{\alpha}_{13} = -\frac{1}{2}\sqrt{m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\frac{\lambda^2}{4} - \frac{g}{2}(\kappa_{HB})_{33}B_0^2 + g(\kappa_{DB})_{13}\frac{\lambda B_0}{2}}. \end{cases} \quad (30)$$

在洛伦兹对称破缺中具有康奈尔势函数且存在磁场情况下的广义 KG 谐振子的非归一化径向波函数可以写为

$$R_{n,\ell}(\rho) = \rho^{\sqrt{\ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\gamma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{\alpha}_{11}\rho^2\right) L_n^{\sqrt{\ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\gamma^2}} \tilde{\alpha}_{11}\rho^2. \quad (31)$$

波函数 (31) 明显依赖于量子数  $l$  及  $m, \omega, \Xi_1, \Xi_2, B_0, k, \lambda, \gamma, g, (\kappa_{DE})_{11}, (\kappa_{HB})_{33}, (\kappa_{DB})_{13}$ . 图 2 为非归一化的径向波函数  $R(\rho)$  的图像, 在图 2 中, 令  $m = n = l = \omega = \Xi_2 = B_0 = k = \lambda = r = g = (\kappa_{DE})_{11} = (\kappa_{HB})_{33} = (\kappa_{DB})_{13} = 1$ , 把  $\rho$  作为横坐标, 画出了广义 KG 谐振子在不同  $\Xi_1$  值时的图像, 能清晰地观察到径向波函数的振幅随着势函数参数的增加而增加.

根据系数关系

$$(2n + 1)\sqrt{\tilde{\alpha}_9} + \tilde{\alpha}_7 + 2\sqrt{\tilde{\alpha}_8\tilde{\alpha}_9} = 0, \quad (32)$$

相应的能量特征值为

$$\begin{aligned} E_{n,\ell} = & \pm \left\{ k^2 + m^2 + 2m\omega\Xi_2(1 + m\omega\Xi_1) + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\lambda\gamma + g(\kappa_{DB})_{13}\gamma B_0 \right. \\ & + 2 \left[ 2n + 1 + \left( \ell^2 + m^2\omega^2\Xi_1^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\gamma^2 \right)^{1/2} \right] \\ & \left. \times \left( m^2\omega^2\Xi_2^2 + \frac{g}{2}(\kappa_{DE})_{11}\frac{\lambda^2}{4} - \frac{g}{2}(\kappa_{HB})_{33}B_0^2 + g(\kappa_{DB})_{13}\frac{\lambda B_0}{2} \right)^{1/2} \right\}^{1/2}. \end{aligned} \quad (33)$$

令参数满足条件  $m = \omega = \Xi_2 = B_0 = k = \lambda = r = g = (\kappa_{DE})_{11} = (\kappa_{HB})_{33} = (\kappa_{DB})_{13} = 1$ , 给出能级图像, 如图 3 所示, 能量特征值随势函数参数  $\Xi_1$  的增加而增加. 此外, 令其他参数满足  $m = \omega =$

$\Xi_1 = \Xi_2 = k = r = g = (\kappa_{DE})_{11} = (\kappa_{HE})_{33} = (\kappa_{DB})_{13} = 1$ , 以  $\lambda$  为横坐标给出了不同的  $B_0$  值对应的能级图像, 结果如图 4 所示, 可以发现能量存在简并的情况.

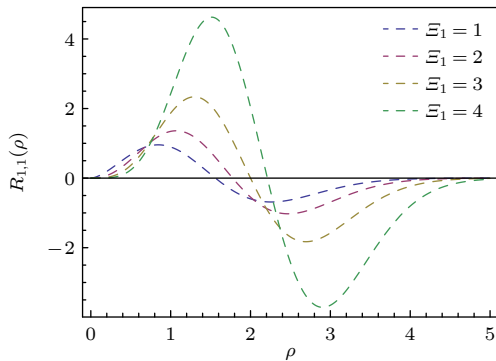


图 2 以  $\rho$  为变量取 4 个不同  $\Xi_1$  值的径向波函数

Fig. 2. Radial wave functions as a function of  $\rho$  for different  $\Xi_1$ .

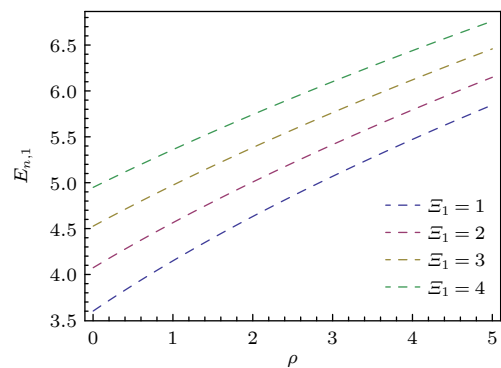


图 3 以  $n$  为变量取个不同  $\Xi_1$  值的能量

Fig. 3. Energy eigenvalue as a function of  $n$  for different  $\Xi_1$ .

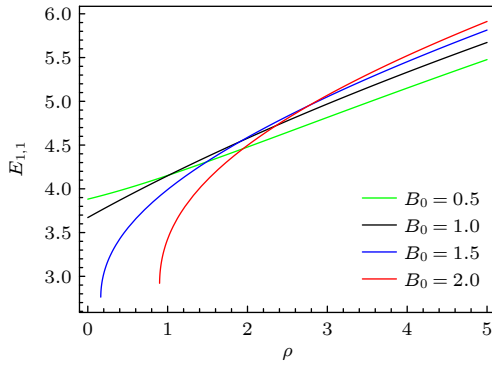


图 4 以  $\lambda$  为变量取 4 个不同  $B_0$  值的能量

Fig. 4. Energy eigenvalue as a function of  $\lambda$  for different  $B_0$ .

## 4 总 结

本文研究了洛伦兹对称破缺框架下的广义 KG 谐振子, 利用 NU 方法分析了存在与不存在磁场时的广义 KG 谐振子. 此外还讨论了 KG 谐振子在  $\Xi_1 = 0, \Xi_2 = 1$  的特殊情况. 结果表明, 存在磁场时的情况是无磁场情况的推广, 因为当令  $B_0 = 0$  时, 束缚态能量特征值与无磁场时所得结果一致. 两种情况下的径向波函数明显取决于洛伦兹对称破缺效应相关的参数和康奈尔势参数. 此外, 通过固定一些参数值, 可以观察到在  $\rho \rightarrow 0$  时径向波函数  $R(\rho)$  的值也为零. 另外, 根据本文所画的图像得知, 图 1 中的径向波函数的振幅随电场强度的增加而减少, 而图 2 中的径向波函数的振幅随势参数的增加而增加. 图 3 显示了势函数参数对广义 KG 谐振子能谱的贡献. 可以看出, 当固定量子数  $n$  时, 较大的势函数参数对应着较大的能量特征值, 而当固定势函数参数时, 较大的量子数  $n$  所对应的能量特征值也相对较大. 最后, 发现在图 4 中的能量特征值存在简并, 同时在  $B_0 = 1.5$  和 2 时,  $\lambda$  较小时能量特征值的增加趋势尤为显著. 此外, 从能谱的图像可以清晰地看到洛伦兹对称破缺的存在使得能谱得到了修正.

## 附录 A Nikiforov-Uvarov 方法

本文利用 NU 方法求解了二阶微分方程的本征函数, 该方法有助于找到各种薛定谔方程的特征值和特征函数, 也可以用于一些涉及到二阶微分方程的其他物理背景中. 在 NU 方法中微分方程通常可以写成如下形式:

$$\frac{d^2\psi(s)}{ds^2} + \frac{\alpha_1 - \alpha_2 s}{s(1 - \alpha_3 s)} \frac{d\psi(s)}{ds} + \left[ \frac{-\beta_1 s^2 + \beta_2 s - \beta_3}{s^2(1 - \alpha_3 s)^2} \right] \psi(s) = 0, \quad (A1)$$

其中

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} (1 - \alpha_3 s)^{-\alpha_{12} - \frac{\alpha_{13}}{\alpha_3}} \times P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} (1 - 2\alpha_3 s). \quad (A2)$$

在 NU 方法中微分方程的本征值通常通过如下方程给出:

$$n\alpha_2 - (2n + 1)\alpha_5 + (2n + 1)(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}) + n(n - 1)\alpha_3 + \alpha_7 + 2\alpha_3\alpha_8 + 2\sqrt{\alpha_8\alpha_9} = 0, \quad (A3)$$

其中涉及到的所有参数 ( $\alpha_4 \cdots \alpha_{13}$ ) 都是通过  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  这 6 个参数得到的:

$$\begin{cases} \alpha_4 = \frac{1}{2}(1 - \alpha_1), & \alpha_5 = \frac{1}{2}(\alpha_2 - 2\alpha_3), \\ \alpha_6 = \alpha_5^2 + \beta_1, & \alpha_7 = 2\alpha_4\alpha_5 - \beta_2, \\ \alpha_8 = \alpha_4^2 + \beta_3, & \alpha_9 = \alpha_3\alpha_7 + \alpha_3^2\alpha_8 + \alpha_6, \\ \alpha_{10} = \alpha_1 + 2\alpha_4 + 2\sqrt{\alpha_8}, \\ \alpha_{11} = \alpha_2 - 2\alpha_5 + 2(\sqrt{\alpha_9} + \alpha_3\sqrt{\alpha_8}), \\ \alpha_{12} = \alpha_4 + \sqrt{\alpha_8}, & \alpha_{13} = \alpha_5 - \sqrt{\alpha_9} - \alpha_3\sqrt{\alpha_8}. \end{cases} \quad (A4)$$

而  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$  和  $\beta_1, \beta_2, \beta_3$  这 6 个参数的值是可以微分方程 (A1) 直接确定的.

另外, 对于  $\alpha_3 = 0$  这种特殊情况有如下关系:

$$\lim_{\alpha_3 \rightarrow 0} (1 - 2\alpha_3 s) P_n^{(\alpha_{10}-1, \frac{\alpha_{11}}{\alpha_3} - \alpha_{10}-1)} = L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s), \quad (A5)$$

此时的波函数为

$$\psi(s) = s^{\alpha_{12}} \exp(\alpha_{13}s) L_n^{\alpha_{10}-1}(\alpha_{11}s), \quad (A6)$$

这里  $L_n^{(\alpha)}$  是广义拉盖尔多项式.

## 参考文献

- [1] Dvoeglazov V V 1994 *Nuovo Cimento II* **107A** 1413
- [2] Bruce S, Minning P 1993 *Nuovo Cimento II* **106A** 711
- [3] Moshinsky M 1989 *J. Phys. A: Math. Gen.* **22** L817
- [4] Ito D, Mori K, Carriere E 1967 *Nuovo Cimento A* **51** 1119
- [5] Ahmed F 2020 *Eur. Phys. J. C* **80** 209
- [6] Ahmed F 2019 *Gen. Relativ. Gravitation* **51** 210
- [7] Ahmed F 2020 *Europhys. Lett.* **130** 40003
- [8] Deng L F, Long C Y, Long Z W, Xu T 2019 *Eur. Phys. J. Plus* **134** 355
- [9] Yang Y, Long Z W, Ran Q K, Chen H, Zhao Z L, Long C Y 2021 *Int. J. Mod. Phys. A* **36** 2150023
- [10] Lutfulu B C, Ká J, Sedaghatnia P, Hassanabadi H 2020 *Eur. Phys. J. Plus* **135** 2020
- [11] Yang Y, Cai S H, Long Z W, Chen H, Long C Y 2020 *Chin. Phys. B* **29** 070302

- [12] Zare S, Hassanabadi H, Montigny M D 2020 *Gen. Relativ. Gravitation* **52** 3
- [13] Chen H, Long Z W, Yang Y, Zhao Z L, Long C Y 2020 *Int. J. Mod. Phys. A* **35** 2050107
- [14] Yang Y, Long Z W, Chen H, Zhao Z L, Long C Y 2021 *Mod. Phys. Lett. A* **36** 2150059
- [15] Chen H, Long Z W, Ran Q K, Yang Y, Long C Y 2020 *EPL* **132** 50006
- [16] Deng L F, Long C Y, Long Z W, Xu T 2018 *Adv. High Energy Phys.* **1** 2018
- [17] Bardeen J, Cooper L N, Schrieffer J R 1957 *Phys. Rev.* **106** 162
- [18] Kostelecky V A, Samuel S 1989 *Phys. Rev. Lett.* **63** 224
- [19] Bakke K, Belich H 2012 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **39** 085001
- [20] Bakke K, Belich H 2015 *J. Phys. G: Nucl. Part. Phys.* **42** 095001
- [21] Bakke K, Belich H 2015 *Ann. Phys.* **354** 1
- [22] Bakke K, Belich H 2020 *Eur. Phys. J. Plus* **135** 656
- [23] Bakke K, Belich H 2020 *Commun. Theor. Phys.* **72** 105204
- [24] Belich H, Costa-Soares T, Ferreira Jr M M, Helayel-Neto J A, Orlando M T D 2006 *Phys. Lett. B* **639** 675
- [25] Belich H, Costa-Soares T, Ferreira Jr M M, Helayel-Neto J A 2005 *Eur. Phys. J. C* **41** 421
- [26] Bakke K, Belich H 2019 *Int. J. Mod. Phys. A* **34** 1950116
- [27] Bakke K, Furtado C, Belich H 2016 *Ann. Phys.* **372** 544
- [28] Bakke K, Belich H 2016 *Ann. Phys.* **373** 115
- [29] Vit6ro R L L, Belich H 2018 *Eur. Phys. J. C* **78** 999
- [30] Kostelecky A V, Mewes M 2001 *Phys. Rev. Lett.* **87** 251304
- [31] Kostelecky A V, Mewes M 2002 *Phys. Rev. D* **66** 056005
- [32] Kostelecky A V, Mewes M 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 140401
- [33] Eichten E, Gottfried K, Kinoshita T, Lane K D, Yan T M 1978 *Phys. Rev. D* **17** 3090
- [34] Lima D F, Andrade F M, Castro L B, Filgueiras C, Silva E O 2019 *Eur. Phys. J. C* **79** 596
- [35] Eichten E, Gottfried K, Kinoshita T, Lane K D, Yan T M 1976 *Phys. Rev. Lett.* **36** 500
- [36] Quigg C, Rosner J L 1979 *Phys. Rep.* **56** 167
- [37] Aharonov Y, Casher A 1984 *Phys. Rev. Lett.* **53** 319
- [38] Ribeiro L R, Furtado C, Nascimento J R 2006 *Phys. Lett. A* **348** 135
- [39] Furtado C, Nascimento J R, Ribeiro L R 2006 *Phys. Lett. A* **358** 336
- [40] Bakke K, Furtado C 2014 *Eur. Phys. J. B* **87** 222
- [41] Tezcan C, Sever R 2009 *Int. J. Theor. Phys.* **48** 377
- [42] Nikiforov A F, Uvarov V B 1988 *Special Functions of Mathematical Physics* (Basel: Springer) pp1–14
- [43] Hassanabadi H, Maghsoodi E, Zarrinkamar S, Rahimov H 2012 *J. Math. Phys.* **53** 022104
- [44] de Montigny M, Zare S, Hassanabadi H 2018 *Gen. Relativ. Gravitation* **50** 47
- [45] Sedaghatnia P, Hassanabadi H, Ahmed F 2019 *Eur. Phys. J. C* **79** 541
- [46] Rahimov H, Nikoofard H, Zarrinkamar S, Hassanabadi H 2013 *Appl. Math. Comput.* **219** 4710
- [47] Hassanabadi H, Zarrinkamar S, Rajabi A A 2011 *Commun. Theor. Phys.* **55** 541
- [48] Hosseinpour M, Hassanabadi H, de Montigny M 2018 *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **15** 1850165

## Generalized Klein-Gordon oscillator in Lorentz symmetry violation framework\*

Wang En-Quan<sup>1)</sup>    Chen Hao<sup>1)</sup>    Yang Yi<sup>1)</sup>    Long Zheng-Wen<sup>1)†</sup>  
 Hassanabadi Hassan<sup>2)</sup>

<sup>1)</sup> (College of Physics, Guizhou University, Guiyang 550025, China)

<sup>2)</sup> (Faculty of Physics, Shahrood University of Technology, Shahrood, Iran)

( Received 17 September 2021; revised manuscript received 28 November 2021 )

### Abstract

In this paper, the generalized Klein-Gordon oscillator is studied in the framework of Lorentz symmetry violation, and the Nikiforov-Uvarov method is used to analyze the Klein-Gordon oscillator with and without magnetic field. On this basis, we analyze some special cases of Klein-Gordon oscillators with Cornell potential functions in detail. The results show that the wave function and the energy eigenvalues of the generalized Klein-Gordon oscillator obviously depend on the Lorentz symmetry violation effect, and the Cornell potential function also has a non-negligible effect on the Klein-Gordon oscillator.

**Keywords:** Lorentz symmetry violation, Klein-Gordon oscillator, Cornell potential, relativistic bound states

**PACS:** 03.65.-w, 04.62.+v, 11.30.Qc, 11.30.Cp

**DOI:** 10.7498/aps.71.20211733

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11465006, 11565009).

† Corresponding author. E-mail: [zwlong@gzu.edu.cn](mailto:zwlong@gzu.edu.cn)