



Duffing振子型结构声系统中声能量非互易传递的建模和实验研究

金江明 谢添伟 程昊 肖岳鹏 D. Michael McFarland 卢奂采

**Modeling and experimental study of non-reciprocal acoustic energy transfer in vibro-acoustic Duffing oscillator**

Jin Jiang-Ming Xie Tian-Wei Cheng Hao Xiao Yue-Peng D. Michael McFarland Lu Huan-Cai

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 104301 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20212181

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212181>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

声子系统中弹性波与热运输的拓扑与非互易现象

Topological and non-reciprocal phenomena in elastic waves and heat transport of phononic systems

物理学报. 2019, 68(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191463>

侧向局域共振超构板声振特性

Vibro-acoustic performance of acoustic metamaterial plate with periodic lateral local resonator

物理学报. 2021, 70(21): 214301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210595>

多层膜磁性微泡的非线性声振动特性

Nonlinear acoustic characteristics of multilayer magnetic microbubbles

物理学报. 2021, 70(1): 014301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200973>

基于强耦合Duffing振子的微弱脉冲信号检测与参数估计

Detection and parameter estimation of weak pulse signal based on strongly coupled Duffing oscillators

物理学报. 2019, 68(8): 080501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181856>

磁光平面波导的单向传播特性

Properties of one-way propagation in the magneto-optical planar waveguide

物理学报. 2020, 69(7): 074206 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191795>

声子晶体中的表面声波赝自旋模式和拓扑保护声传输

Pseudospin modes of surface acoustic wave and topologically protected sound transmission in phononic crystal

物理学报. 2019, 68(22): 227805 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191363>

# Duffing 振子型结构声系统中声能量 非互易传递的建模和实验研究\*

金江明<sup>1)</sup> 谢添伟<sup>1)</sup> 程昊<sup>2)</sup> 肖岳鹏<sup>1)</sup>  
D. Michael McFarland<sup>1)</sup> 卢奂采<sup>1)†</sup>

1) (浙江工业大学机械工程学院, 杭州 310014)

2) (浙江工业大学理学院, 杭州 310014)

(2021 年 11 月 26 日收到; 2022 年 1 月 24 日收到修改稿)

声能量非互易传递机理及声非互易系统构建是近年来声学领域的研究热点. 本文开展了由非线性薄膜和两个不同尺寸声腔组成的实验系统中声能量非互易传递的实验研究. 该系统利用简化为 Duffing 振子的薄膜频响函数的不对称性, 实现了声能量的非互易传递. 采用复化平均法获得系统频响函数的渐近解, 理论计算结果与实验测量结果吻合. 理论计算和实验结果表明: 该系统理论上存在最大 9.1 倍的非互易量, 实验测得的最大非互易量为 4.3 倍, 归一化跳变区频率带宽为 0.56. 研究结果揭示了实验系统中声能量非互易传递机理, 为实现空气介质声系统中声能量的非对称传递提供了一种新方法.

**关键词:** 声非互易, 单向传递, 非线性薄膜振动, Duffing 振子

**PACS:** 43.25.+y, 43.40.+s

**DOI:** 10.7498/aps.71.20212181

## 1 引言

通过在系统中引入具有非线性特性的元件<sup>[1,2]</sup>, 实现声能量的非互易传递<sup>[3,4]</sup>, 是设计声二极管<sup>[5,6]</sup>、声学斗篷<sup>[7,8]</sup>、声单向透镜<sup>[9,10]</sup>、隔声体和拓扑绝缘体<sup>[11–16]</sup>等新型声学元件的基础, 是近年来声学领域<sup>[17]</sup>的研究热点.

非线性声系统具有跳变、随系统能量变化的共振频率等线性系统不具有的特性, 因而可作为声能量非互易传递的控制元件. 按系统非互易产生机理, 可分为高次谐波产生<sup>[18,19]</sup>、分岔<sup>[20,21]</sup>和非线性共振<sup>[22–24]</sup>三类非线性声非互易系统. 程建春研究组<sup>[18,19]</sup>基于非线性介质产生高次谐波产生机理提出了声二极管, 实现了声能量的单向传递. Daraio 研究组<sup>[20,21]</sup>利用一维周期性颗粒链结构实现了孤

波的整流效应, 构建了基于分岔的声整流器. Vakakis 研究组<sup>[22–24]</sup>利用非线性内共振设计了一系列声非互易系统. 2020 年, 汪越胜研究组<sup>[25]</sup>基于双原子晶格链模型, 研究了非线性弹性波超材料的带隙特性和非互易传输特性. 近年来, 越来越多关于非线性非互易动力系统最新研究成果得到发表.

对于空气介质声系统, 能量水平低于上述研究中固体、液体介质声系统 3—4 个数量级, 同时系统阻尼高、耗散大, 缺乏可物理实现的强非线性元件, 因此, 难以构建空气介质强非线性实验系统, 至今仅有少数学者开展了相关研究. 2010 年, Cochelin 研究组<sup>[26]</sup>将大振幅非线性振动薄膜与线性声系统相耦合, 构建了非线性能量阱 (nonlinear energy sink, NES), 实现了声波的靶向目标能量转移, 并开展了多个类型的 NES 系统<sup>[27–29]</sup>的研究, 同时研究了大振幅非线性振动薄膜的宽频带吸声

\* 国家自然科学基金 (批准号: 51875522, 51975525) 和浙江省“一带一路”国合专项 (批准号: 2018C04018) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [luancailu@zjut.edu.cn](mailto:luancailu@zjut.edu.cn)

性能<sup>[30]</sup>. 这些研究表明利用 NES 可以实现声波的定向传递, 但对声波非对称传递还没有定量的和实验性的研究.

本文基于 Duffing 振子在弱非线性区域的非线性共振和强非线性区的分岔两种声能量非互易传递机理, 构建了由两个不同尺寸声腔和简化为 Duffing 振子的薄膜构成的声非互易实验系统, 并对该系统开展了正反两个方向上声能量非互易传递问题的建模和实验研究. 首先给出声非互易实验系统的设计; 然后对非线性声互易系统的声腔、薄膜两类单元进行建模, 给出系统理论模型和声系统的非互易性定义; 并对实验结果与理论结果进行对比分析.

## 2 声非互易实验系统设计

非线性声非互易系统构成, 如图 1 所示. 该系统由两个不同大小的正方体声腔 (边长分别为 0.2 m 和 0.3 m) 和一张薄膜组成. 不同体积的声腔使系统具有不对称性, 薄膜的大振幅非线性振动使系统成为强非线性结构声系统. 薄膜固定在分隔两个空腔的壁面上. 薄膜材料为硅胶 (polydimethylsiloxane, PDMS), 为了获得具有大非线性的薄膜, 在保证薄膜平整、边界条件均匀的前提下, 将薄膜预应力控制到越低越好, 本研究中实验测得的薄膜固有频率为 77 Hz. 声腔材料为 PMMA (polymethyl methacrylate, PMMA).

采用源强可测量的体积速度声源 (型号: Brüel & Kjær 4295) 作为声系统激励. 采用 1/4 inch 传声器测量正向、反向激励下的系统响应, 传声器安

装在上声腔和下声腔的中间位置. 采用激光多普勒测振仪 (型号: Polytec PSV 400) 测量薄膜中心点的振动速度. 系统参数和实验装置具体参数分别由表 1 和表 2 给出.

表 1 变量和参数表  
Table 1. Nomenclature.

参数名称	符号
上声腔边长	$L_1$
下声腔边长	$L_2$
上声腔体积	$V_1$
下声腔体积	$V_2$
薄膜半径	$R$
薄膜厚度	$h$
薄膜面积	$S_{me}$
薄膜质量	$m_{me}$
薄膜表面附加空气质量	$m_a$
实验测得薄膜的一阶共振频率	$f_1$
无预应力的薄膜共振频率	$f_0$
薄膜密度	$\rho_{me}$
薄膜杨氏模量	$E$
薄膜线性刚度	$k_1$
薄膜立方非线性刚度	$k_3$
薄膜泊松比	$\nu$
薄膜阻尼系数	$\eta$
薄膜中心点横向位移	$\dot{q}_{me}$
薄膜平均速度	$\bar{v}_n$
空气声速	$c_0$
空气密度	$\rho_a$
激励频率	$\omega_s$
源强幅值	$Q_s$
非互易量	$NR$



图 1 结构声非互易系统构成 (a) 实验系统全貌; (b) 非互易实验装置

Fig. 1. Configuration of the non-reciprocal vibro-acoustic experimental system: (a) The overview of the experimental set-up; (b) the non-reciprocal experimental apparatus.

表 2 系统参数

Table 2. System parameters.

参数名称	符号	数值	单位
上声腔边长	$L_1$	0.2	m
下声腔边长	$L_2$	0.3	m
薄膜半径	$R$	0.017	m
薄膜厚度	$h$	$1 \times 10^{-4}$	m
薄膜密度	$\rho_{me}$	980	kg/m <sup>3</sup>
薄膜杨氏模量	$E$	2.1	MPa
薄膜泊松比	$\nu$	0.49	
实验测得的薄膜线性固有频率	$f_1$	77	Hz
薄膜立方非线性刚度	$k_3$	$3.50 \times 10^6$	N/m <sup>3</sup>
薄膜阻尼系数	$\eta$	$8 \times 10^{-5}$	s <sup>-1</sup>
空气声速	$c_0$	340	m/s
空气密度	$\rho_a$	1.29	kg/m <sup>3</sup>

### 3 数学模型

#### 3.1 薄膜

采用 Von Karman 非线性板壳模型和 Kelvin-Voigt 粘弹性本构模型, 由虚功原理, 建立薄膜的非线性的运动方程. 然后采用抛物线函数作为薄膜一阶模态振型函数, 通过 Rayleigh-Ritz 降阶建模方法, 获得简化为 Duffing 振子的薄膜控制方程 [22]:

$$m_{me}\ddot{q}_{me} + k_1 \left[ (f_1/f_0)^2 q_{me} + \eta \dot{q}_{me} \right] + k_3 (q_{me}^3 + 2\eta q_{me}^2 \dot{q}_{me}) = \frac{S_{me}}{2} p_{me}(t), \quad (1)$$

其中  $q_{me}$  为薄膜中心的横向位移;  $p_{me}(t)$  为薄膜所受的声压.  $f_1$  为有预应力时薄膜的线性一阶固有频率, 由实验测量获得.  $f_0$  为无预应力的薄膜的共振频率, 由 (2) 式计算 [31]:

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1.015^4 \pi^4 E h^2}{12(1-\nu^2) \rho_{me} R^4}}. \quad (2)$$

(1) 式中的其它参数, 由下列公式给出:

$$m_{me} = \frac{\rho_{me} h S_{me} + m_a}{3}, \quad k_3 = \frac{8\pi E h}{3(1-\nu^2) R^2},$$

$$k_1 = \frac{1.015^4 \pi^5}{36} \frac{E h^3}{(1-\nu^2) R^2}, \quad (3)$$

其中  $\rho_{me}$  为薄膜的密度;  $\nu$  为薄膜的泊松系数;  $E$  为薄膜的杨氏模量;  $\eta$  为薄膜的阻尼系数;  $h$  为薄膜的厚度;  $R$  为薄膜的半径;  $S_{me}$  为薄膜的面积;  $m_a$  为薄膜大振幅运动带动周边空气运动的附加质量,  $m_a$  值根据实验结果确定 [29];  $k_1$  和  $k_3$  分别为薄膜的

线性刚度和立方非线性刚度.

#### 3.2 声腔

体积速度声源的输出可表达为

$$q_S(t) = Q_S \cos(\omega_S t), \quad (4)$$

式中,  $Q_S$  为激励源强幅值;  $\omega_S$  为激励频率.

当声波波长远远大于声腔尺寸, 腔体内不能形成驻波, 刚性壁封闭声腔内的声压可认为是均布的. 声腔内声压 [28] 可由下式给出:

$$p(t) = \rho_a c_0^2 \frac{\Delta V}{V} = \frac{\rho_a c_0^2}{V} q_S(t). \quad (5)$$

#### 3.3 薄膜控制方程的渐近分析

以薄膜厚度  $h$  和线性固有频率  $\omega_m$  为基准对薄膜控制方程进行归一化, 得到对应的无量纲方程为

$$\frac{d^2 q}{d\tau^2} + 2\zeta \frac{dq}{d\tau} + c_2 q^2 \frac{dq}{d\tau} + q + K_3 q^3 = f_n \cos(\omega\tau). \quad (6)$$

上式中无量纲参数为

$$\zeta = \frac{c}{2m_{me}\omega_m}, \quad c_2 = \frac{2k_3\eta h^2}{m_{me}\omega_m}, \quad K_3 = \frac{k_3 h^2}{k_{11}}, \quad f_n = \frac{C_1}{\omega V}. \quad (7)$$

其中,

$$k_{11} = k_1 \left( \frac{f_1}{f_0} \right)^2, \quad c = k_1 \eta, \quad \omega_m^2 = \frac{k_{11}}{m_{me}},$$

$$C_1 = \frac{S_{me} \rho_a c_0^2 Q_S}{2m_{me} h \omega_m^3}, \quad q = \frac{q_{me}}{h}, \quad \omega = \frac{\omega_S}{\omega_m}, \quad \tau = \omega_m t. \quad (8)$$

采用复化平均法 (complexification-averaging method, CX-A) [32], 求解频响函数的渐近解. 首先引入:

$$\frac{dq}{d\tau} + j\omega q = Y e^{j\omega\tau} \quad (9)$$

其中  $Y$  和  $e^{j\omega\tau}$  分别表示系统响应的慢变分量和快变分量.

通过对快变分量  $e^{j\omega\tau}$  求平均, (6) 式可简化为

$$\dot{Y} + \frac{1}{2} j\omega Y + \zeta Y + \frac{-j}{2\omega} Y + \frac{c_2}{8\omega^2} Y^2 Y^* - \frac{jK_3}{8\omega^3} 3Y^2 Y^* = \frac{f_n}{2}, \quad (10)$$

式中,  $Y^*$  是  $Y$  的复共轭. 若复振幅  $Y$  以极坐标形式表示为

$$Y = N e^{j\delta}. \quad (11)$$

则系统稳态响应有如下特征方程:

$$\begin{aligned} & \left(\zeta + \frac{c_2}{8\omega^2} N^2\right)^2 N^2 + \left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2\omega} - \frac{3K_3}{8\omega^3} N^2\right)^2 N^2 \\ &= \left(\frac{f_n}{2}\right)^2. \end{aligned} \quad (12)$$

取  $x = N^2$ , 可得到非线性薄膜的频响函数为:

$$\begin{aligned} & \left(\frac{c_2}{8\omega^2}\right)^2 x^3 + \left(\frac{3K_3}{8\omega^3}\right)^2 x^3 + 2\zeta \frac{c_2}{8\omega^2} x^2 \\ & - 2\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2\omega}\right) \frac{3K_3}{8\omega^3} x^2 \\ & + \zeta^2 x + \left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2\omega}\right)^2 x - \left(\frac{f_n}{2}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (13)$$

相对应的背骨曲线公式为

$$\begin{aligned} & \left(\frac{3K_3}{8\omega^3}\right)^2 x^2 - 2\left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2\omega}\right) \frac{3K_3}{8\omega^3} x \\ & + \left(\frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2\omega}\right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

### 3.4 声腔响应声压及非互易量定义

经 Rayleigh-Ritz 简化, 薄膜的平均振动速度  $\bar{v}_n$  与中心点法向振动速度  $\dot{q}_{me}$  关系可表示为

$$\bar{v}_n = \frac{1}{2} \dot{q}_{me}. \quad (15)$$

因此, 声腔响应声压可表示为

$$p_{2for,1back} = \frac{1}{2} \frac{S_{me} \rho_a c_0^2}{V_{1,2}} \frac{\dot{q}_{me}}{\omega_S}, \quad (16)$$

式中,  $p_{2for}$  是正向激励时下声腔的响应声压;  $p_{1back}$  是反向激励时上声腔的响应声压. 系统的非互易量 NR 可定义为

$$NR = \frac{p_{2for}}{p_{1back}}. \quad (17)$$

## 4 理论计算结果与实验测量结果的对比

薄膜非线性立方刚度的测量实验系统, 如图 2 所示. 薄膜位移测量采用的是基恩士 LK-G 3000 激光位移传感器, 量程为  $-0.1-0.1$  m. 压差计型号 Extech HD755, 量程为 2.50 kPa. 薄膜一阶模态的立方非线性刚度, 可以通过多项式拟合实验测得的薄膜变形与密封腔内压力变化曲线获得<sup>[33]</sup>, 对于本文采用的 100  $\mu\text{m}$  厚度的 PDMS 薄膜, 立方非线性刚度  $k_3$  为  $3.50 \times 10^6$  N/m<sup>3</sup>.

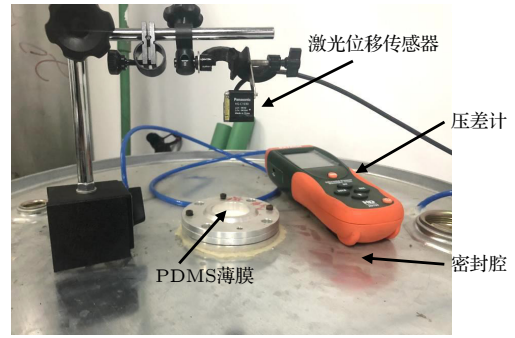


图 2 薄膜非线性立方刚度测量实验系统图

Fig. 2. Experimental system for measuring nonlinear cubic stiffness of membrane.

实验中采用体积速度声源源强为  $100 \times 10^{-6}$  m<sup>3</sup>/s. 实验通过单频激励测量声非互易系统的稳态响应方式进行, 测量频带范围为 50 至 120 Hz, 频率间隔为 1 Hz, 参考声压为 20  $\mu\text{Pa}$ . 正向激励时体积速度声源接入上声腔中, 反向激励时体积速度声源输入下声腔中. 正向激励和反向激励下, 实验测得薄膜的频响曲线如图 3(b) 所示. 图 3(b) 中测量值为由激光多普勒测振仪 (Polytec PSV 400) 测的薄膜振动平均值, 理论值根据非线性薄膜的频响函数 (13) 式获得.

根据频响函数 (13) 式和声腔响应计算 (16) 式获得的频响曲线, 如图 3 中的连续曲线所示, 其中的计算参数为:  $m_a = 1.93 \times 10^{-5}$  kg, 无量纲参数为:  $\zeta = 0.019$ ,  $c_2 = 2.37 \times 10^{-4}$ ,  $K_3 = 0.0031$ .

从图 3(b) 中可以发现, 理论模型计算结果与实验测量结果基本吻合, 说明理论模型和参数准确地描述了实验系统的动力学响应. 在正向激励下, 随着调节激励频率增加, 薄膜平均速度从 50 Hz 处的 0.06 m/s 逐渐增大至 91 Hz 处的 0.37 m/s, 非线性跳变发生在 92 Hz. 跳变后薄膜平均速度突降至 0.09 m/s, 跳变后随着激励频率的增大进一步逐渐降低, 直至 120 Hz 降低到 0.02 m/s.

由于实验中存在外界扰动, 非线性振动薄膜会从一个分支会突然跳变至另一个分支, 越接近理论跳变频率时越容易发生跳变, 因此实验中没有获得临近理论上的跳变点, 即高分支频率 93—99 Hz、低分支 89—92 Hz 的实验数据.

在反向激励下, 随着调节激励频率的降低, 薄膜平均速度 120 Hz 处的 0.008 m/s 逐渐增加至 84 Hz 处的 0.06 m/s. 跳变发生在 83 Hz, 薄膜平均速度跳跃至 0.22 m/s. 然后再随着频率的降低开

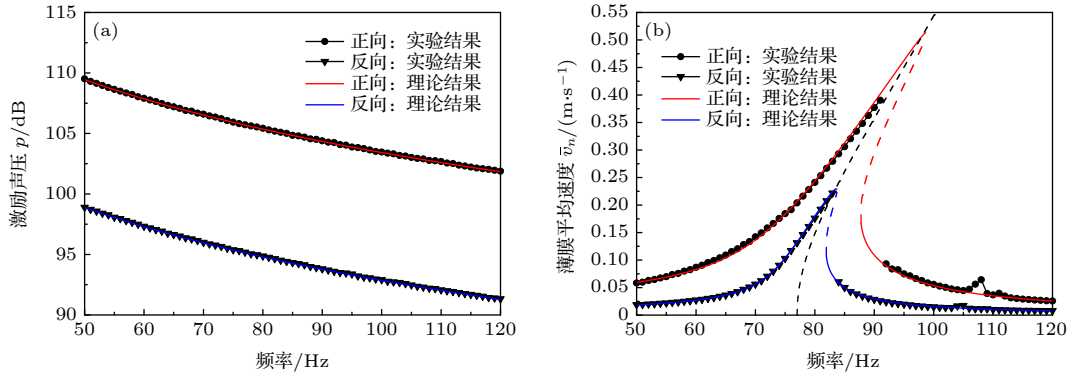


图 3 结构声非互易系统理论计算与实验测量结果对比 (a) 激励声压; (b) 薄膜平均速度

Fig. 3. Comparison of the theoretical and experimental results for non-reciprocal vibro-acoustic system: (a) Excitation sound pressure; (b) average membrane velocity.

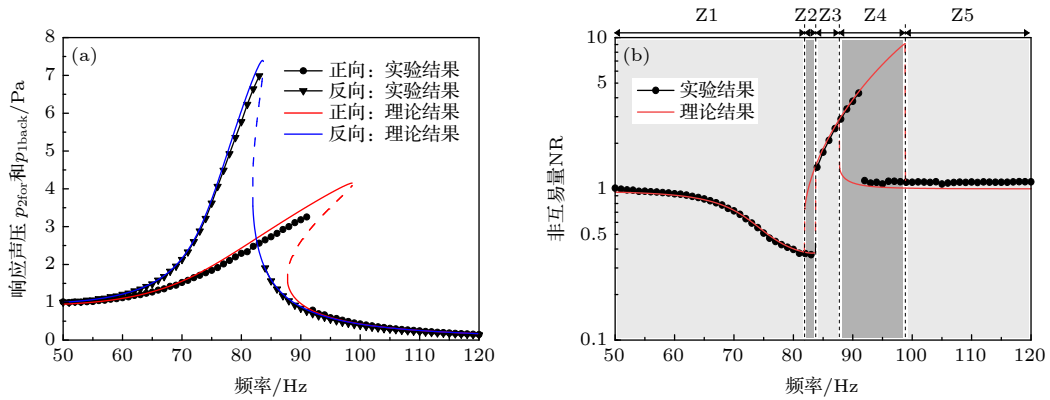


图 4 结构声非互易系统的系统响应 (a) 正向响应声压和反向响应声压; (b) 非互易量

Fig. 4. Response of non-reciprocal vibro-acoustic system: (a) Forward response sound pressure and backward response sound pressure; (b) non-reciprocal quantity.

始逐渐减少, 在 50 Hz 处薄膜平均速度降低到 0.018 m/s.

在图 3(b) 中, 108 Hz 处存在小峰值. 该频率是由于体积速度声源 3 m 延长管的一阶共振频率, 该峰值由延长管的共振引起.

图 4(a) 给出了正向和反向激励下响应声腔内的声压, 图 4(b) 给出了根据声非互易量计算 (17) 式获得的系统的非互易量. 图 4(a) 测量值是由传声器得声腔内中心点处的声压, 理论值是由薄膜平均速度 (15) 式和声腔响应 (16) 式计算得.

从图 4 中可以看出, 由于 Duffing 振子的频响曲线在共振区的解不唯一, 系统的非互易量曲线可以分为, 前跳变区 Z1, 跳变区域, 和后跳变区 Z5, 其中跳变区又可分为: 跳变间隔区 Z3, 跳变重叠区 Z2 和 Z4.

在弱非线性的前跳变区 Z1, 由于薄膜额外存在非线性刚度项, 限制了薄膜响应幅值的增加, 使

得薄膜振幅小于无非线性刚度的等效线性薄膜的响应, 薄膜振幅与薄膜激励声压不再成线性比例关系. 因此经声腔体积比例缩放后获得的系统响应是不同, 较高声压激励下的正向响应声压小于较低声压激励下的反向响应声压, 系统非互易量小于 1. 系统越接近跳变频率, 系统非互易量性越强.

根据背骨曲线 (14) 式, 在非线性跳变频率处, 薄膜振动幅值为

$$N^2 = \left( \frac{1}{2}\omega - \frac{1}{2\omega} \right) \frac{8\omega^3}{3K_3}. \quad (18)$$

若正向激励下无量纲跳变频率为  $\omega_2$ , 反向激励下无量纲跳变频率为  $\omega_1$ , 对于此系统中  $\omega_2 > \omega_1 > 1$ . 对应的系统响应为

$$\text{正向激励: } p_{2\text{for}}(\omega_{1,2}) = \frac{\omega_m N_{\text{for}}(\omega_{1,2}) h S_{\text{me}} \rho_0 c_0^2}{\omega_{1,2} \cdot 2 V_2},$$

$$\text{反向激励: } p_{1\text{back}}(\omega_1) = \frac{\omega_m N_{\text{back}}(\omega_1) h S_{\text{me}} \rho_0 c_0^2}{\omega_1 \cdot 2 V_1}.$$

在跳变频率  $\omega_1$  处的系统非互易量为

$$\begin{aligned} \text{NR}(\omega_1) &= \frac{p_{2\text{for}}(\omega_1)}{p_{1\text{back}}(\omega_1)} = \frac{N_{\text{for}}(\omega_1) \omega_1 V_1}{N_{\text{back}}(\omega_1) \omega_1 V_2} \\ &< \frac{N_{\text{for}}(\omega_2) \omega_1 V_1}{N_{\text{back}}(\omega_1) \omega_2 V_2} < 1. \end{aligned} \quad (19)$$

在强非线性的跳变区域, Duffing 振子的频响函数出现分岔, 存在多值解. 薄膜频响函数曲线形成稳定的高分支、低分支及不稳定分支. 当系统响应在正向、反向激励下处于 Duffing 振子频响函数曲线的不同分支, 系统存在大的非互易.

在跳变重叠区 Z2, 正向激励下 Duffing 振子频响曲线位于高分支. 反向激励下的频响曲线存在两个稳态解, 由反向激励下系统初始条件确定. 跳变前的非互易量小于 1, 跳变后, 正向响应声压大于反向响应声压, 非互易量大于 1. 实验中, 在反向激励下的跳变频率 83 Hz 处之前, 非互易量最小值达到了 0.37, 实验结果与理论结果相符.

在跳变间隔区 Z3, 正向激励下 Duffing 振子频响曲线处于高分支, 反向已跳变至低分支, 非互易量大于 1.

在跳变重叠区 Z4, 正向激励下 Duffing 振子频响曲线存在两个稳态解, 由正向激励的初始条件决定, 反向激励下频响曲线处于低分支. 跳变前 Z4 区域的非互易量大于 1, 跳变后接近 1. 理论上存在最大 9.1 倍的非互易量, 由于在实验中存在干扰, 正向激励下的跳变频率小于 99 Hz 理论值, 实验中跳变频率为 92 Hz, 此时系统非互易量为 4.3 倍.

在后跳变区 Z5, 正反向激励下 Duffing 振子频响曲线都处于低分支. 根据频响函数 (13) 式, 非线性项系数随激励频率增大而快速减小, 系统非互

易量近似为 1.

#### 4.1 输入能量

图 5 给出了 4 个不同激励源强下系统响应声压和系统非互易量的仿真计算结果. 从图 5 中可以看到, 在  $1 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$  的低源强激励下, 薄膜振动属于小振幅的近似线性振动, 此时, 系统是线性互易系统. 随着激励源强的增加, 薄膜振动由小振幅线性振动转变为大振幅非线性振动, 激励源强越高, 薄膜振幅越大, 系统非线性越强. 对于实验中采用  $100 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$  源强, 薄膜振幅是薄膜厚度的 17 倍, 系统属于强非线性系统.

随着系统激励源强增加, 响应声压增加, 薄膜跳变区变宽, 系统最大非互易量的也随之增加. 在高源强激励下时, 线性共振频率处系统存在一个与激励源强大小无关的不动点. 该不动点数值可根据薄膜频响函数确定, 在线性共振频率处, 频响函数 (13) 式可简化为

$$\left(\frac{c_2}{8}\right)^2 x^3 + \left(\frac{3K_3}{8}\right)^2 x^3 + 2\zeta\frac{c_2}{8}x^2 + \zeta^2x = \left(\frac{C_1}{2V}\right)^2, \quad (20)$$

其中  $x = N_L^2$ ,  $N_L$  是线性共振频率时薄膜非线性振动幅值.

在系统线性共振频率处  $N_L$  不是小量, 而材料阻尼值  $\eta$  很小, 因此  $(3K_3/8)^2 x^3$  远大于其余项, 上式可进一步简化为

$$\left(\frac{3K_3}{8}\right)^2 N_L^6 \approx \left(\frac{C_1}{2V}\right)^2. \quad (21)$$

从上式可知, 系统非互易量的不动点由系统非对称和立方非线性刚度引起.

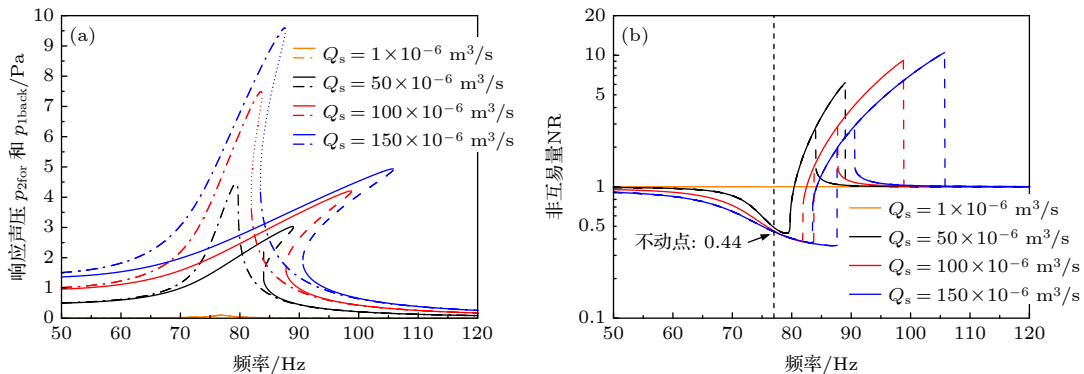


图 5 不同源强输入下系统响应 (a) 正向响应声压 (实线) 和反向响应声压 (点划线); (b) 非互易量

Fig. 5. System responses under different VVS: (a) Forward response sound pressure (solid line) and backward response sound pressure (dot dash line); (b) non-reciprocal quantity.

其数值为

$$NR(1) = \frac{p_{2for}(1)}{p_{1back}(1)} = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\frac{2}{3}} \approx 0.44. \quad (22)$$

与此相对比的是, 与实验系统相同构型的线性系统在共振频率处仍是互易的. 图 5 中的不动点仅在强非线性声非互易系统中存在, 此现象进一步阐明了系统非线性和不对称性是声能量非互易传递的必要条件.

### 4.2 系统不对称

系统不对称由两个声腔的体积比决定, 图 6 给出了声腔体积比变化对系统非互易影响的仿真计算结果. 图中, 算例 1 为实验系统的声腔体积比为  $V_1/V_2 = 0.2^3 \text{ m}^3/0.3^3 \text{ m}^3$ , 算例 2 体积比为  $V_1/V_2 = 0.25^3 \text{ m}^3/0.3^3 \text{ m}^3$ , 算例 3 体积比为  $V_1/V_2 = 0.15^3 \text{ m}^3/0.3^3 \text{ m}^3$ . 以上算例都采用与实验相同的  $100 \times 10^{-6} \text{ m}^3/\text{s}$  源强激励.

如图 6 所示, 反向激励时, 由于激励声腔体积相同, 声腔内激励声压幅值相同, 薄膜的频响曲线和跳变频率不变, 此时系统反向响应声压与响应声腔的体积成反比; 正向激励时, 由于系统响应声腔体积相同, 系统响应与薄膜振幅成正比.

在前跳变区, 正反向激励下系统响应曲线都处于高分支, 在相同源强输入时, 正反向的激励声压与激励声腔体积成反比. 但由于薄膜控制方程具有立方非线性刚度项和线性刚度项, 薄膜响应与激励声压不再是比例关系, 薄膜响应幅值的增加比例小于激励声压的增加比例. 因此, 由正向薄膜响应经系统响应声腔缩放后获得的正向系统响应, 小于反向激励下系统响应, 系统非互易量小于 1. 从图 6 中也可看出, 系统不对称性越大, 非互易性越强.

在跳变区, 由于系统存在分岔, 正向激励下系统响应曲线处于系统频响函数的高分支, 反向激励下系统响应曲线处于系统频响函数的低分支, 系统存在大的非互易. 随着系统不对称性增加, 正反向激励声压差异增大, 系统频响函数中两个分支的区别相应增大, 系统非互易量增加, 跳变区的频率带宽也同步增加.

在后跳变区, 正向和反向激励下系统频响函数都处于低分支, 系统响应幅值几乎相同, 系统可近似认为是互易系统, 系统非互易量大小与系统不对称性无关.

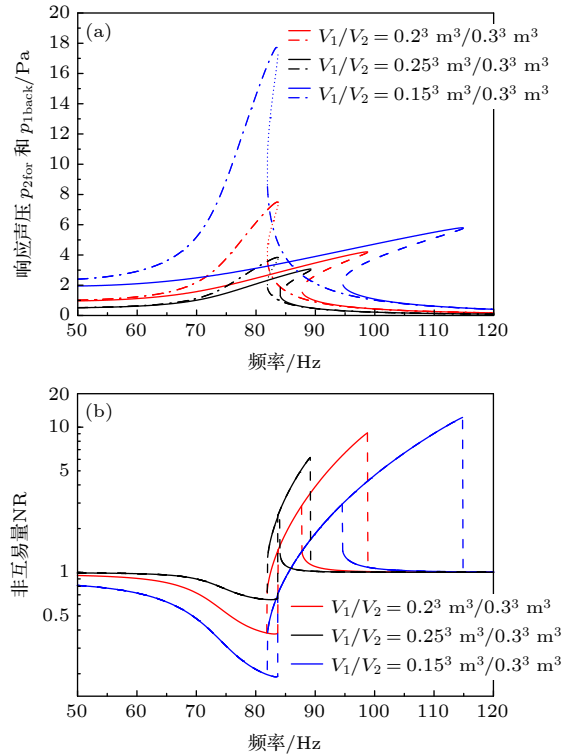


图 6 不同声腔下系统响应 (a) 正向响应声压 (实线) 和反向响应声压 (点划线); (b) 非互易量

Fig. 6. System responses with different acoustic cavities: (a) Forward response sound pressure (solid line) and backward response sound pressure (dot-dash line); (b) non-reciprocal quantity.

## 5 结论

为实现研究低能量、高耗散的空气介质声系统声能量的大非互易传递, 本文基于 Duffing 振子在弱非线性区域的非线性共振和强非线性区的分岔两种声能量非互易传递机理, 构建了由两个不同尺寸声腔和简化为 Duffing 振子的薄膜构成的声非互易实验系统, 对该系统正反两个方向上声能量非互易传递问题进行了建模和实验研究.

对于系统中大振幅非线性振动的薄膜, 采用 Von Karman 板壳理论和 Rayleigh-Ritz 降阶建模方法, 将薄膜简化为具有立方非线性刚度的 Duffing 振子. 由于 Duffing 振子频响函数是非线性的, Duffing 振子响应与激励不成线性关系,

Duffing 振子响应与激励大小相反比例缩放后获得的系统响应是不同的, 该系统是声非互易系统.

采用复化平均法获得非线性声非互易系统频响函数的渐近解, 理论计算结果与实验测量结果相吻合. 研究表明, 该声实验系统理论上存在最

大 9.1 倍的非互易量, 实验中测得的非互易量最大值为 4.3 倍, 归一化跳变区频率带宽为 0.56. 理论模型的参数分析结果表明, 随着输入能量和系统不对称性的增加, 系统声非互易幅值和带宽也随之增大, 同时, 在线性固有频率处系统非互易量不随输入能量变化, 存在一个由系统非对称性所确定的不动点.

本文研究结果揭示了非线性刚度和系统不对称与声能量非互易传递的机理, 为声非互易系统设计提供了一种新方法, 在低频噪声控制领域有潜在应用价值.

## 参考文献

- [1] Moore K J, Vakakis A F 2018 *Acta Mech.* **229** 4057
- [2] Mojahed A, Moore K, Bergman L A, Vakakis A F 2018 *Int. J. Non Linear Mech.* **107** 94
- [3] Spadoni A, Daraio C 2010 *Proc. Natl. Acad. Sci. U. S. A.* **107** 7230
- [4] Zhu X H, Li J F, Shen C, Peng X Y, Song A L, Li L Q, Cummer S A 2020 *Appl. Phys. Lett.* **116** 34101
- [5] Liang B, Yuan Y, Cheng J C 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 094305 (in Chinese) [梁彬, 袁樱, 程建春 2015 物理学报 **64** 094305]
- [6] Zou X Y, Yuan Y, Liang B, Cheng J C 2013 *Appl. Acoust.* **32** 169 (in Chinese) [邹欣晔, 袁樱, 梁彬, 程建春 2013 应用声学 **32** 169]
- [7] Zhu X F, Ramezani H, Shi C Z, Zhu J, Zhang X 2014 *Phys. Rev. X* **4** 031042
- [8] Liu T, Zhu X F, Chen F, Liang S J, Zhu J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **120** 124502
- [9] Nassar H, Xu X C, Norris A N, Huang G L 2017 *J. Mech. Phys. Solids* **101** 10
- [10] Nassar H, Chen H, Norris A N, Huang G L 2018 *Phys. Rev. B* **97** 014305
- [11] Fleury R, Sounas D L, Sieck C F, Haberman M R, Alù A 2014 *Science* **343** 516
- [12] Khanikaev A B, Fleury R, Mousavi S H, Alù A 2015 *Nat. Commun.* **6** 8260
- [13] Zhu X F, Zou X Y, Liang B, Cheng J C 2010 *J. Appl. Phys.* **108** 124909
- [14] Peng Y G, Qin C Z, Zhao D G, Shen Y X, Xu X Y, Bao M, Jia H, Zhu X F 2016 *Nat. Commun.* **7** 13368
- [15] Ding Y J, Peng Y G, Zhu Y F, Fan X D, Yang J, Liang B, Zhu X F, Wan X G, Cheng J C 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 014302
- [16] Chen Z X, Peng Y G, Li H X, Liu J J, Ding Y J, Liang B, Zhu X F, Lu Y Q, Cheng J C, Alù A 2021 *Sci. Adv.* **7** eabj1198
- [17] Nassar H, Yousefzadeh B, Fleury R, Ruzzene M, Alù A, Daraio C, Norris A N, Huang G L, Haberman M R 2020 *Nat. Rev. Mater.* **5** 667
- [18] Liang B, Guo X S, Tu J, Zhang D, Cheng J C 2010 *Nat. Mater.* **9** 989
- [19] Zhu Y F, Zou X Y, Liang B, Cheng J C 2015 *Appl. Phys. Lett.* **107** 113501
- [20] Boechler N, Theocharis G, Daraio C 2011 *Nat. Mater.* **10** 665
- [21] Wang Y F, Yousefzadeh B, Chen H, Nassar H, Huang G L, Daraio C 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 194301
- [22] Bunyan J, Moore K J, Mojahed A, Fronk M D, Leamy M, Tawfick S, Vakakis A F 2018 *Phys. Rev. E* **97** 052211
- [23] Wang C G, Tawfick S, Vakakis A F 2020 *Physica D* **402** 132229
- [24] Mojahed A, Bunyan J, Tawfick S, Vakakis A F 2019 *Phys. Rev. Appl.* **12** 034033
- [25] Wei L S, Wang Y Z, Wang Y S 2020 *Int. J. Mech. Sci.* **173** 105433
- [26] Bellet R, Cochelin B, Herzog P, Mattei P O 2010 *J. Sound Vib.* **329** 2768
- [27] Bellet R, Cochelin B, Côte R, Mattei P O 2012 *J. Sound Vib.* **331** 5657
- [28] Shao J W, Cochelin B 2014 *Int. J. Non Linear Mech.* **64** 85
- [29] Bryk P Y, Côte R, Bellizzi S 2019 *J. Sound Vib.* **460** 114868
- [30] Chauvin A, Monteil M, Bellizzi S, Côte R, Herzog P, Pachebat M 2018 *J. Sound Vib.* **416** 244
- [31] Leissa A W 1969 *Vibration of Plates* (New York: Acoustical Society of America) pp44–45
- [32] Manevitch L I 1999 *Mathematical Models of Non-Linear Excitations, Transfer, Dynamics, and Control in Condensed Systems and Other Media* (New York: Springer) pp269–300
- [33] McFarland D M, Bergman L A, Vakakis A F 2005 *Int. J. Non Linear Mech.* **40** 891

# Modeling and experimental study of non-reciprocal acoustic energy transfer in vibro-acoustic Duffing oscillator<sup>\*</sup>

Jin Jiang-Ming<sup>1)</sup> Xie Tian-Wei<sup>1)</sup> Cheng Hao<sup>2)</sup> Xiao Yue-Peng<sup>1)</sup>  
D. Michael McFarland<sup>1)</sup> Lu Huan-Cai<sup>1)†</sup>

1) (*College of Mechanical Engineering, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China*)

2) (*College of Science, Zhejiang University of Technology, Hangzhou 310014, China*)

( Received 26 November 2021; revised manuscript received 24 January 2022 )

## Abstract

Mechanisms for the nonreciprocal transmission of acoustic energy and the construction of non-reciprocal vibro-acoustic systems have been subjects of intense research in recent years. An experimental study of acoustic nonreciprocal transmission in an experimental system with a nonlinear membrane and two acoustic cavities of different sizes is reported. The membrane can be simplified into a Duffing oscillator, and the asymmetry of the frequency response function of this oscillator is used to realize the non-reciprocal transmission of acoustic energy. The asymptotic solution of the frequency response function of the nonlinear membrane is obtained by the complexification-averaging method. The theoretical simulation results accord well with the experimental results. The results show that the experimental system has a maximum non-reciprocal quantity of 9.1 times in theory, 4.3 times in the experiment, and the normalized frequency bandwidth of the jump phenomenon region is up to 0.56. The research results reveal the mechanism of non-reciprocal transfer of acoustic energy in the experimental system and demonstrate a new way to realize the asymmetric transfer of acoustic energy in an acoustic system with an air medium.

**Keywords:** acoustic non-reciprocity, one-way transmission, nonlinear membrane vibration, Duffing oscillator

**PACS:** 43.25.+y, 43.40.+s

**DOI:** [10.7498/aps.71.20212181](https://doi.org/10.7498/aps.71.20212181)

---

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 51875522, 51975525), and the International Science and Technology Cooperation Foundation for “One-Belt and One-Road” of Zhejiang Province, China (Grant No. 2018C04018).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [huancailu@zjut.edu.cn](mailto:huancailu@zjut.edu.cn)