

基于量子Fisher信息的耗散相互作用光-物质耦合常数的估计

牛明丽 王月明 李志坚

Estimation of light-matter coupling constant under dispersive interaction based on quantum Fisher information

Niu Ming-Li Wang Yue-Ming Li Zhi-Jian

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 090601 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212029

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212029>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于量子Fisher信息的量子计量进展

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

物理学报. 2019, 68(4): 040601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

基于强耦合Duffing振子的微弱脉冲信号检测与参数估计

Detection and parameter estimation of weak pulse signal based on strongly coupled Duffing oscillators

物理学报. 2019, 68(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181856>

基于最大似然的单通道交叠激光微多普勒信号参数分离估计

Separate estimation of laser micro-Doppler parameters based on maximum likelihood schemes

物理学报. 2018, 67(11): 114202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172639>

Jaynes-Cummings晶格模型和Rabi晶格模型的量子相变

The quantum phase transition in the Jaynes-Cummings lattice model and the Rabi lattice model

物理学报. 2021, 70(10): 100201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202066>

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子Fisher信息

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

物理学报. 2018, 67(14): 140304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180330>

基于双高斯衰减模型的超声回波处理方法

Ultrasonic echo processing method based on dual-Gaussian attenuation model

物理学报. 2019, 68(8): 084303 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182080>

基于量子 Fisher 信息的耗散相互作用 光-物质耦合常数的估计*

牛明丽 王月明[†] 李志坚

(山西大学理论物理研究所, 物理电子工程学院, 量子光学与光量子器件国家重点实验室, 极端光学协同创新中心, 太原 030006)

(2021 年 11 月 1 日收到; 2021 年 12 月 7 日收到修改稿)

量子参数估计在量子度量学中有着重要的应用, 量子 Cramer-Rao 下界表明量子参数估计精度极限与量子 Fisher 信息是直接相关的. 本文利用量子参数估计理论对光场与原子失谐很大 (大失谐) 的 Jaynes-Cummings 模型耦合常数进行估计. 制备探测初态为 Qubit 系统与光场的直积态, 光场分别为 Fock 态、热态和相干态, 分别计算了这三种探测态经大失谐 Jaynes-Cummings 模型哈密顿量演化后复合系统以及 Qubit 和光场系统的量子 Fisher 信息. 通过分析发现, 复合系统的量子 Fisher 信息随平均光子数单调递增, Qubit 基态与激发态的等权叠加态为最优探测态, 此时量子 Fisher 信息达到最大值; 当探测态的光场为 Fock 态和热态时, 关于被估计参数的信息都包含于 Qubit 系统; 对于大失谐 Jaynes-Cummings 模型耦合常数的估计, 光场为热态或相干态时耦合常数的估计精度高于光场为 Fock 态时的精度.

关键词: 量子 Fisher 信息, 参数估计, 量子 Cramer-Rao 下界, Jaynes-Cummings 模型**PACS:** 03.67.-a, 03.65.Ta, 06.20.-f, 37.30.+i**DOI:** 10.7498/aps.71.20212029

1 引言

量子度量学是统计推断和量子力学相结合后在精密测量领域的最新研究前沿. 量子度量学领域一个最重要的应用就是量子参数估计^[1,2]. 在量子力学中, 需要通过描述一些不可直接观测的感兴趣的物理量来研究量子系统的物理性质. 如量子信息协议的设计需要知道量子态的纠缠内容^[3,4], 电磁场强度以及微弱惯性力可被映射到相位上进行估计^[5-7], 处于不同相的混合系统可用来对耦合强度进行估计^[8,9]. 人们需要借助间接测量, 从一个或多个适当的可观测量值的测量来推断不可直接观测的物理量的值^[10,11], 因此存在估计参数的问题, 这需要运用量子估计理论^[12-16]. 在估计参数值时, 需要定义表示概率分布之间无穷小距离的 Fisher 信

息, 并通过 Cramer-Rao 定理给出估计子可达到的最终精度^[17-21]. 通常一个量子参数估计的过程包括: 探测态的制备, 探测态与待测系统相互作用 (即参数化过程), 对演化后的输出探测态的测量, 以及基于测量结果对待测系统参数值估计^[2,10,22,23]. 相位的估计过程包括: N 粒子探测态制备、相位累积、可测物理量的测量以及相位估计^[24].

作为量子参数估计的基本理论, 量子 Cramer-Rao 下界 (QCRB) 表明量子参数估计精度极限与量子 Fisher 信息^[25](QFI) 有着直接关系, 在估计多个参数的情况中, QFI 对应为量子 Fisher 信息矩阵 (QFIM)^[11,26,27]. 在所有可能的量子测量中, 最大的 Fisher 信息称为 QFI^[24], QFI 给出了量子力学所允许的量子估计的精度极限. QFI 越大, 精度越高^[28]. 因此本文将对量子参数估计问题的研究转换为对 QFI 的研究. 为了尽可能提高测量和估

* 山西省“1331 工程”(批准号: D18001) 资助的课题.

[†] 通信作者. E-mail: wang_ym@sxu.edu.cn

计的精度, 必须寻找那些使得 QFI 最大的态. 基于 QFI 进行量子参数估计的相关应用有很多: 基于噪音猫态对表征噪音猫态的参数以及位移参数进行估计^[29]、存在相位扩散情况下的相位估计问题, 以及相移高斯态的最终量子极限精度^[7,30,31]、量子信道中噪音参数的估计以及建立估计热损耗通道中残余噪音的最终精度^[32]、通过估计两个有损耗玻色子通道的损耗参数解决两个点状源之间间隔的估计问题^[33]、利用一维量子 Ising 模型的临界性推导出随温度变化的耦合常数的最佳量子估计量^[34]、非线性系统中量子光力学的最优估计^[35]、基于 Fisher 信息的光机械耦合强度的估计^[36]、Jaynes-Cummings (J-C) 模型耦合常数的最优量子估计^[37]等.

当 J-C 模型在光场与原子失谐很大 (大失谐) 的情况下, 原子不会发生直接跃迁, 只存在原子与光场的“耗散”相互作用. 大失谐情况下的 J-C 模型在量子力学的许多应用中都有着很重要的作用, 如产生薛定谔猫态^[38]. 本文利用量子估计理论研究大失谐 J-C 模型耦合常数的估计问题, 将对此估计问题的分析转换为对不同的探测态经大失谐 J-C 模型哈密顿量演化后对应系统的 QFI 的分析. 制备探测初态为 Qubit 系统与光场的直积态, 光场分别为 Fock 态、热态、相干态, 分别计算了这三种探测态经大失谐 J-C 模型哈密顿量演化后复合系统以及 Qubit 和光场系统的 QFI.

2 大失谐 J-C 模型

J-C 模型描述一单模辐射场与一个自旋为 $-1/2$ 的二能级系统的相互作用, 哈密顿量描述为

$$\hat{H}_{\text{JC}} = \frac{\hbar\omega_q}{2}\hat{\sigma}_z + \hbar\omega_f\hat{a}^+\hat{a} + \hbar\lambda(\hat{\sigma}_+\hat{a} + \hat{\sigma}_-\hat{a}^+). \quad (1)$$

在相互作用绘景中, 单模玻色场频率 ω_f 与原子跃迁频率 ω_q 之间失谐很大的 J-C 模型, 有效哈密顿量形式为

$$\hat{H}_{\text{eff}} = \hbar\chi(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{a}^+\hat{a}\hat{\sigma}_z), \quad (2)$$

式中 $\chi = \lambda^2/\Delta\omega$, 其中 λ 为耦合强度, 失谐量 $\Delta\omega = \omega_q - \omega_f$; 原子跃迁算符 $\hat{\sigma}_+ = |e\rangle\langle g|$, $\hat{\sigma}_- = |g\rangle\langle e|$; 泡利算符 $\hat{\sigma}_z = |e\rangle\langle e| - |g\rangle\langle g|$; $\hat{a}^+$ 和 $\hat{a}$ 分别为辐射场的产生湮灭算符. 当相互作用时间为 t , 相对应的演化么正算符为

$$\hat{U}(\Omega) = \exp\left(-\frac{i}{\hbar}\hat{H}_{\text{eff}}t\right) = \exp[-i\Omega(\hat{\sigma}_+\hat{\sigma}_- + \hat{a}^+\hat{a}\hat{\sigma}_z)], \quad (3)$$

式中, $\Omega = \chi t$, 参数 Ω 为本文将要估计的物理量.

假设在时刻 $t = 0$, 制备探测态为一个纯态, 且 Qubit 与光场之间没有关联, 即探测态为

$$\rho_0 = |\Psi_0\rangle\langle\Psi_0| = \rho_q \otimes \rho_f = |\psi_q\rangle\langle\psi_q| \otimes |\psi_f\rangle\langle\psi_f|, \quad (4)$$

且 $|\Psi_0\rangle = |\psi_q\rangle \otimes |\psi_f\rangle$. $t = 0$ 时, Qubit 系统处在一个基态 $|g\rangle$ 和激发态 $|e\rangle$ 叠加的纯态, 形式为

$$|\psi_q\rangle = \cos\frac{\theta}{2}|e\rangle + \sin\frac{\theta}{2}|g\rangle. \quad (5)$$

光场系统分别处于 Fock 态 $\rho_f = |n\rangle\langle n|$ 、热态 $\rho_f = \sum_n p_n |n\rangle\langle n|$ 和相干态 $\rho_f = |\alpha\rangle\langle\alpha|$. 系统随时间的演化表示为

$$\rho(\Omega) = \hat{U}(\Omega)\rho_0\hat{U}^\dagger(\Omega), \quad (6)$$

分别对 Qubit 或光场自由度进行部分求迹, 得到演化后 Qubit 系统和光场的约化密度算符即

$$\rho_q(\Omega) = \text{tr}_f[\hat{U}(\Omega)\rho_0\hat{U}^\dagger(\Omega)], \quad (7)$$

$$\rho_f(\Omega) = \text{tr}_q[\hat{U}(\Omega)\rho_0\hat{U}^\dagger(\Omega)]. \quad (8)$$

3 量子估计理论

量子度量学是结合量子资源和量子特性提高测量精度的科学, 一个重要的应用就是量子参数估计. 量子参数估计理论中, Cramer-Rao 下界 (CRB) 表明 Fisher 信息直接关系着参数估计的精度^[17–20], CRB 的形式为

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{NF(\Omega)}, \quad (9)$$

式中, $V(\Omega)$ 为无偏估计参数的方差, $F(\Omega)$ 为 Fisher 信息, N 为对系统的测量次数. Fisher 信息用来描述一个可观测量随机变量 X 携带关于未知参数 Ω 的信息量的多少, 定义式为

$$F(\Omega) = \int dx \frac{1}{p(x|\Omega)} \left(\frac{\partial p(x|\Omega)}{\partial \Omega} \right)^2, \quad (10)$$

式中 $p(x|\Omega)$ 为当被估计参数值为 Ω 时, 测量结果为 x 的条件概率.

在量子力学中, 根据玻恩定则 $p(x|\Omega) = \text{tr}[\Pi_x \rho_\Omega]$, 其中 $\{\Pi_x\}$ 为正定算符值测量 (POVM) 算符, ρ_Ω 为与被估计参数 Ω 有关的待测系统. 引入由 Lyapunov 方程定义的对称对数导数 L_Ω ,

$$\frac{L_{\Omega}\rho_{\Omega} + \rho_{\Omega}L_{\Omega}}{2} = \frac{\partial\rho_{\Omega}}{\partial\Omega}. \quad (11)$$

Fisher 信息可以重新表示为

$$F(\Omega) = \int dx \frac{\text{Re}(\text{tr}[\rho_{\Omega} \Pi_x L_{\Omega}])^2}{\text{tr}[\rho_{\Omega} \Pi_x L_{\Omega}]}. \quad (12)$$

在所有可能的量子测量中, 将 $F(\Omega)$ 最大化, 可以得到

$$F(\Omega) \leq H(\Omega) = \text{tr}[\rho_{\Omega} L_{\Omega}^2], \quad (13)$$

$H(\Omega)$ 称为 QFI, $H(\Omega)$ 满足的 CRB 称为 QCRB:

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{NH(\Omega)}, \quad (14)$$

式中 $H(\Omega)$ 给出了估计未知参数 Ω 精度的最终极限.

假设待测系统的密度算符的谱分解形式为

$$\rho_{\Omega} = \sum_n c_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n|, \quad (15)$$

式中 c_n 和 $|\psi_n\rangle$ 分别为密度算符的本征值和本征矢, 则 Lyapunov 方程的解 L_{Ω} 可写为

$$\begin{aligned} L_{\Omega} &= 2 \int_0^{\infty} dt \exp\{-\rho_{\Omega} t\} (\partial_{\Omega} \rho_{\Omega}) \exp\{-\rho_{\Omega} t\} \\ &= 2 \sum_{n,m} \int_0^{\infty} dt \exp[-(c_n + c_m)t] |\psi_n\rangle \\ &\quad \times \langle \psi_n | (\partial_{\Omega} \rho_{\Omega}) | \psi_m \rangle \langle \psi_m| \\ &= 2 \sum_{n,m} \frac{\langle \psi_n | \partial_{\Omega} \rho_{\Omega} | \psi_m \rangle}{c_n + c_m} |\psi_n\rangle \langle \psi_m|, \end{aligned} \quad (16)$$

其中 $c_n + c_m \neq 0$. 根据 $\partial_{\Omega} \rho_{\Omega} = \sum_n (\partial_{\Omega} c_n |\psi_n\rangle \langle \psi_n| + c_n |\partial_{\Omega} \psi_n\rangle \langle \psi_n| + c_n |\psi_n\rangle \langle \partial_{\Omega} \psi_n|)$, 得出 QFI 可写为

$$\begin{aligned} F &= \text{tr}[\rho_{\Omega} L_{\Omega}^2] = \sum_n \frac{\partial \log c_n}{\partial \Omega} \\ &\quad + 4 \sum_{n,m} c_n \left(\frac{c_n - c_m}{c_n + c_m} \right) |\langle \psi_n | \partial_{\Omega} \psi_m \rangle|^2. \end{aligned} \quad (17)$$

当初态 ρ_0 经过一个与未知参数 Ω 有关的么正操作, 即

$$\rho_{\Omega} = \hat{U}(\Omega) \rho_0 \hat{U}^{\dagger}(\Omega) = \hat{U}(\Omega) |\Psi_0\rangle \langle \Psi_0| \hat{U}^{\dagger}(\Omega), \quad (18)$$

$$\hat{U}(\Omega) = \exp(-i\Omega G), \quad (19)$$

其中 $|\Psi_0\rangle$ 是探测态, G 可看作未知参数 Ω 的厄米生成元. 在这种情况下 QFI 与未知参数 Ω 无关, 是厄米算符 G 在初态中涨落的 4 倍^[30], 即

$$H(\Omega) = 4(\langle \Psi_0 | G^2 | \Psi_0 \rangle - \langle \Psi_0 | G | \Psi_0 \rangle^2) = 4\langle \Delta^2 G \rangle_0. \quad (20)$$

相应的量子 Cramer-Rao 不等式写为

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{4N\langle \Delta^2 G \rangle_0}. \quad (21)$$

当系统的量子态 ρ 与参数 $\{\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\}$ 有关时, QCRB 由量子 Fisher 信息矩阵 (QFIM) 给出:

$$\mathbf{C} \geq \frac{1}{N} \mathbf{H}^{-1}, \quad (22)$$

其中 $\mathbf{C}$ 为估计子的协方差矩阵, $\mathbf{H}^{-1}$ 为 QFIM 的逆矩阵. 协方差矩阵元和 QFIM 矩阵元分别定义为

$$C_{\mu\nu} = \text{IE}[\lambda_{\mu} \lambda_{\nu}] - \text{IE}[\lambda_{\mu}] \text{IE}[\lambda_{\nu}], \quad (23)$$

$$H_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \text{tr}[\rho \{L_{\mu}, L_{\nu}\}] = \frac{1}{2} \text{tr}[\rho (L_{\mu} L_{\nu} + L_{\nu} L_{\mu})], \quad (24)$$

(24) 式中, L_{μ} 为第 μ 个参数对应的对称对数导数.

4 应用

在这一部分, 制备探测初态为 Qubit 系统与光场的直积态, 光场分别为 Fock 态、热态和相干态, 分别计算了这三种探测态经大失谐 J-C 模型哈密顿量演化后复合系统以及 Qubit 和光场系统的 QFI.

4.1 Fock 态光场

当光场处于 Fock 态 $|\psi_f\rangle = |n\rangle$, 相应的探测态为

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_q \otimes \rho_f \\ &= \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle e| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle g| + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle g| \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle e| \right] \otimes |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (25)$$

根据 (6) 式, ρ_0 经 (3) 式演化时间 t 后, 系统的密度矩阵变为

$$\begin{aligned} \rho_1(\Omega) &= \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle e| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle g| \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp[-i\Omega(2n+1)] |e\rangle \langle g| \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp[i\Omega(2n+1)] |g\rangle \langle e| \right\} \\ &\quad \otimes |n\rangle \langle n|. \end{aligned} \quad (26)$$

根据 (20) 式计算出 Fock 态时未知参数 Ω 对应的 QFI 为

$$H_1(\Omega) = (1 + 2n)^2 \sin^2 \theta. \quad (27)$$

再计算 Qubit 和光场两个子系统对应的 QFI,

$$\begin{aligned}\rho_{q1}(\Omega) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle e| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle g| \\ &+ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp[-i\Omega(2n+1)] |e\rangle \langle g| \\ &+ \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp[i\Omega(2n+1)] |g\rangle \langle e|. \quad (28)\end{aligned}$$

根据 (17) 式得到 $H_{q1}(\Omega)$ 为

$$H_{q1}(\Omega) = (1+2n)^2 \sin^2 \theta = H_1(\Omega), \quad (29)$$

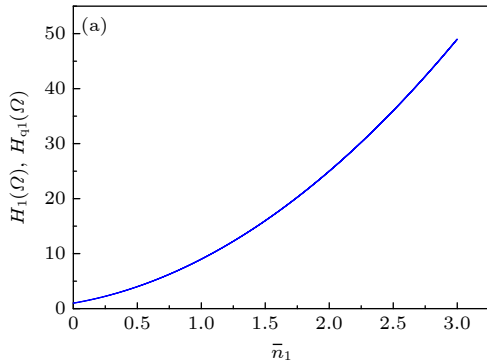
通过计算, 得出 $\rho_{f1}(\Omega) = |n\rangle \langle n| = \rho_f$ 以及 $H_{f1}(\Omega) = 0$. 综上, 当光场为 Fock 态情况时的 QCRB 为

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{(1+2n)^2 \sin^2 \theta}. \quad (30)$$

从 (27) 式、(30) 式和图 1 可以看出, 光场为 Fock 态时 $H_1(\Omega)$ 随平均光子数 $\bar{n}_1$ 单调增加. 当 $\theta = \pi/2$, 原子初态处于基态与激发态的等权叠加态, $H_1(\Omega)$ 总是取最大值, 即 $H_1(\Omega) = (1+2n)^2$, 且被估计参数的方差最小为 $V(\Omega) = 1/(1+2n)^2$, 因此使 QFI 最大的 Qubit 态的最佳制备对应于基态与激发态的等权叠加态; 当 $\theta = 0$ 或 π , $H_1(\Omega)$ 最小, 即 $H_1(\Omega) = 0$, 被估计参数的方差趋于无穷大, 此时原子初态处于激发态或基态, 并不是最优探测态, 因此不在我们关注范围之内. $H_{q1}(\Omega)$ 和 $H_{f1}(\Omega)$ 直接表明关于未知参数 Ω 的所有信息都包含在 Qubit 系统中, 而光场不包含任何关于未知参数 Ω 的信息.

4.2 热态光场

考虑在温度 T 时与腔壁处于热平衡状态的单模热光场, 即光场遵从热平衡辐射规律:



$$\rho_f = \frac{\exp\left(-\frac{\hat{H}}{k_B T}\right)}{\text{tr}\left[\exp\left(-\frac{\hat{H}}{k_B T}\right)\right]} = \sum_n p_n |n\rangle \langle n|, \quad (31)$$

其中, 谐振子哈密顿量 $\hat{H} = \hbar\omega(\hat{a}^\dagger \hat{a} + 1/2)$, $\hat{H}|n\rangle = E_n|n\rangle = \hbar\omega(n+1/2)$, $p_n = \langle n|\rho_f|n\rangle$. 相对应的探测态为

$$\begin{aligned}\rho_0 &= \rho_q \otimes \rho_f \\ &= \left[\cos^2 \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle e| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle g| + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle g| \right. \\ &\quad \left. + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle e| \right] \otimes \sum_n p_n |n\rangle \langle n|, \quad (32)\end{aligned}$$

经 (3) 式演化时间 t 后的系统可表示为

$$\begin{aligned}\rho_2(\Omega) &= \sum_n p_n \left\{ \cos^2 \frac{\theta}{2} |e\rangle \langle e| + \sin^2 \frac{\theta}{2} |g\rangle \langle g| \right. \\ &\quad + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp[-i\Omega(2n+1)] |e\rangle \langle g| \\ &\quad \left. + \cos \frac{\theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \exp[i\Omega(2n+1)] |g\rangle \langle e| \right\} \\ &\quad \otimes |n\rangle \langle n|. \quad (33)\end{aligned}$$

根据 (17) 式, 计算出光场为热态时未知参数 Ω 对应的 QFI 为

$$\begin{aligned}H_2(\Omega) &= \sum_n p_n (2n+1)^2 \sin^2 \theta \\ &= \left[\frac{1 + 6 \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) + \exp\left(\frac{2\hbar\omega}{k_B T}\right)}{-1 + \exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right)} \right] \sin^2 \theta. \quad (34)\end{aligned}$$

当玻色场为热平衡态时的平均光子数为

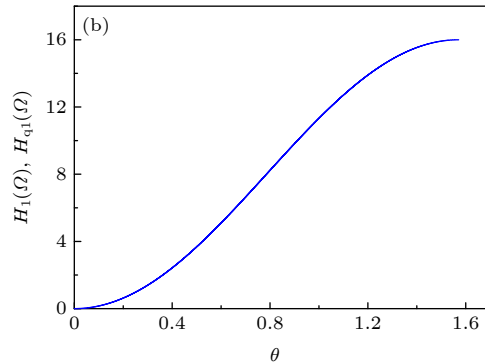


图 1 光场为 Fock 态时 QFI 随不同变量的变化 ($H_{q1}(\Omega) = H_1(\Omega)$) (a) 平均光子数 $\bar{n}_1$; (b) θ

Fig. 1. Variation of QFI with different variables when the radiation field is a Fock state ($H_{q1}(\Omega) = H_1(\Omega)$): (a) The average photon number, $\bar{n}_1$; (b) θ .

$$\bar{n}_2 = \frac{1}{\exp\left(\frac{\hbar\omega}{k_B T}\right) - 1}. \quad (35)$$

此时 QFI 重新表示为

$$H_2(\Omega) = (1 + 8\bar{n}_2 + 8\bar{n}_2^2)\sin^2\theta. \quad (36)$$

当 $k_B T \gg \hbar\omega$ 时, $\bar{n}_2 \approx k_B T/(\hbar\omega)$, $H_2(\Omega)$ 可写为

$$H_2(\Omega) = \left[1 + 8\frac{k_B T}{\hbar\omega} + 8\left(\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right)^2\right]\sin^2\theta; \quad (37)$$

当 $k_B T \ll \hbar\omega$ 时, $\bar{n}_2 \approx \exp[-k_B T/(\hbar\omega)]$, $H_2(\Omega)$ 可写为

$$H_2(\Omega) = \sin^2\theta \left[1 + 8\exp\left(-\frac{k_B T}{\hbar\omega}\right) + 8\exp\left(-\frac{2k_B T}{\hbar\omega}\right)\right], \quad (38)$$

计算子系统对应的 QFI 为

$$\begin{aligned} \rho_{q2}(\Omega) = \sum_n p_n & \left\{ \cos^2\frac{\theta}{2} |e\rangle\langle e| + \sin^2\frac{\theta}{2} |g\rangle\langle g| \right. \\ & + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \exp[-i\Omega(2n+1)] |e\rangle\langle g| \\ & \left. + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \exp[i\Omega(2n+1)] |g\rangle\langle e| \right\}. \end{aligned} \quad (39)$$

$H_{q2}(\Omega) = (1 + 8\bar{n}_2 + 8\bar{n}_2^2)\sin^2\theta = H_2(\Omega)$. 并且通过计算, 同样也得出 $\rho_{f2}(\Omega) = \sum_n p_n |n\rangle\langle n| = \rho_f$ 及 $H_{f2}(\Omega) = 0$. 综上, 当光场为热态情况时的 QCRB 为

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{(1 + 8\bar{n}_2 + 8\bar{n}_2^2)\sin^2\theta}. \quad (40)$$

由 (36) 式、(40) 式和图 2 可知, 当光场处于热态时, QFI 的情况与 Fock 态的情况相类似. 当 $\theta = \pi/2$, 即原子初态处于基态与激发态的等权叠加态,

$H_2(\Omega)$ 总是取最大值, 即 $H_2(\Omega) = 1 + 8\bar{n}_2 + 8\bar{n}_2^2$, 参数 Ω 的最小方差 $V(\Omega) = 1/(1 + 8\bar{n}_2 + 8\bar{n}_2^2)$, 因此 Qubit 态对应于基态与激发态的等权叠加态的初态为最优探测态; 当 $\theta = 0$ 或 π , $H_2(\Omega)$ 最小, 即 $H_2(\Omega) = 0$, 被估计参数的方差趋于无穷大, 此时原子初态处于激发态或基态, 并不是最优探测态, 因此不予讨论. $H_{q2}(\Omega)$ 和 $H_{f2}(\Omega)$ 直接表明关于未知参数 Ω 的所有信息都包含在 Qubit 系统中, 而光场不包含任何关于未知参数 Ω 的信息.

4.3 相干态光场

当光场初态处于相干态, 则相应的探测态为

$$\begin{aligned} \rho_0 &= \rho_q \otimes \rho_f \\ &= \left[\cos^2\frac{\theta}{2} |e\rangle\langle e| + \sin^2\frac{\theta}{2} |g\rangle\langle g| + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} |e\rangle\langle g| \right. \\ & \quad \left. + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} |g\rangle\langle e| \right] \otimes |\alpha\rangle\langle\alpha|. \end{aligned} \quad (41)$$

密度矩阵演化为

$$\begin{aligned} \rho_3(\Omega) &= \cos^2\frac{\theta}{2} |e\rangle\langle e| \otimes |\alpha \exp(-i\Omega)\rangle\langle\alpha \exp(-i\Omega)| \\ & \quad + \sin^2\frac{\theta}{2} |g\rangle\langle g| \otimes |\alpha \exp(i\Omega)\rangle\langle\alpha \exp(i\Omega)| \\ & \quad + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \exp(-i\Omega) |e\rangle\langle g| \\ & \quad \otimes |\alpha \exp(-i\Omega)\rangle\langle\alpha \exp(i\Omega)| \\ & \quad + \cos\frac{\theta}{2} \sin\frac{\theta}{2} \exp(i\Omega) |g\rangle\langle e| \\ & \quad \otimes |\alpha \exp(i\Omega)\rangle\langle\alpha \exp(-i\Omega)|. \end{aligned} \quad (42)$$

根据 (20) 式计算出复合系统对应的 QFI 为

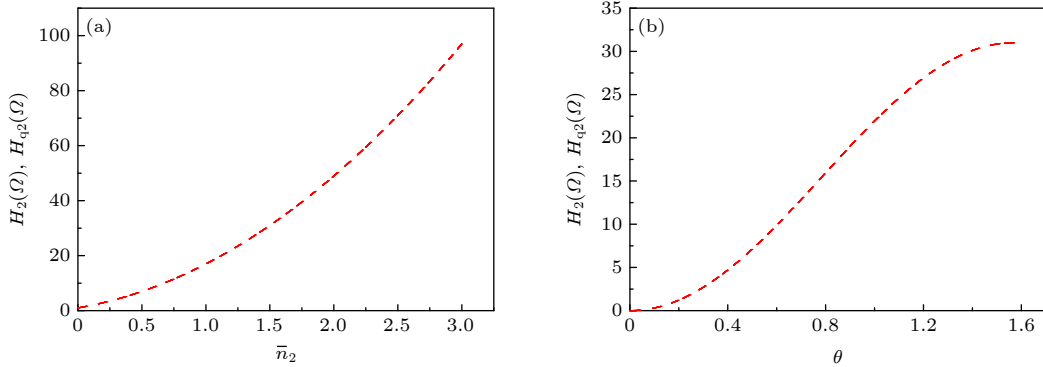


图 2 光场为热态时 QFI 随不同变量的变化 ($H_{q2}(\Omega) = H_2(\Omega)$) (a) 平均光子数 $\bar{n}_2$; (b) θ

Fig. 2. Variation of QFI with different variables when the radiation field is a thermal state ($H_{q2}(\Omega) = H_2(\Omega)$): (a) The average photon number, $\bar{n}_2$; (b) θ .

$$\begin{aligned}
 H_3(\Omega) &= \left(2|\alpha|^4 + \frac{1}{2}\right)(1 - \cos 2\theta) \\
 &\quad + 2|\alpha|^2(3 - \cos 2\theta) \\
 &= \left(2\bar{n}_3^2 + \frac{1}{2}\right)(1 - \cos 2\theta) \\
 &\quad + 2\bar{n}_3(3 - \cos 2\theta), \quad (43)
 \end{aligned}$$

$$\bar{n}_3 = \langle \alpha | \hat{a}^\dagger \hat{a} | \alpha \rangle = |\alpha|^2,$$

则 $H_3(\Omega)$ 对应的 QCRB 为

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{\left(2\bar{n}_3^2 + \frac{1}{2}\right)(1 - \cos 2\theta) + 2\bar{n}_3(3 - \cos 2\theta)}. \quad (44)$$

光场子系统对应的 QFI

$$\begin{aligned}
 \rho_{\text{F3}}(\Omega) &= \cos^2 \frac{\theta}{2} |\alpha \exp(-i\Omega)\rangle \langle \alpha \exp(-i\Omega)| \\
 &\quad + \sin^2 \frac{\theta}{2} |\alpha \exp(i\Omega)\rangle \langle \alpha \exp(i\Omega)|, \quad (45)
 \end{aligned}$$

$$H_{\text{F3}}(\Omega) = 4\alpha^2 = 4\bar{n}_3, \quad (46)$$

则 $H_{\text{F3}}(\Omega)$ 对应的 QCRB 为

$$V(\Omega) \geq \frac{1}{4\bar{n}_3}. \quad (47)$$

由 (43) 式、(44) 式和图 3 可看到, 当光场为相干态时, QFI 的情况与 Fock 态和热态的情况类似, 当 $\theta = \pi/2$, 即 Qubit 系统初态为基态与激发态的等权叠加时, $H_3(\Omega)$ 取最大值 $H_3(\Omega) = 4\bar{n}_3^2 + 8\bar{n}_3 + 1$, 参数 Ω 的最小方差为 $V(\Omega) = 1/(4\bar{n}_3^2 + 8\bar{n}_3 + 1)$, 此时的初态为最优探测态, 因此使 QFI 最大的 Qubit 态的最佳制备对应于基态与激发态的等权叠加态; 而当 $\theta = 0$ 或 π , 即 Qubit 系统初态为基态或激发态时, $H_3(\Omega)$ 取最小值 $H_3(\Omega) = 4\bar{n}_3$, 此时被估计参数的方差最大为 $V(\Omega) = 1/4\bar{n}_3$, 此时参数估计的精度受到限制, 所能达到的最大估计精度极限为散粒噪声极限。

4.4 结果

图 4 比较了光场分别为 Fock 态、热态和相干态时 QFI 随平均光子数 $\bar{n}$ 和 θ 的变化。从图 4(a)

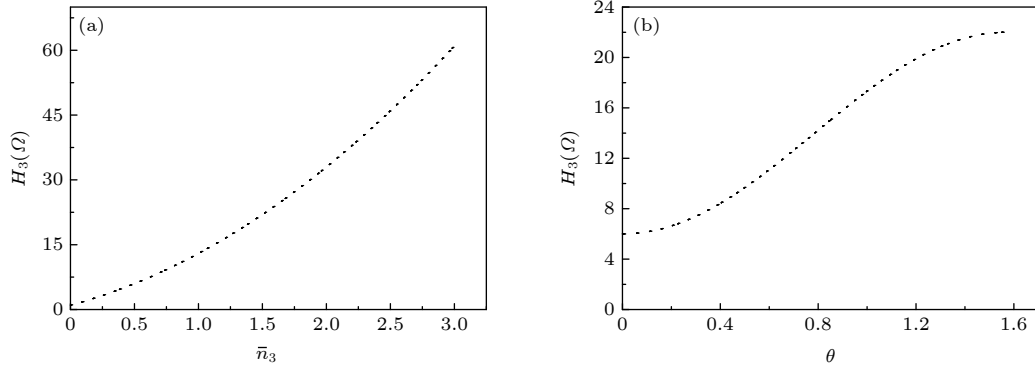


图 3 腔场为相干态时 QFI 随不同变量的变化 (a) 平均光子数 $\bar{n}_3$; (b) θ

Fig. 3. Variation of QFI with different variables when the radiation field is a coherent state: (a) The average photon number, $\bar{n}_3$; (b) the θ .

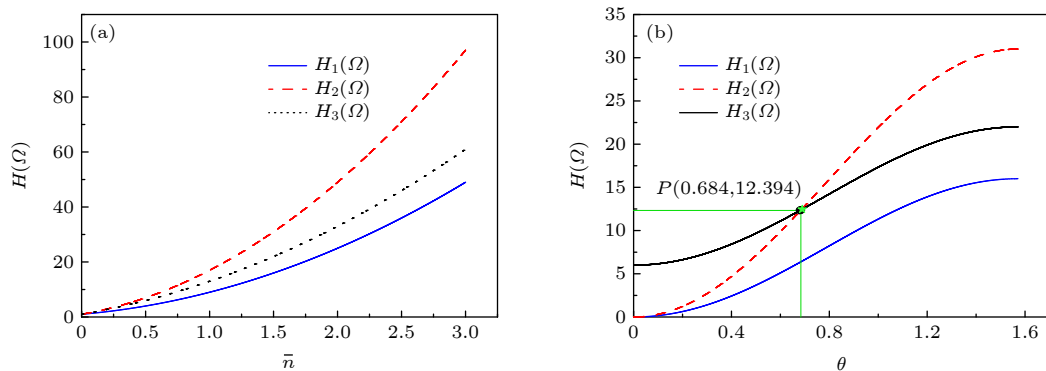


图 4 $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega)$ 和 $H_3(\Omega)$ 随不同变量的变化 (a) 平均光子数 $\bar{n}$; (b) θ

Fig. 4. Variation of the $H_1(\Omega)$, $H_2(\Omega)$ and $H_3(\Omega)$ with different variables: (a) The average photon number, $\bar{n}$; (b) θ .

可直观地看出, $H(\Omega)$ 随平均光子数单调递增, 且热态情况 ($H_2(\Omega)$) 优于相干态情况 ($H_3(\Omega)$), 相干态情况优于 Fock 态 ($H_1(\Omega)$). 从图 4(b) 可看出, $H(\Omega)$ 随 θ 也在单调增加, 且光场处于热态和相干态时的 QFI 均优于 Fock 态情况的 QFI. 当 $\theta = 0$ 时, QFI 最小, Fock 态和热态情况 $H_1(\Omega) = H_2(\Omega) = 0$, 即参数 Ω 的最大方差趋于无穷大, 但相干态情况 $H_3(\Omega) = 4\bar{n}_3$, 参数 Ω 的最大方差为 $1/4\bar{n}_3$. 当 $\theta < \pi/4.6$, 相干态情况的 QFI 比热态情况的大, 当 $\theta > \pi/4.6$, 相干态情况的 QFI 比热态情况的小. 综合分析, 随 $\bar{n}$ 和 θ 同时增长, 三种情况的 $H(\Omega)$ 均在单调增加, $\theta = \pi/2$ 取最大, 且热态情况和相干态情况的 QFI 均优于 Fock 态情况. 但当 $\theta < \pi/4.6$, 相干态情况的 QFI 优于热态情况, 当 $\theta > \pi/4.6$, 情况相反. 再具体分析每一种情况中复合系统的 QFI 与子系统的 QFI. 发现 Fock 态情况和热态情况类似, Qubit 子系统的 QFI 等于复合系统的 QFI, 光场子系统的 QFI 为零, 换句话说, 光场子系统不包含任何关于待估计参数的信息. 但相干态情况中, 情况并非如此, 光场子系统的 QFI 与平均光子数 $\bar{n}$ 成四倍关系. 综上所述, 在三种不同的探测态情况中, 量子 Qubit 态处于基态与激发态的等权叠加态时, 此时的探测态为最优探测态; 当 θ 取某一值, 光场对应于热态时的初态为最优探测态.

5 结 论

综上, 大失谐 J-C 模型哈密顿量的耦合常数不是可观测量, 估计耦合常数时需要利用 QCRB 和 QFI 计算的精度界限. 这具有根本意义, 因为它对应于寻找量子力学对物质处于不同态的可区分性施加的最终极限. 本文通过制备探测初态为 Qubit 系统与光场的直积态, 光场分别为 Fock 态、热态、相干态, 基于 QFI 对大失谐 J-C 模型的耦合常数进行估计. 分别得出光场为 Fock 态、热态、相干态时复合系统的 QFI 以及子系统的 QFI, 并进行分析比较, 发现三种不同光场的复合系统的 QFI 取决于平均光子数 $\bar{n}$ 和 Qubit 内态. 在大失谐 J-C 模型耦合常数的估计问题中, Qubit 基态与激发态的等权叠加态为最优探测态, 此时 QFI 取最大值, 利用热态或相干态情况中的探测态进行估计得到的精度要比 Fock 态情况的高. 本文的研究结果

为大失谐 J-C 模型耦合常数的估计提供了方法和依据.

参考文献

- [1] Pang S S, Brun T A 2014 *Phys. Rev. A* **90** 022117
- [2] Jing X X 2016 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [井晓幸 2016 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [3] Genoni M G, Giorda P, Matteo G A P 2008 *Phys. Rev. A* **78** 032303
- [4] Brida G, Degiovanni I, Florio A, Genovese M, Giorda P, Meda A, Matteo G A P, Shurupov A 2010 *Phys. Rev. Lett.* **104** 100501
- [5] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2006 *Phys. Rev. Lett.* **96** 010401
- [6] Monras A 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033821
- [7] Genoni M G, Olivares S, Matteo G A P 2011 *Phys. Rev. Lett.* **106** 153603
- [8] Monras A, Matteo G A P 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 160401
- [9] Genoni M G, Invernizzi C, Matteo G A P 2009 *Phys. Rev. A* **80** 033842
- [10] Lu X M, Wang X G 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 120503
- [11] Matteo G A P 2008 *Int. J. Quant. Inf.* **0804** 2981
- [12] Helstrom C W 1967 *Phys. Lett. A* **25** 101
- [13] Yuen H P, Lax M 1973 *IEEE Trans. Inf. Th.* **19** 740
- [14] Helstrom C W, Kennedy R S 1974 *IEEE Trans. Inf. Th.* **20** 16
- [15] Braunstein S, Caves C 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [16] Braunstein S, Caves C, Milburn G 1996 *Ann. Phys.* **247** 135
- [17] Fisher R A 1925 *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22** 700
- [18] Helstrom C W 1969 *J. Stat. Phys.* **1** 231
- [19] Holevo A S 1982 *Probabilistic and Statistical Aspects of Quantum Theory* (North Holland Amsterdam) pp52–96, 160–168
- [20] Holevo A S 2001 *Statistical Structure of Quantum Theory* (Berlin, Heidelberg: Springer) pp45–70
- [21] Pezze L, Smerzi A, Oberthaler M K, Schmied R, Treutlein P 2018 *Rev. Mod. Phys.* **90** 035005
- [22] Gabbriellini M 2018 arXiv: 1810.10537 [quant-ph]
- [23] Pezze L, Smerzi A 2014 arXiv: 1411.5164 [quant-ph]
- [24] Ren Z H, Li Y, LiY N, Li W D 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 040601 (in Chinese) [任志红, 李岩, 李艳娜, 李卫东 2019 物理学报 **68** 040601]
- [25] Royfried B 1998 *Physics from Fisher Information* (Cambridge: Cambridge University Press) pp22–62
- [26] Liu J, Jing X X, Zhong W, Wang X G 2014 *Commun. Theor. Phys.* **61** 45
- [27] Liu J, Yuan H D, Lu X M, Wang X G 2020 *J. Phys. A:Math. Theor.* **53** 023001
- [28] Watanabe D Y 2014 *Formulation of Uncertainty Relation Between Error and Disturbance in Quantum Measurement by Using Quantum Estimation Theory* (Tokyo: Springer Theses) pp19–44
- [29] Genoni M G, Tufarelli T 2019 *Phys. A:Math. Theor.* **52** 434002
- [30] Monras A 2006 *Phys. Rev. A* **73** 033821
- [31] Smirne A, Kolodynski J, Huelga S F, Dobrzanski R D 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 120801
- [32] Pirandola S, Lupo C 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 100502
- [33] Lupo C, Pirandola S 2016 *Phys. Rev. Lett.* **117** 190802
- [34] Invernizzi C, Korbman M, Venuti L C, Matteo G A P 2008

Phys. Rev. A **78** 042106

- [35] Schneiter F, Qvarfort S, Serafini A, Xuereb A, Braun D, Rätzel D, Bruschi D E, 2020 *Phys. Rev. A* **101** 033834
 [36] Sanavio C, Bernad J Z, Xuereb A 2020 *Phys. Rev. A* **102**

013508

- [37] Genoni M G, Invernizzi C 2012 *Eur. Phys. J. Spec.* **10** 1140
 [38] Gerry C, Knight P 2005 *Introductory Quantum Optics* (Cambridge: Cambridge University Press) pp25–27, 105–107

Estimation of light-matter coupling constant under dispersive interaction based on quantum Fisher information^{*}

Niu Ming-Li Wang Yue-Ming[†] Li Zhi-Jian

(*Institute of Theoretical Physics, College of Physics and Electronic Engineering, State Key Laboratory of Quantum Optics and Quantum Optics Devices, Collaborative Innovation Center of Extreme Optics, Shanxi University, Taiyuan 030006, China*)

(Received 1 November 2021; revised manuscript received 7 December 2021)

Abstract

Quantum parameter estimation is one of the most important applications in quantum metrology. The basic theory of quantum parameter estimation—quantum Cramer-Rao bound—shows that the precision limit of quantum parameter estimation is directly related to quantum Fisher information. Therefore quantum Fisher information is extremely important in the quantum parameter estimation. In this paper we use quantum parameter estimation theory to estimate the coupling constant of the Jaynes-Cummings model with large detuning. The initial probing state is the direct product state of qubit and radiation field in which Fock state, thermal state and coherent state are taken into account respectively. We calculate the quantum Fisher information of the hybrid system as well as qubit and radiation field for each probing state after the parameter evolution under the Hamiltonian of the Jaynes-Cummings model with large detuning. The results show that the quantum Fisher information increases monotonically with the average photon number increasing. The optimal detection state is that when the qubit system is in the equal weight superposition of the ground and the excited state, at this time the quantum Fisher information always reaches a maximum value. When the radiation field of probing state is Fock state or the thermal state, the information about the estimated parameter is included only in the qubit. The estimation accuracy of the coupling constant with thermal state or coherent state is higher than that with Fock state.

Keywords: quantum Fisher information, parameter estimation, quantum Cramer-Rao bound, Jaynes-Cummings model

PACS: 03.67.–a, 03.65.Ta, 06.20.–f, 37.30.+i

DOI: 10.7498/aps.71.20212029

^{*} Project supported by the Shanxi Provincial “1331 Project”, China (Grant No. D18001).

[†] Corresponding author. E-mail: wang_ym@sxu.edu.cn