



## 基于面磁荷密度的金属磁记忆检测正演模型

罗旭 王丽红 吕良 曹书峰 董学成 赵建国

### Forward model of metal magnetic memory testing based on equivalent surface magnetic charge theory

Luo Xu Wang Li-Hong Lü Liang Cao Shu-Feng Dong Xue-Cheng Zhao Jian-Guo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 154101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220176

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220176>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 磁记忆检测的力磁耦合型磁偶极子理论及解析解

Analytical solution of magneto-mechanical magnetic dipole model for metal magnetic memory method

物理学报. 2021, 70(3): 034101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20200937>

#### 基于力磁耦合效应的铁磁材料修正磁化模型

A modified model of magneto-mechanical effect on magnetization in ferromagnetic materials

物理学报. 2019, 68(18): 187501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190765>

#### 铁磁板磁巴克豪森应力检测的解析模型

Analytical model of magnetic Barkhausen stress test of ferromagnetic plates

物理学报. 2022, 71(9): 097501 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212253>

#### 具有感觉记忆的忆阻器模型

Mathematical model of memristor with sensory memory

物理学报. 2019, 68(1): 018501 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181577>

#### 基于个性化三维心脏-躯干模型的心磁正问题

Magnetocardiogram forward problem based on personalized three-dimensional heart-torso model

物理学报. 2019, 68(17): 178702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190387>

#### 基于工艺偏差的电压调控磁各向异性磁隧道结电学模型及其在读写电路中的应用

Process deviation based electrical model of voltage controlled magnetic anisotropy magnetic tunnel junction and its application in read/write circuits

物理学报. 2020, 69(19): 198502 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200228>

## 基于面磁荷密度的金属磁记忆检测正演模型\*

罗旭<sup>1)†</sup> 王丽红<sup>1)</sup> 吕良<sup>2)</sup> 曹书峰<sup>1)</sup> 董学成<sup>1)</sup> 赵建国<sup>3)</sup>

1) (成都理工大学机电工程学院, 成都 610059)

2) (河北石油职业技术大学热能工程系, 承德 067000)

3) (西南石油大学机电工程学院, 成都 610500)

(2022年1月24日收到; 2022年4月5日收到修改稿)

磁偶极子理论在金属磁记忆检测正演分析中得到了广泛应用, 但是现有模型中的磁荷密度多为假设值, 且假设磁荷在缺陷断面或应力集中区域呈均匀分布或线性分布, 无法实现磁记忆信号的准确定量分析. 针对上述问题, 本文在结合力磁耦合理论、磁荷理论和有限元方法基础上, 将试件离散为有限多个微小单元, 假设单元内部磁特征参数分布均匀, 建立了单元应力、磁化强度与磁荷密度之间的关系, 构建了能够考虑应力不均匀分布对磁荷密度分布影响的金属磁记忆检测正演模型. 与实验结果对比发现, 本文建立模型无论是定性还是定量上都能很好预测磁记忆信号变化规律; 在此基础上, 对比了应力集中和宏观裂纹表面磁场分布的差异, 并以裂纹缺陷为例, 详细讨论了裂纹缺陷尺寸参数对磁记忆信号及其特征参量的影响规律. 理论分析表明, 本文模型可为定量分析磁记忆检测过程中缺陷附近磁场变化规律提供新的理论模型.

**关键词:** 金属磁记忆, 磁荷理论, 力磁耦合, 正演模型**PACS:** 41.20.Gz, 51.60.+a, 75.50.Bb, 75.80.+q**DOI:** 10.7498/aps.71.20220176

## 1 引言

1994年, 俄罗斯学者 Dubov 教授<sup>[1]</sup>最早提出一种新型无损检测方法——金属磁记忆检测法, 该技术自问世以来, 便受到国内外学者的广泛关注, 被誉为“21世纪崭新的无损检测技术”. 与传统漏磁检测方法不同, 金属磁记忆检测作为一种被动式的弱磁检测技术, 不需要额外施加激励磁场, 在应力-应变、材料微观变化和地磁场的联合作用下, 会在应力集中、塑性变形、微观缺陷等局部损伤区域表面形成自发漏磁场, 理论上通过分析自发漏磁场的分布、幅值等, 就可以得到损伤的位置、大小等信息.

建立金属磁记忆正演模型, 准确描述应力、缺陷和磁记忆检测信号之间的定量关系, 是实现磁记

忆检测技术工程应用需要解决的基础问题之一. 目前, 基于磁荷理论的正演模型在磁记忆检测信号分析中得到了广泛应用. Wang 等<sup>[2,3]</sup>假设磁荷在塑性变形区域和表面呈线性对称分布, 建立了反映塑性变形区域磁场分布的磁偶极子正演模型; 万强等<sup>[4]</sup>利用一维 Z-L 模型建立了应力与磁化强度之间的关系, 将缺陷应力集中区域等效为磁偶极子, 建立了反映应力集中区域磁记忆信号特征的解析模型; Leng 等<sup>[5]</sup>根据断口周围硬度值分布规律, 假设裂纹边缘位错分布与磁偶极子分布一致, 将磁偶极子密度表示为与裂纹边缘之间距离的线性位置函数, 建立了基于位错分布的磁偶极子正演模型; Leng 等<sup>[6]</sup>假设磁荷在应力集中区域和 V 型缺口表面呈线性分布, 建立了应力集中区域和 V 型缺口的磁偶极子正演模型; 徐明秀等<sup>[7]</sup>假设磁荷在塑性变形区域边

\* 四川省科技计划 (批准号: 2021YFS0305, 202YFQ0061) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: luoxu@cdu.edu.cn

界面均匀分布,在裂纹断面处呈线性分布,推导了适用于疲劳损伤分析的磁偶极子正演模型;Shi和Zheng<sup>[8]</sup>在考虑应力集中区域宽度影响的基础上,建立了塑性变形区域的三维磁偶极子正演模型;时朋朋和郝帅<sup>[9]</sup>结合Z-L模型,建立了力磁耦合型磁偶极子正演模型,并基于二维磁偶极子简化,实现理论模型的解析求解.

上述模型利用静磁学理论能够简单、方便地计算缺陷表面磁场分布,对分析缺陷表面磁场分布规律起到了极大促进作用,但存在的问题也十分明显.首先,磁偶极子正演模型的关键是要确定磁荷密度大小,而现有磁偶极子正演模型中磁荷密度多为假设值,分析过程多采用归一化形式分析磁信号变化趋势;其次,现有磁偶极子正演模型多假设磁荷在缺陷断面或应力集中处呈均匀分布或线性分布,这与缺陷附近磁荷密度非均匀分布情形不符;最后,现有磁荷模型只能描述规则形状缺陷,且不同形状缺陷的磁荷模型形式不同.

针对现有磁偶极子模型存在的问题,本文在结合力磁耦合模型、磁荷理论和有限元方法基础上,通过将试件离散为有限多个微小单元,假设每个单元内部磁特征参数分布均匀,建立了单元应力、磁化强度与磁荷密度之间的关系,构建了能考虑应力不均匀分布对磁荷密度分布影响的金属磁记忆检测正演模型,并通过与已有实验结果对比,验证了本文模型的正确性;在此基础上,对比了含应力集中和宏观裂纹缺陷试件表面磁场分布的差异,并以裂纹缺陷为例详细讨论了裂纹缺陷尺寸参数对磁记忆信号及其特征参量的影响规律,为定量分析缺陷表面的磁记忆信号变化规律提供新选择.

## 2 力磁耦合模型

在不考虑温度变化和磁滞效应影响条件下,磁致伸缩材料单位体积三维弹性 Gibbs 自由能可写为<sup>[10-13]</sup>

$$G(\sigma_{ij}, M_k^{\text{an}}) = U(\varepsilon_{ij}, M_k^{\text{an}}) + \mu_0 \alpha M_k^{\text{an}2} / 2 - \mu_0 (H_d)_k M_k^{\text{an}} / 2 - \sigma_{ij} \varepsilon_{ij}, \quad (1)$$

式中,  $\sigma_{ij}$  为应力;  $\varepsilon_{ij}$  为应变;  $U(\varepsilon_{ij}, M_k^{\text{an}})$  表示材料单位体积内能;  $M_k^{\text{an}}$  表示非磁滞磁化强度;  $\mu_0$  为真

空磁导率,  $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ ;  $\alpha$  为 Weiss 分子场耦合系数;  $H_d$  为退磁场,对于均匀的可磁化材料,  $(H_d)_k = (N_d)_{kk} M_k^{\text{an}}$ ,  $(N_d)_{kk}$  为退磁系数,为无量纲量.

同样在不考虑温度变化情况下,  $U(\varepsilon_{ij}, M_k^{\text{an}})$  可写为<sup>[13]</sup>

$$dU = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} + \mu_0 H_k dM_k^{\text{an}}, \quad (2)$$

则

$$dG = -\varepsilon_{ij} d\sigma_{ij} + \mu_0 H_k dM_k^{\text{an}} + \mu_0 \alpha M_k^{\text{an}} dM_k^{\text{an}} - \mu_0 (N_d)_{kk} M_k^{\text{an}} dM_k^{\text{an}}. \quad (3)$$

上述热力学关系分别对应力  $\sigma_{ij}$  和非磁滞磁化强度  $M_k^{\text{an}}$  求偏导<sup>[14,15]</sup>:

$$\varepsilon_{ij} = -\frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}, \quad (4)$$

$$H_k + \alpha M_k^{\text{an}} - (N_d)_{kk} M_k^{\text{an}} = \frac{1}{\mu_0} \frac{\partial G}{\partial M_k^{\text{an}}}. \quad (5)$$

将  $G(\sigma_{ij}, M_k^{\text{an}})$  在  $(\sigma_{ij}, M_k^{\text{an}}) = (0, 0)$  处进行泰勒展开,根据实验现象对展开式进行简化<sup>[11-13]</sup>:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{ij} = & S_{ijkl}^{(s)} \sigma_{kl} + \lambda_{0ij}(\sigma_{mn}) \\ & + \left[ m_{ijkl} - \frac{\lambda_{0ij}(\sigma_{mn})}{M_{\text{ws}}^2} \delta_{kl} \right] M_k^{\text{an}} M_l^{\text{an}} - \frac{\vartheta m_{ijkl}}{M_{\text{ws}}^4} \\ & \times (M_k^{\text{an}} M_l^{\text{an}} M_i^{\text{an}} M_j^{\text{an}} - M_{0k} M_{0l} M_{0i} M_{0j}), \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} H_k = & f_k^{-1}(M_l^{\text{an}}) - \alpha M_k^{\text{an}} + (N_d)_{kk} M_k^{\text{an}} \\ & - \frac{2}{\mu_0} \left[ m_{ijkl} \sigma_{ij} - \delta_{kl} \frac{\Lambda_0(\sigma_{mn})}{M_{\text{ws}}^2} \right] M_l^{\text{an}} \\ & + \frac{4}{\mu_0} \frac{\vartheta m_{ijkl} \sigma_{ij}}{M_{\text{ws}}^4} (M_l^{\text{an}} M_i^{\text{an}} M_j^{\text{an}} - M_{0l} M_{0i} M_{0j}), \end{aligned} \quad (7)$$

式中,张量  $S_{ijkl}^{(s)}$  表示应力张量;  $\lambda_{0ij}(\sigma_{mn})$  表示由应力导致磁畴旋转而引起的应变;张量  $m_{ijkl}$  描述自由状态下磁致伸缩应变;  $\delta_{kl}$  为 Kronecker 符号;非线性函数  $f_k^{-1}(M_l^{\text{an}})$  表示  $\sigma_{ij} = 0$  时由外加磁场引起的磁场变化;  $M_{\text{ws}}$  为无应力作用下饱和壁移磁化强度;  $\Lambda_0(\sigma_{mn})$  表示  $\lambda_{0ij}(\sigma_{mn})$  的原函数,即  $\Lambda_0(\sigma_{mn}) = \int_0^{\sigma_{mn}} \lambda_{0ij}(\sigma_{mn}) d\sigma_{mn}$ ;  $M_{0k}$  表示不同应力条件下饱和壁移磁化强度;  $\vartheta$  为阶跃函数,当  $M_k^{\text{an}} < M_{0k}$  时,  $\vartheta = 0$ ,  $M_k^{\text{an}} \geq M_{0k}$  时,  $\vartheta \neq 0$ .

对于各向同性材料,(6)式和(7)式中相关张量函数可以表示为<sup>[11-13]</sup>

$$\left\{ \begin{aligned} S_{ijkl}^{(s)} \sigma_{kl} &= \frac{1}{E} [(1 + \nu) \sigma_{ij} - \nu \sigma_{kk} \delta_{ij}], & \lambda_{0ij} (\sigma_{mn}) &= \frac{3}{2} \lambda_0 (\sigma_{ij}) - \frac{1}{2} \lambda_0 (\sigma_{kk} \delta_{ij}) \approx \lambda_0 (\hat{\sigma}_{ij}), \\ m_{ijkl} M_k^{\text{an}} M_l^{\text{an}} &= \frac{\lambda_s}{M_{\text{ws}}^2} \left( \frac{3}{2} M_i^{\text{an}} M_j^{\text{an}} - \frac{1}{2} M_k^{\text{an}} M_k^{\text{an}} \delta_{ij} \right), & -\frac{\lambda_{0ij} (\sigma_{mn})}{M_{\text{ws}}^2} \delta_{kl} M_k^{\text{an}} M_l^{\text{an}} &= -\frac{\lambda_0 (\hat{\sigma}_{ij})}{M_{\text{ws}}^2} M_k^{\text{an}} M_k^{\text{an}}, \\ \frac{\vartheta m_{ijkl}}{M_{\text{ws}}^4} (M_k^{\text{an}} M_l^{\text{an}} M_i^{\text{an}} M_j^{\text{an}} - M_{0k} M_{0l} M_{0i} M_{0j}) &= \frac{\vartheta \lambda_s}{M_{\text{ws}}^4} \left[ \frac{3}{2} (M_i^{\text{an}2} M_j^{\text{an}2} - M_0^4) - \frac{1}{2} (M_k^{\text{an}2} M_k^{\text{an}2} - \delta_{kl} \delta_{kl} M_0^4) \delta_{ij} \right], \\ -\frac{2}{\mu_0} m_{ijkl} \sigma_{ij} M_l^{\text{an}} &= -\frac{2 \lambda_s \hat{\sigma}_{ij} M_l^{\text{an}}}{\mu_0 M_{\text{ws}}^2}, & \frac{2}{\mu_0} \delta_{kl} M_l^{\text{an}} \frac{\Lambda_0 (\sigma_{mn})}{M_{\text{ws}}^2} &= \frac{2 \delta_{kl} M_l^{\text{an}} \Lambda_0 (\hat{\sigma}_{kk})}{\mu_0 M_{\text{ws}}^2}, \\ \frac{4}{\mu_0} \frac{\vartheta_{ij} m_{ijkl} \sigma_{ij}}{M_{\text{ws}}^4} (M_l^{\text{an}} M_i^{\text{an}} M_j^{\text{an}} - M_{0l} M_{0i} M_{0j}) &= \frac{4}{\mu_0} \frac{\vartheta \lambda_s \hat{\sigma}_{kl}}{M_{\text{ws}}^4} (M_l^{\text{an}3} - M_0^3), \end{aligned} \right. \quad (8)$$

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & 1/E & -\nu/E & 0 & 0 & 0 \\ -\nu/E & -\nu/E & 1/E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_0 (\hat{\sigma}_x) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_y) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_z) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_{yz}) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_{zx}) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_{xy}) \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{\lambda_s}{M_{\text{ws}}^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}2} \\ M_y^{\text{an}2} \\ M_z^{\text{an}2} \\ M_y^{\text{an}} M_z^{\text{an}} \\ M_z^{\text{an}} M_x^{\text{an}} \\ M_x^{\text{an}} M_y^{\text{an}} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{(M_x^{\text{an}2} + M_y^{\text{an}2} + M_z^{\text{an}2})}{M_{\text{ws}}^2} \begin{bmatrix} \lambda_0 (\hat{\sigma}_x) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_y) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_z) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_{yz}) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_{zx}) \\ \lambda_0 (\hat{\sigma}_{xy}) \end{bmatrix} - \frac{\vartheta \lambda_s}{M_{\text{ws}}^4} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & 1 & -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ -1/2 & -1/2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}4} - M_0^4 \\ M_y^{\text{an}4} - M_0^4 \\ M_z^{\text{an}4} - M_0^4 \\ M_y^{\text{an}2} M_z^{\text{an}2} - M_0^4 \\ M_z^{\text{an}2} M_x^{\text{an}2} - M_0^4 \\ M_x^{\text{an}2} M_y^{\text{an}2} - M_0^4 \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$\begin{bmatrix} H_x \\ H_y \\ H_z \end{bmatrix} = \frac{1}{k M^{\text{an}}} f^{-1} \left( \frac{M^{\text{an}}}{M_s} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \\ M_z^{\text{an}} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \\ M_z^{\text{an}} \end{bmatrix} + \mu_0 \begin{bmatrix} (N_d)_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & (N_d)_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & (N_d)_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \\ M_z^{\text{an}} \end{bmatrix}$$

$$- \frac{2}{\mu_0 M_{\text{ws}}^2} \begin{bmatrix} \lambda_s \hat{\sigma}_{xx} - \Lambda_0 (\hat{\sigma}_{xx}) & \lambda_s \hat{\sigma}_{xy} & \lambda_s \hat{\sigma}_{xz} \\ \lambda_s \hat{\sigma}_{yx} & \lambda_s \hat{\sigma}_{yy} - \Lambda_0 (\hat{\sigma}_{yy}) & \lambda_s \hat{\sigma}_{yz} \\ \lambda_s \hat{\sigma}_{zx} & \lambda_s \hat{\sigma}_{zy} & \lambda_s \hat{\sigma}_{zz} - \Lambda_0 (\hat{\sigma}_{zz}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \\ M_z^{\text{an}} \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{4}{\mu_0} \frac{\vartheta \lambda_s}{M_{\text{ws}}^4} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\sigma}_{xy} & \hat{\sigma}_{xz} \\ \hat{\sigma}_{yx} & \hat{\sigma}_{yy} & \hat{\sigma}_{yz} \\ \hat{\sigma}_{zx} & \hat{\sigma}_{zy} & \hat{\sigma}_{zz} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}3} - M_0^3 \\ M_y^{\text{an}3} - M_0^3 \\ M_z^{\text{an}3} - M_0^3 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

(9) 式和 (10) 式即非磁滞条件下铁磁材料的三维非线性力磁耦合本构模型的一般形式。

在工程应用过程中, 铁磁材料构件 (如硅钢片、板材) 一般可视为二维薄板结构, 因此在实际应用时可以将 (9) 式和 (10) 式简化为二维形式, 即:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1/E & -\nu/E & 0 \\ -\nu/E & 1/E & 0 \\ 0 & 0 & 1/G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \lambda_0(\hat{\sigma}_x) \\ \lambda_0(\hat{\sigma}_y) \\ \lambda_0(\hat{\sigma}_{xy}) \end{bmatrix} + \frac{\lambda_s}{M_{ws}^2} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}2} \\ M_y^{\text{an}2} \\ M_x^{\text{an}} M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} \\ &- \frac{(M_x^{\text{an}2} + M_y^{\text{an}2})}{M_{ws}^2} \begin{bmatrix} \lambda_0(\hat{\sigma}_x) \\ \lambda_0(\hat{\sigma}_y) \\ \lambda_0(\hat{\sigma}_{xy}) \end{bmatrix} - \frac{\vartheta \lambda_s}{M_{ws}^4} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}4} - M_0^4 \\ M_y^{\text{an}4} - M_0^4 \\ M_x^{\text{an}2} M_y^{\text{an}2} - M_0^4 \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} &= \frac{1}{k M^{\text{an}}} f^{-1} \left( \frac{M^{\text{an}}}{M_s} \right) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} - \alpha \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} + \mu_0 \begin{bmatrix} (N_d)_{xx} & 0 \\ 0 & (N_d)_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} \\ &- \frac{2}{\mu_0 M_{ws}^2} \begin{bmatrix} \lambda_s \hat{\sigma}_{xx} - \Lambda_0(\hat{\sigma}_{xx}) & \lambda_s \hat{\sigma}_{xy} \\ \lambda_s \hat{\sigma}_{yx} & \lambda_s \hat{\sigma}_{yy} - \Lambda_0(\hat{\sigma}_{yy}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} \\ &+ \frac{4}{\mu_0} \frac{\vartheta \lambda_s}{M_{ws}^4} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yx} & \hat{\sigma}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}3} - M_0^3 \\ M_y^{\text{an}3} - M_0^3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (12)$$

(11) 式和 (12) 式即为非磁滞条件下铁磁材料的二维非线性力磁耦合本构模型的一般形式. 由 (12) 式可知, 在应力和外磁场的联合作用下, 铁磁材料内部的磁化强度是外磁场、应力、分子场、退磁场以及力磁耦合效应的综合作用结果, 因此定义材料内部的等效磁场强度为  $H_{hk}$ , 即  $H_{hk} = \frac{M_k^{\text{an}}}{k M^{\text{an}}} f_k^{-1} \left( \frac{M^{\text{an}}}{M_s} \right)$ , 其矩阵形式为

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} H_{hx} \\ H_{hy} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix} + \alpha \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} - \mu_0 \begin{bmatrix} (N_d)_{xx} & 0 \\ 0 & (N_d)_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} + \frac{2}{\mu_0 M_{ws}^2} \begin{bmatrix} \lambda_s \hat{\sigma}_{xx} - \Lambda_0(\hat{\sigma}_{xx}) & \lambda_s \hat{\sigma}_{xy} \\ \lambda_s \hat{\sigma}_{yx} & \lambda_s \hat{\sigma}_{yy} - \Lambda_0(\hat{\sigma}_{yy}) \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}} \\ M_y^{\text{an}} \end{bmatrix} - \frac{4}{\mu_0} \frac{\vartheta \lambda_s}{M_{ws}^4} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_{xx} & \hat{\sigma}_{xy} \\ \hat{\sigma}_{yx} & \hat{\sigma}_{yy} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} M_x^{\text{an}3} - M_0^3 \\ M_y^{\text{an}3} - M_0^3 \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (13)$$

当考虑钉扎效应产生的磁滞损耗时, 实际磁化强度  $M_k$  是可逆磁化强度  $M_k^{\text{rev}}$  和不可逆磁化强度  $M_k^{\text{irr}}$  之和<sup>[16,17]</sup>, 即:

$$M_k = M_k^{\text{rev}} + M_k^{\text{irr}}. \quad (14)$$

可逆磁化强度  $M_k^{\text{rev}}$ 、不可逆磁化强度  $M_k^{\text{irr}}$  和非磁滞磁化强度  $M_k^{\text{an}}$  满足:

$$M_k^{\text{rev}} = c(M_k^{\text{an}} - M_k^{\text{irr}}), \quad (15)$$

式中  $c$  表示可逆系数.

当考虑由于钉扎效应产生的磁滞损耗时, 根据能量守恒原理可得

$$M_k = M_k^{\text{an}} - \frac{K \delta}{\mu_0} \frac{dM_k^{\text{irr}}}{dH_{hk}}, \quad (16)$$

式中  $K$  为钉扎系数.

联立 (13) 式—(16) 式可得

$$\begin{aligned} \frac{dM_k}{d\sigma_{ij}} &= \left\{ \frac{1}{K \delta} (M_k^{\text{an}} - M_k) \left\{ \frac{3}{2} \lambda_s \left[ 1 - \tanh \left( \beta \frac{\hat{\sigma}_{kl}}{\sigma_s} - \operatorname{arctanh} \frac{1}{3} \right) \right] \frac{M_k}{M_{ws}^2} - 4 \vartheta \lambda_s \frac{(M_l^3 - M_0^3)}{M_{ws}^4} \right\} + \frac{c}{1-c} \frac{dM_k^{\text{an}}}{d\sigma_{ij}} \right\} \\ &\times \left\{ \frac{1}{1-c} - \frac{\mu_0}{K \delta} (M_k^{\text{an}} - M_k) \left[ (\alpha - (N_d)_{kk}) \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{3}{2} \lambda_s \left\{ \hat{\sigma}_{kl} - \frac{\sigma_s}{\beta} \ln \left[ \cosh \left( \beta \frac{\hat{\sigma}_{kl}}{\sigma_s} - \operatorname{arctanh} \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \frac{1}{M_{ws}^2} - 12 \vartheta \hat{\sigma}_{kl} \lambda_s \frac{(M_l^2 - M_0^2)}{M_{ws}^4} \right) \right] \right\}^{-1}, \end{aligned} \quad (17)$$

式中,

$$\begin{aligned} \frac{dM_k^{\text{an}}}{d\sigma_{ij}} = & \left( \frac{1}{\mu_0} M_s \left[ -\frac{1}{a} \text{csch}^2 \left( \frac{H_{\text{hk}}}{a} \right) + \frac{a}{H_{\text{ek}}^2} \right] \left\{ \frac{3}{2} \lambda_s \left[ 1 - \tanh \left( \beta \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_s} - \text{arctanh} \frac{1}{3} \right) \right] \frac{M_k^{\text{an}}}{M_{\text{ws}}^2} - 4\vartheta \lambda_s \frac{(M_l^{\text{an}3} - M_0^3)}{M_{\text{ws}}^4} \right\} \right) \\ & \times \left\{ 1 - M_s \left[ -\frac{1}{a} \text{csch}^2 \left( \frac{H_{\text{hk}}}{a} \right) + \frac{a}{H_{\text{ek}}^2} \right] \left[ (\alpha_{ij} - (N_d)_{kk}) \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{\mu_0} \left( \frac{3}{2} \lambda_s \left\{ \hat{\sigma}_{kl} - \frac{\sigma_s}{\beta} \ln \left[ \cosh \left( \beta \frac{\hat{\sigma}_{kl}}{\sigma_s} - \text{arctanh} \frac{1}{3} \right) \right] \right\} \frac{1}{M_{\text{ws}}^2} - 12\vartheta \sigma_{ij} \lambda_s \frac{(M_l^{\text{an}2} - M_0^2)}{M_{\text{ws}}^4} \right) \right] \right\}^{-1}. \end{aligned} \quad (18)$$

(17) 式即为考虑磁滞效应的铁磁材料磁化强度随应力的变化关系模型。

### 3 基于面磁荷密度的磁记忆信号计算模型

金属磁记忆检测本质上属于磁无损检测, 其正演问题可归结为求解地磁场条件下的 Maxwell 方程. 在磁记忆检测过程中, 作为激励源的地磁场在小范围内可以认为是均匀分布的静磁场, 且铁磁体内部没有传导电流, Maxwell 方程组可以简化为<sup>[18-20]</sup>

$$\begin{cases} \nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \\ \nabla \times \mathbf{H} = 0. \end{cases} \quad (19)$$

在磁记忆检测中, 由于没有传导电流, 因此可以引入标量磁位  $\phi_m$  来描述磁场强度  $\mathbf{H}$ :

$$\mathbf{H} = -\nabla \phi_m, \quad (20)$$

标量磁位  $\phi_m$  的积分形式可以写为<sup>[18]</sup>

$$\begin{aligned} \phi_m &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega^+} \frac{\rho_m}{|\mathbf{R}|} dv' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma^+} \frac{\rho_{\text{ms}}}{|\mathbf{R}|} ds' \\ &= \frac{1}{4\pi} \iiint_{\Omega^+} \frac{-\nabla' \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{R}|} dv' + \frac{1}{4\pi} \iint_{\Gamma^+} \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}}{|\mathbf{R}|} ds', \end{aligned} \quad (21)$$

式中,  $\rho_m$  为体磁荷密度;  $\rho_{\text{ms}}$  为面磁荷密度;  $\mathbf{R}$  为铁磁体周围场点  $A(x, y, z)$  与内部源点  $B(\xi, \eta, \zeta)$  之间的矢径,  $|\mathbf{R}| = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + (z - \zeta)^2}$ ;  $\nabla'$  算子是对源点坐标  $(\xi, \eta, \zeta)$  进行的, 即  $\nabla' = \frac{\partial}{\partial \xi} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial \eta} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial \zeta} \mathbf{k}$ ,  $\Omega^+$  表示铁磁体区域的体积,  $\Gamma^+$  表示铁磁体的表面积。

由于应力的不均匀分布, 导致铁磁体内部磁化强度分布不均, 磁化强度  $\mathbf{M}$  是关于源点  $(\xi, \eta, \zeta)$  应力的非线性函数, 很难通过直接积分求得  $\phi_m$  解析解. 因此, 在实际计算过程中, 可将铁磁体离散为  $N$  个微小体积单元, 则每个单元的磁化强度  $\mathbf{M}_e$  可

认为是常数, 即  $\nabla' \cdot \mathbf{M}_e = 0$ ,  $\rho_m = 0$ , 代入 (21) 式中, 则每个单元的标量磁位  $\phi_{e,m}$  可以简化为<sup>[18]</sup>

$$\phi_{e,m} = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{M}_e}{|\mathbf{R}|} ds. \quad (22)$$

将 (22) 式代入 (20) 式, 则每个单元的磁场强度分量可写为<sup>[20]</sup>

$$\begin{cases} H_{e,x} = \frac{M_{e,x}}{4\pi} \oint \frac{x - \xi}{|\mathbf{R}|^3} d\eta d\zeta + \frac{M_{e,y}}{4\pi} \oint \frac{x - \xi}{|\mathbf{R}|^3} d\xi d\zeta \\ \quad + \frac{M_{e,z}}{4\pi} \oint \frac{x - \xi}{|\mathbf{R}|^3} d\xi d\eta, \\ H_{e,y} = \frac{M_{e,x}}{4\pi} \oint \frac{y - \eta}{|\mathbf{R}|^3} d\eta d\zeta + \frac{M_{e,y}}{4\pi} \oint \frac{y - \eta}{|\mathbf{R}|^3} d\xi d\zeta \\ \quad + \frac{M_{e,z}}{4\pi} \oint \frac{y - \eta}{|\mathbf{R}|^3} d\xi d\eta, \\ H_{e,z} = \frac{M_{e,x}}{4\pi} \oint \frac{z - \zeta}{|\mathbf{R}|^3} d\eta d\zeta + \frac{M_{e,y}}{4\pi} \oint \frac{z - \zeta}{|\mathbf{R}|^3} d\xi d\zeta \\ \quad + \frac{M_{e,z}}{4\pi} \oint \frac{z - \zeta}{|\mathbf{R}|^3} d\xi d\eta, \end{cases} \quad (23)$$

式中,  $M_{e,x}$ ,  $M_{e,y}$  和  $M_{e,z}$  分别表示第  $i$  号单元内的磁化强度  $\mathbf{M}_e$  在  $x, y, z$  方向上的分量。

(23) 式中, 被积函数只与场点和源点的位置有关. 因此, 第  $i$  号单元在场点处产生的磁场强度可以用一个与源点坐标和场点坐标相关的  $3 \times 3$  阶矩阵来表示, 并将该矩阵定义为面积分耦合系数矩阵  $\mathbf{S}_{e,A_m B_n}$ , (23) 式可以简写为

$$\begin{cases} H_{e,x} = S_{e,A_x B_x'} M_{e,x} + S_{e,A_x B_y'} M_{e,y} \\ \quad + S_{e,A_x B_z'} M_{e,z}, \\ H_{e,y} = S_{e,A_y B_x'} M_{e,x} + S_{e,A_y B_y'} M_{e,y} \\ \quad + S_{e,A_y B_z'} M_{e,z}, \\ H_{e,z} = S_{e,A_z B_x'} M_{e,x} + S_{e,A_z B_y'} M_{e,y} \\ \quad + S_{e,A_z B_z'} M_{e,z}. \end{cases} \quad (24)$$

面积分耦合系数矩阵  $\mathbf{S}_{e,A_m B_n}$  的计算式为

$S_{e,A_m B_n} =$

$$\left\{ \begin{matrix} S_{e,A_x B_\xi} & S_{e,A_x B_\eta} & S_{e,A_x B_\zeta} \\ S_{e,A_y B_\xi} & S_{e,A_y B_\eta} & S_{e,A_y B_\zeta} \\ S_{e,A_z B_\xi} & S_{e,A_z B_\eta} & S_{e,A_z B_\zeta} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4\pi} \oint \frac{x-\xi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\eta d\zeta & \frac{1}{4\pi} \oint \frac{x-\xi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\zeta & \frac{1}{4\pi} \oint \frac{x-\xi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\eta \\ \frac{1}{4\pi} \oint \frac{y-\eta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\eta d\zeta & \frac{1}{4\pi} \oint \frac{y-\eta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\zeta & \frac{1}{4\pi} \oint \frac{y-\eta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\eta \\ \frac{1}{4\pi} \oint \frac{z-\zeta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\eta d\zeta & \frac{1}{4\pi} \oint \frac{z-\zeta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\zeta & \frac{1}{4\pi} \oint \frac{z-\zeta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\eta \end{matrix} \right\}. \quad (25)$$

将单元铁磁体磁场强度进行求和, 即得到整个铁磁体周围空间任意一点处的磁场强度:

$$\left\{ \begin{matrix} H_x = \sum_{e=1}^N \left( S_{e,A_x B_x} M_{e,x} + S_{e,A_x B_y} M_{e,y} + S_{e,A_x B_z} M_{e,z} \right), \\ H_y = \sum_{e=1}^N \left( S_{e,A_y B_x} M_{e,x} + S_{e,A_y B_y} M_{e,y} + S_{e,A_y B_z} M_{e,z} \right), \\ H_z = \sum_{e=1}^N \left( S_{e,A_z B_x} M_{e,x} + S_{e,A_z B_y} M_{e,y} + S_{e,A_z B_z} M_{e,z} \right). \end{matrix} \right. \quad (26)$$

(26) 式即为基于等效面磁荷积分的金属磁记忆信号计算模型, 要对其进行求解, 还需建立离散单元面积分耦合系数矩阵  $S_{e,A_m B_n}$ . 以任意六面体单元为例, 根据 (25) 式可知, 由六面体单元顶点坐标计算面积分耦合系数矩阵的关键是求解以下三类积分式 [20]:

$$\left\{ \begin{matrix} S_{jx} = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{x-\xi}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\eta, \\ S_{jy} = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{y-\eta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\eta, \\ S_{jz} = \frac{1}{4\pi} \oint \frac{z-\zeta}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^3} d\xi d\eta, \end{matrix} \right. \quad (27)$$

式中  $S_j$  为六面体单元的第  $j$  号空间表面,  $j = 1, 2, \dots, 6$ . 随着六面体单元形状、空间位置离散方案

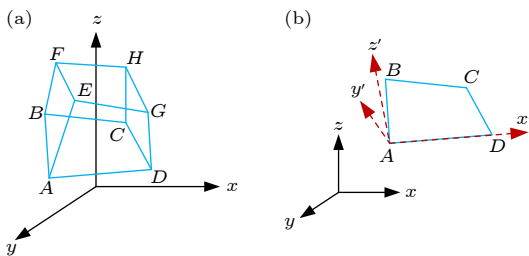


图 1 任意形状六面体单元及局部坐标示意图 (a) 任意形状六面体单元示意图; (b) 六面体单元表面  $S_j$  局部坐标示意图

Fig. 1. Sketch of an irregular hexahedron element and its local coordinates: (a) Sketch of an irregular hexahedron element; (b) local coordinates of the surface  $S_j$  of irregular hexahedron element.

不同, 要得到全局坐标系下面积分耦合系数矩阵的解析式是十分困难的. 因此, 为获得六面体每个表面的面积分耦合系数, 需要将每个外表面旋转到局部坐标下, 使得该表面成为相对局部坐标系的水平面, 如图 1 所示 [18–20].

如图 2 所示, 对任意相对  $xy$  平面“水平”的四边形  $A_1 A_2 A_3 A_4$  而言, 假设四边形各顶点坐标分别为  $A_1 (\xi'_1, \eta'_1, \zeta'_1)$ ,  $A_2 (\xi'_2, \eta'_2, \zeta'_2)$ ,  $A_3 (\xi'_3, \eta'_3, \zeta'_3)$  和  $A_4 (\xi'_4, \eta'_4, \zeta'_4)$ ,  $A_1 A_2$ ,  $A_2 A_3$ ,  $A_3 A_4$  和  $A_4 A_1$  与  $x$  轴的夹角分别为  $\theta_{12}$ ,  $\theta_{23}$ ,  $\theta_{34}$  和  $\theta_{41}$  [19,20].

如图 2(a) 所示, 过点  $A_2$  和  $A_4$  作与  $x$  轴的平行线, 将四边形  $A_1 A_2 A_3 A_4$  的面积分转化成两个三角形和一个梯形之和, 即  $S_{A_1 A_2 A_3 A_4} = S_{A_1 A_2 A_2'} + S_{A_2 A_4' A_4 A_2'} + S_{A_4' A_3 A_4}$ , 则任意四边形  $S'_{jx}$  的表达式可表示为

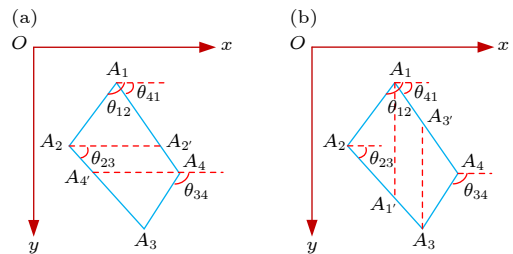


图 2 任意四边形面积分示意图 (a) 平行于  $x$  轴, 任意四边形分域积分示意图; (b) 平行于  $y$  轴, 任意四边形分域积分示意图

Fig. 2. Sketch of surface integral of an irregular quadrangle: (a) Surface integral of an irregular quadrangle parallel to the  $x$  axis; (b) surface integral of an irregular quadrangle parallel to the  $y$  axis.

$$S'_{jx} = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 |\sin \theta_{k,k+1}| [\ln(\eta'_{i+1} - y') - \ln(\eta'_i - y')], & R_k + r_k = 0, R_{k+i} + r_{k+i} = 0, \eta'_{i+1} - y' > 0, \eta'_i - y' > 0, \\ -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 |\sin \theta_{k,k+1}| [\ln(y' - \eta'_{i+1}) - \ln(y' - \eta'_i)], & R_k + r_k = 0, R_{k+i} + r_{k+i} = 0, \eta'_{i+1} - y' < 0, \eta'_i - y' < 0, \\ 0, & R_k + r_k = 0, R_{k+i} + r_{k+i} = 0, \eta'_{i+1} - y' = 0, \eta'_i - y' = 0, \\ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \sin \theta_{k,k+1} [\ln(R_k + r_k) - \ln(R_{k+1} + r_{k+1})], & \text{其他.} \end{cases} \quad (28)$$

如图 2(b) 所示, 过点  $A_1$  和  $A_3$  作与  $y$  轴的平行线, 将四边形  $A_1A_2A_3A_4$  的面积分转化成两个三角形和一个梯形之和, 即  $S_{A_1A_2A_3A_4} = S_{A_1A_2A_1'} + S_{A_1A_1'A_3A_3'} + S_{A_3A_4A_3'}$ , 则任意四边形  $S'_{jy}$  的表达式可表示为

$$S'_{jy} = \begin{cases} -\frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 |\cos \theta_{k,k+1}| [\ln(\xi'_{i+1} - x') - \ln(\xi'_i - x')], & R_k + r_k = 0, R_{k+i} + r_{k+i} = 0, \xi'_{i+1} - x' > 0, \xi'_i - x' > 0, \\ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 |\cos \theta_{k,k+1}| [\ln(x' - \xi'_{i+1}) - \ln(x' - \xi'_i)], & R_k + r_k = 0, R_{k+i} + r_{k+i} = 0, \xi'_i - x' < 0, \xi'_i - x' < 0, \\ 0, & R_k + r_k = 0, R_{k+i} + r_{k+i} = 0, \xi'_i - x' = 0, \xi'_i - x' = 0, \\ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \cos \theta_{k,k+1} [\ln(R_{k+1} + r_{k+1}) - \ln(R_k + r_k)], & \text{其他.} \end{cases} \quad (29)$$

任意四边形  $S'_{jz}$  的表达式可表示为

$$S'_{jz} = \begin{cases} 0, & A_{z_k} = 0, A_{z_{i+1}} = 0, \sin \theta_{i,i+1}, \\ \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^4 \arctan \frac{R_i^2 \cos \theta_{i,i+1} - A_{x_i} r_i}{A_{z_i} R_i \sin \theta_{i,i+1}} - \arctan \frac{R_{i+1}^2 \cos \theta_{i,i+1} - A_{x_{i+1}} r_{i+1}}{A_{z_{i+1}} R_{i+1} \sin \theta_{i,i+1}}, & \text{其他.} \end{cases} \quad (30)$$

利用转轴关系, 将 (28) 式—(30) 式所表示的局部坐标系下“水平面”的三个面积分耦合系数  $S'_{jx}$ ,  $S'_{jy}$  和  $S'_{jz}$  转换成全局坐标系下的面积分耦合系数, 转换关系为<sup>[20]</sup>

$$\begin{pmatrix} S_{jx} \\ S_{jy} \\ S_{jz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha_{j,1} & \cos \alpha_{j,2} & \cos \alpha_{j,3} \\ \cos \beta_{j,1} & \cos \beta_{j,2} & \cos \beta_{j,3} \\ \cos \gamma_{j,1} & \cos \gamma_{j,2} & \cos \gamma_{j,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_{jx} \\ S'_{jy} \\ S'_{jz} \end{pmatrix}. \quad (31)$$

(28) 式—(31) 式中的下标  $j$  表示多面体第  $j$  号空间表面的相应参数值. 逐一计算各个空间表面的面积分耦合系数, 然后相加就可得到任意多面体的面积分耦合系数. 则全局坐标系下, 任意多面体单元面积分耦合系数可以写为

$$S_{e,AmBn} = \sum_{j=1}^n \begin{pmatrix} \cos \alpha_{j,1} & \cos \alpha_{j,2} & \cos \alpha_{j,3} \\ \cos \beta_{j,1} & \cos \beta_{j,2} & \cos \beta_{j,3} \\ \cos \gamma_{j,1} & \cos \gamma_{j,2} & \cos \gamma_{j,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_{jx} \\ S'_{jy} \\ S'_{jz} \end{pmatrix}. \quad (32)$$

则对于每个多面体单元的磁场三个分量的等效面磁荷积分解析表达式为

$$\begin{pmatrix} H_{e,mx} \\ H_{e,my} \\ H_{e,mz} \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} \cos \alpha_{j,3} \\ \cos \beta_{j,3} \\ \cos \gamma_{j,3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_{e,x} \\ M_{e,y} \\ M_{e,z} \end{pmatrix} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \cos \alpha_{j,1} & \cos \alpha_{j,2} & \cos \alpha_{j,3} \\ \cos \beta_{j,1} & \cos \beta_{j,2} & \cos \beta_{j,3} \\ \cos \gamma_{j,1} & \cos \gamma_{j,2} & \cos \gamma_{j,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_{jx} \\ S'_{jy} \\ S'_{jz} \end{pmatrix}. \quad (33)$$

因此, 对于整个铁磁体而言, 磁场三个分量的等效面磁荷积分解析表达式则为

$$\begin{pmatrix} H_{mx} \\ H_{my} \\ H_{mz} \end{pmatrix} = \sum_{e=1}^N \sum_{j=1}^m \begin{pmatrix} \cos \alpha_{j,3} \\ \cos \beta_{j,3} \\ \cos \gamma_{j,3} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} M_{e,x} \\ M_{e,y} \\ M_{e,z} \end{pmatrix} \sum_{k=1}^n \begin{pmatrix} \cos \alpha_{j,1} & \cos \alpha_{j,2} & \cos \alpha_{j,3} \\ \cos \beta_{j,1} & \cos \beta_{j,2} & \cos \beta_{j,3} \\ \cos \gamma_{j,1} & \cos \gamma_{j,2} & \cos \gamma_{j,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} S'_{jx} \\ S'_{jy} \\ S'_{jz} \end{pmatrix}. \quad (34)$$

联立 (17) 式—(34) 式可实现金属磁记忆检测信号的正演计算。

## 4 模型验证与讨论

在计算过程中, 首先将含不同类型、尺寸缺陷试件的几何模型离散为有限多个微小单元, 利用有限元方法计算试件应力分布; 然后, 假设每个单元磁特征参数分布均匀, 利用 (17) 式计算每个单元的磁化强度, 再利用磁化强度与磁荷密度之间的关系确定单元磁荷密度大小; 在此基础上, 利用 (34) 式计算试件表面磁场分布情况. 计算流程如图 3 所示.

### 4.1 模型验证

为说明本文正演模型的计算效果, 采用该模型计算图 4 所示含有槽形裂纹缺陷的铁磁试件的磁场水平分量  $H_x$  和法向分量  $H_z$  分布, 其中缺陷长

$L_c = 4 \text{ mm}$ 、宽  $W_c = 2 \text{ mm}$ 、深  $D_c = 2 \text{ mm}$ , 地磁场强度  $H_0 = 40 \text{ A/m}$ , 方向与  $x$  平行; 试件所受拉伸应力  $\sigma_0 = 50 \text{ MPa}$ , 测试线位于试件中部缺陷正上方, 测试线距离试件表面的高度定义为提高高度  $L$ , 当提高高度  $L = 1, 2, 3 \text{ mm}$ . 假设材料为各向同性材料, 模型中  $\lambda_s = 4.17 \times 10^{-6} \text{ m}$ ,  $M_{ws} = 1.35 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $M_s = 1.6 \times 10^6 \text{ A}\cdot\text{m}^{-1}$ ,  $\beta = 1.4$ ,  $\vartheta = 0.75$ ,  $a_0 = 900$ ,  $(N_d)_{kk} = N_d = 5 \times 10^{-5}$ ,  $k = 1.52 \times 10^{-3} \text{ A/m}$ ,  $\alpha = 1.44 \times 10^{-3}$ , 模型计算结果如图 5 所示.

由图 5 可知, 不同提高高度下磁场水平分量  $H_x$  与法向分量  $H_z$  变化规律为:  $H_x$  在缺陷中心处出现极大值, 在缺陷左右边缘出现两处较小谷值点; 而  $H_z$  在缺陷中心过零点, 在缺陷左右边缘出现正负峰-谷值; 随着提高高度的增大,  $H_x$  与  $H_z$  的幅值迅速减小. 上述规律与实验结果变化规律一致, 说明本文模型能够正确反映金属磁记忆检测信号的变化规律.

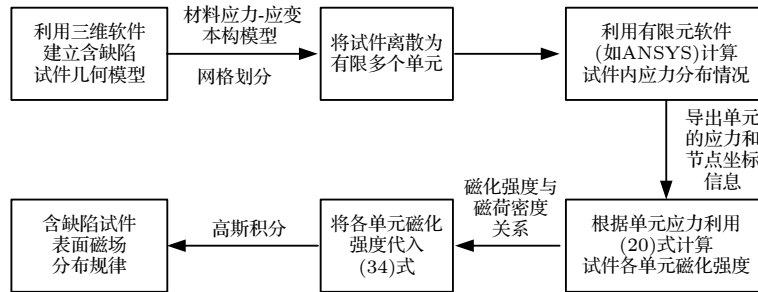


图 3 基于面磁荷密度的金属磁记忆正演计算流程

Fig. 3. Calculation flowchart of metal magnetic memory forward analysis based on surface magnetic charge density.

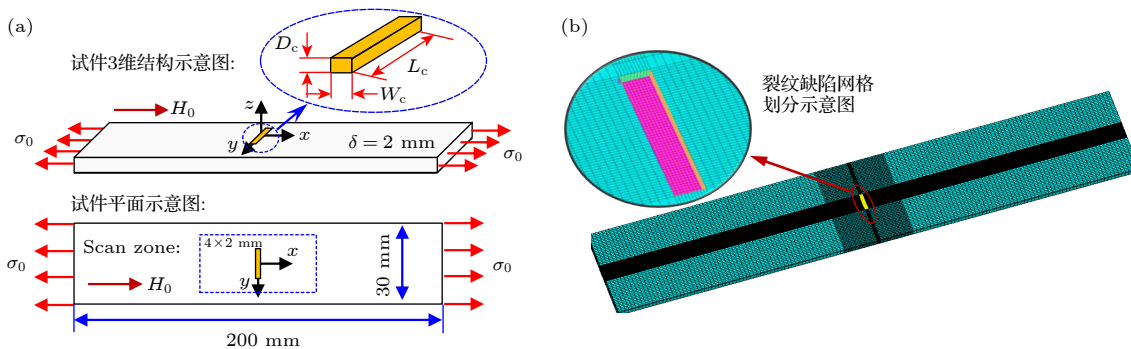


图 4 含裂纹缺陷拉伸试件尺寸及网格划分示意图 (a) 试件结构及尺寸; (b) 试件网格划分

Fig. 4. Shape, sizes and finite element meshing of the specimen with crack defect: (a) Shape and sizes of the specimen; (b) finite element meshing of the specimen.

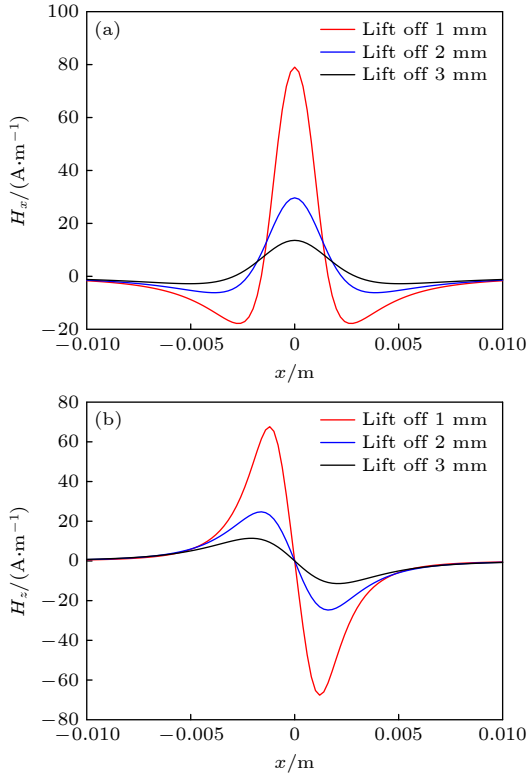


图5 不同提高高度条件下试件表面  $H_x$  与  $H_z$  计算结果  
(a)  $H_x$ ; (b)  $H_z$   
Fig. 5. Calculation of  $H_x$  and  $H_z$  with different lift off:  
(a)  $H_x$ ; (b)  $H_z$ .

进一步地,用 Maciej 和 Gawrilenko [21] 在含圆孔型缺陷的拉伸试样上开展的实验结果进行对比

验证,他们实验中的拉伸试样结构尺寸如图6所示.

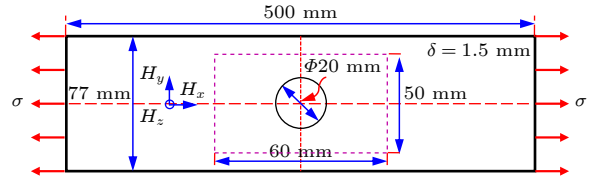


图6 文献 [21] 中含圆孔缺陷拉伸试样结构及尺寸示意图  
Fig. 6. Shape and sizes of the specimen with hole defect in Ref. [21].

实验时,试件所受拉伸载荷为 50 MPa,测试如图6中紫色虚线框所示范围内试件表面的三个磁场分量分布情况,文献 [21] 中的测试结果如图7(a)—(c)所示,本文正演模型的理论计算结果如图7(d)—(f)所示.

由实验结果可知:含圆孔缺陷试件在拉伸载荷作用下,水平分量  $H_x$  在圆孔缺陷中心区域出现峰值,峰值区域轮廓与圆孔轮廓接近,  $H_x$  峰值在 130 A/m 以上;切向分量  $H_y$  在圆孔缺陷的4个角点位置出现正、负峰-谷值区域,第2和第4象限的正向峰值在 10 A/m 以上,第1和第3象限内的负向谷值在 -50 A/m 以下;法向分量  $H_z$  在圆孔上、下边缘两侧出现正、负峰-谷值变化,在圆孔中心过零点,  $H_z$  正向峰值在 20 A/m 以上,负向谷值约在 -70 A/m 以下.

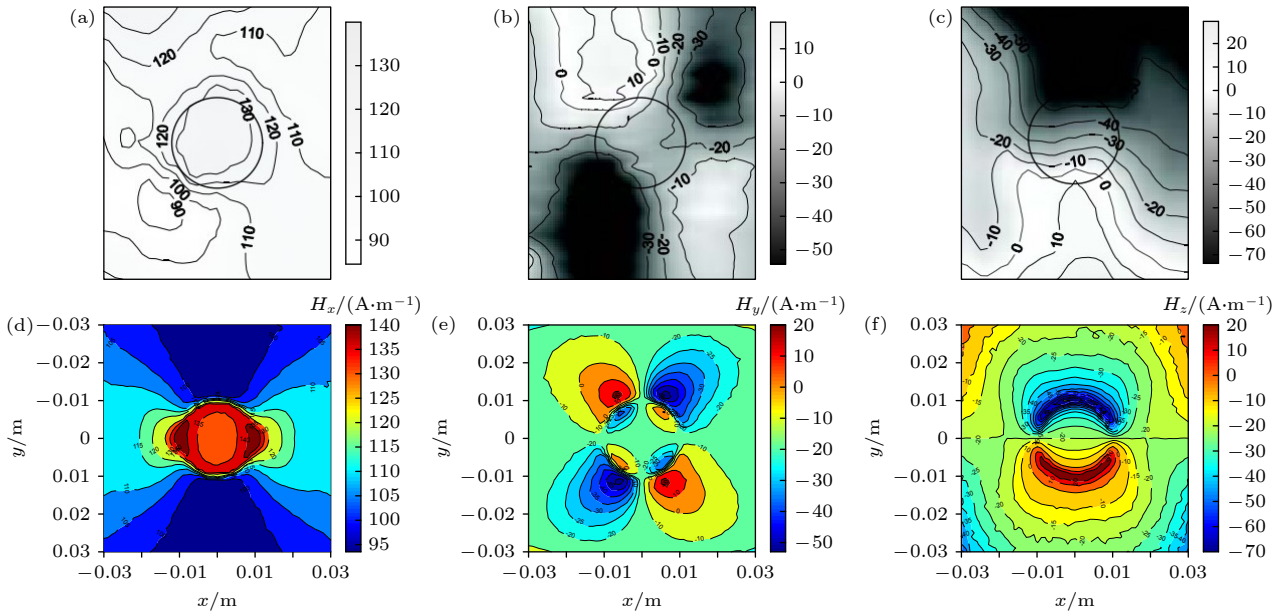


图7 含圆孔缺陷拉伸试样表面磁场分布理论计算结果与实验结果对比 (a) 实验测试的  $H_x$  分布情况; (b) 实验测试的  $H_y$  分布情况; (c) 实验测试的  $H_z$  分布情况; (d) 理论计算的  $H_x$  分布情况; (e) 理论计算的  $H_y$  分布情况; (f) 理论计算的  $H_z$  分布情况  
Fig. 7. Comparison between theoretical results and experimental results of magnetic field distribution of the specimen with hole defect: (a)  $H_x$  of experimental results; (b)  $H_y$  of experimental results; (c)  $H_z$  of experimental results; (d)  $H_x$  of theoretical results; (e)  $H_y$  of theoretical results; (f)  $H_z$  of theoretical results.

如表 1 所列, 将本文模型和文献 [13] 图 3.9 中理论模型计算结果与实验结果对比可以发现: 不同理论模型的计算结果均能反映试件表面磁场三个分量的分布规律, 但是磁场各分量的等值线分布和数值存在一定的差异, 本文磁荷模型计算得到的  $H_x$  幅值范围是 70—140 A/m,  $H_y$  幅值范围是 -50—20 A/m,  $H_z$  幅值范围是 -60—20 A/m; 文献 [13] 图 3.9 中  $H_x$  幅值范围是 80—140 A/m,  $H_y$  幅值范围是 -40—10 A/m,  $H_z$  幅值范围是 -70—20 A/m. 因此, 在数值上两种模型计算结果均能很好反映实验结果, 但本文正演模型计算得到的磁场各分量的等值线分布更接近实验分布结果.

表 1 不同正演模型计算结果与实验测试结果对比  
Table 1. Comparison of magnetic field distribution of specimen with hole defect calculated by different models.

磁场分量	实验结果 [21]	文献[13]图3.9结果	本文模型计算结果
$H_x/(A \cdot m^{-1})$	90—130	80—140	70—140
$H_y/(A \cdot m^{-1})$	-50—10	-40—10	-50—20
$H_z/(A \cdot m^{-1})$	-70—20	-70—20	-60—20

进一步地, 用 Maciej 等 [22] 在含裂纹缺陷的 S235 钢 (相当于我国 Q235 钢) 拉伸试样上开展的

实验进行验证, 他们实验中的含裂纹缺陷的拉伸试样结构尺寸如图 8 所示.

实验中, 先在试件两端施加 225 MPa 的拉伸载荷, 卸载后测试如图 8 中紫色虚线框所示范围内的磁场分量分布情况, 文献 [22] 中实验结果如图 9(a)—(c) 所示, 本文模型的理论预测结果如图 9(d)—(f) 所示.

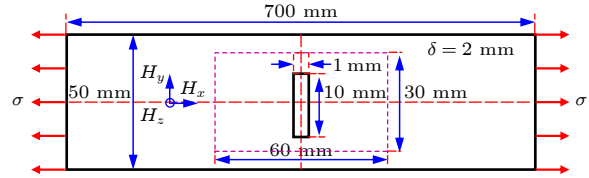


图 8 文献 [22] 中裂纹缺陷拉伸试样示意图

Fig. 8. Shape and sizes of the specimen with crack defect in Ref. [22].

根据图 9(a)—(c) 所示实验结果可知: 含裂纹缺陷试样在拉伸载荷作用下, 水平分量  $H_x$  在裂纹缺陷中心区域出现峰值区域, 在缺陷左右边缘位置出现谷值区域, 峰值区域轮廓与裂纹轮廓基本一致,  $H_x$  幅值范围约为 100—160 A/m; 切向分量  $H_y$  在裂纹缺陷的 4 个角点位置出现正、负峰—谷值区域, 在第 1 和第 3 象限的正向峰值约为 10 A/m, 在第 2 和第 4 象限内的负向谷值约为

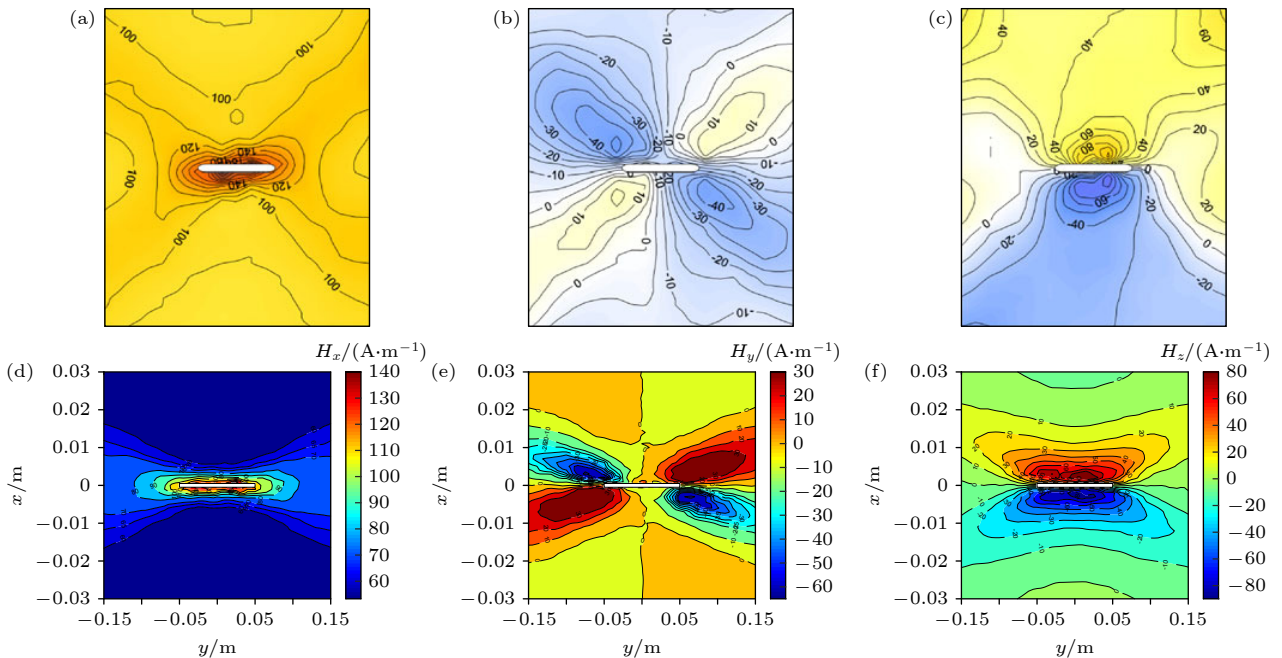


图 9 含裂纹缺陷拉伸试样表面磁场分布理论计算结果与实验结果对比 (a) 实验测试的  $H_x$  分布情况; (b) 实验测试的  $H_y$  分布情况; (c) 实验测试的  $H_z$  分布情况; (d) 理论计算的  $H_x$  分布情况; (e) 理论计算的  $H_y$  分布情况; (f) 理论计算的  $H_z$  分布情况

Fig. 9. Comparison between theoretical results and experimental results of magnetic field distribution of the specimen with crack defect: (a)  $H_x$  of experimental results; (b)  $H_y$  of experimental results; (c)  $H_z$  of experimental results; (d)  $H_x$  of theoretical results; (e)  $H_y$  of theoretical results; (f)  $H_z$  of theoretical results.

-40 A/m; 法向分量  $H_z$  裂纹的左、右边缘出现正、负峰—谷值变化, 在裂纹中心过零点,  $H_z$  的幅值范围为-60—80 A/m.

如表 2 所列, 将本文模型和文献 [13] 图 3.28 中理论模型计算结果与文献 [22] 中实验结果对比可以发现: 本文建立的磁荷模型能够反映实验测试得到的磁场分布规律, 且计算值与实验测试结果较为接近, 磁荷模型计算得到的水平分量  $H_x$  幅值范围为 60—140 A/m, 切向分量  $H_y$  幅值范围为 -60—30 A/m, 法向分量幅值范围为 -80—80 A/m. 出现数值差异的主要原因可能在于: 在实际检测过

程中, 测试结果不可避免地会受到环境干扰磁场的影响, 而在理论计算过程中没有考虑环境干扰磁场的影响. 文献 [13] 图 3.28 中水平分量  $H_x$  幅值范围为 -400—400 A/m, 切向分量  $H_y$  幅值范围为 -200—200 A/m, 法向分量的幅值范围为 -500—500 A/m, 磁场各分量的等值线分布和数值与实验结果存在显著差异. 因此, 本文模型能更好反映裂纹缺陷表面磁场各分量的分布规律.

## 4.2 模型讨论

### 4.2.1 应力集中与宏观裂纹磁记忆信号对比

将应力集中区域简化为与图 4(a) 中裂纹形状相同的矩形区域, 应力集中区域长 8 mm、宽 2 mm、深 2 mm, 在此区域应力为 200 MPa, 其他区域应力为 50 MPa; 含裂纹缺陷试件的裂纹缺陷长、宽、深分别为 8 mm, 2 mm 和 2 mm, 试件所受拉伸载荷为 50 MPa. 计算后提取试件中心距离试件表面 1 mm, 20 mm × 20 mm 区域内的磁场分布情况, 结果如图 10 所示.

表 2 不同正演模型计算含裂纹缺陷试件结果与实验测试结果对比

Table 2. Comparison of magnetic field distribution of specimen with crack defect calculated by different models.

磁场分量	实验结果 [22]	文献[13]图3.28中的结果	本文模型计算结果
$H_x / (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	-90—130	-400—400	60—140
$H_y / (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	-50—10	-200—200	-60—30
$H_z / (\text{A} \cdot \text{m}^{-1})$	-70—20	-500—500	-80—80

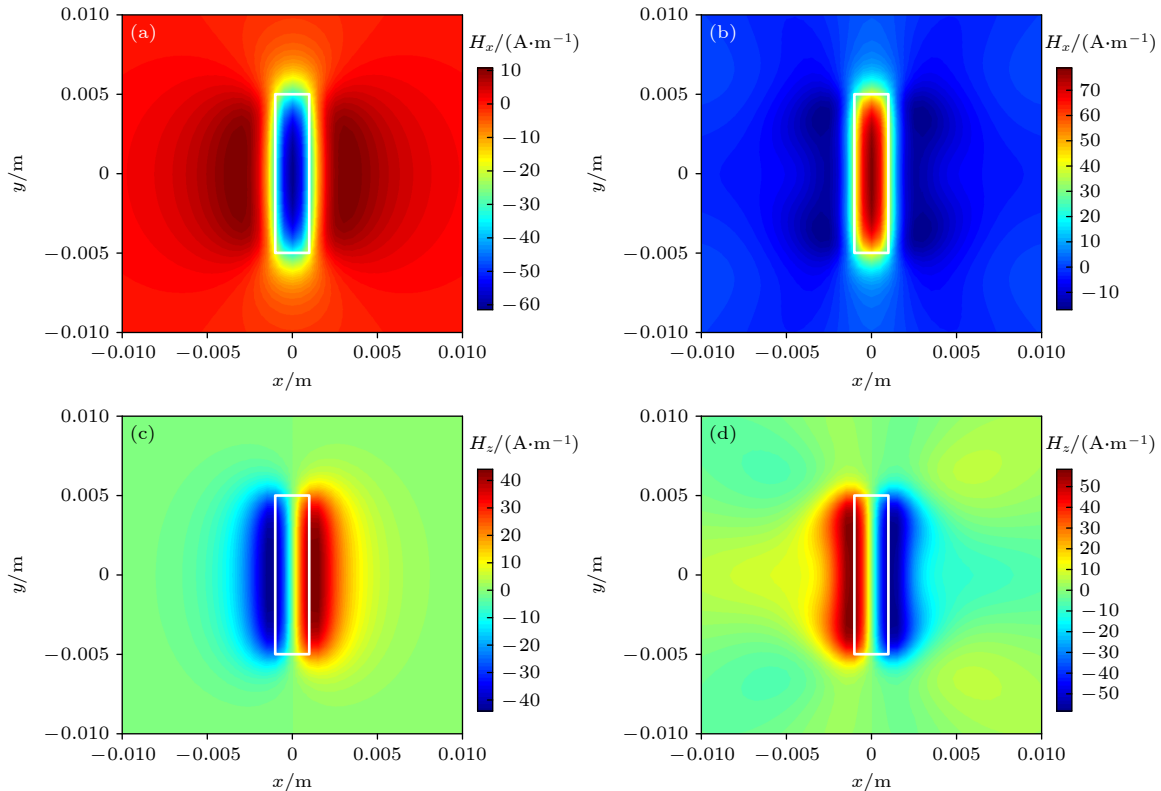


图 10 应力集中与宏观裂纹缺陷对试件表面磁场分布的影响对比 (a) 应力集中区域  $H_x$  分布情况; (b) 宏观裂纹缺陷  $H_x$  分布情况; (c) 应力集中区域  $H_z$  分布情况; (d) 宏观裂纹缺陷  $H_z$  分布情况

Fig. 10. Comparison of effects of stress concentration and macroscopic crack defect on the distribution of magnetic field distribution: (a)  $H_x$  of stress concentration; (b)  $H_x$  of macroscopic crack defects; (c)  $H_z$  of stress concentration; (d)  $H_z$  of macroscopic crack defects.

由图 10 可知, 应力集中与宏观裂纹对磁记忆信号分布的影响明显不同: 当试件内部只存在应力集中、尚未形成宏观缺陷时,  $H_x$  在应力集中区域出现负向谷值, 在应力集中区域的左右边缘位置出现两个幅值较小的正向峰值, 其幅值范围约为  $-60\sim 10$  A/m;  $H_z$  在应力集中区域的左右两侧分别出现正、负峰-谷值变化, 其中应力集中区域左侧为负向谷值区域, 右侧为正向峰值区域, 其幅值范围约为  $-40\sim 40$  A/m. 当试件出现宏观缺陷后, 试件表面磁场各分量分布规律将发生反转:  $H_x$  在缺陷中心位置处出现正向峰值区域, 而在缺陷左右边缘位置出现两个幅值较小的负向谷值区域, 其幅值范围约为  $-10\sim 70$  A/m;  $H_z$  在裂纹缺陷的左侧为正向峰值区域, 右侧为负向谷值区域, 其幅值范围约为  $-60\sim 60$  A/m.

进一步分析含裂纹缺陷试件在 50, 100, 150, 和 200 MPa 四种应力状态下磁场分布规律, 结果

如图 11 所示.

不同应力状态下, 试件表面磁场各分量的分布规律基本一致: 在缺陷位置磁场水平分量出现峰值, 法向分量过零点, 并出现峰谷值变化, 说明当试件出现宏观缺陷后, 试件表面的磁场信号曲线形状主要取决于宏观缺陷的轮廓形状, 而应力幅值的影响相对较小; 应力幅值主要影响磁场分量的幅值: 在裂纹缺陷中心处,  $H_x$  由 50 MPa 时的 78.83 A/m 增大到了 200 MPa 时的 120.4 A/m, 而  $H_z$  由 50 MPa 时的 58.23 A/m 增大至 200 MPa 时的 88.61 A/m 左右.

#### 4.2.2 裂纹缺陷参数对磁记忆信号的影响

以裂纹缺陷为例, 分析缺陷尺寸参数对磁记忆信号的影响规律, 建立如图 4(a) 所示的含缺陷试件, 尺寸参数包括: 宽度  $W_c$ 、长度  $L_c$ 、深度  $D_c$  和埋深  $B_c$ . 在总结金属磁记忆信号各分量特征参数基础上, 选择与磁场水平分量  $H_x$  和法向分量  $H_z$  相关的特征参数如图 12 所示.

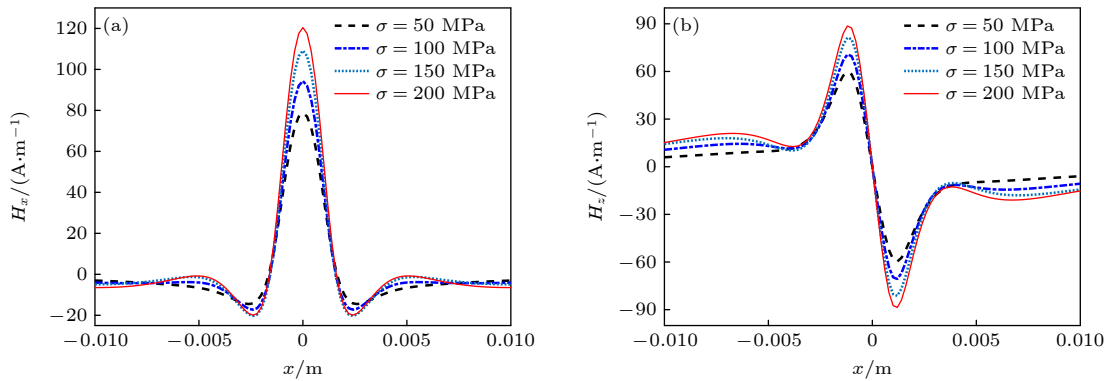


图 11 应力对裂纹缺陷试件表面  $H_x$  与  $H_z$  的影响 (a) 应力对裂纹缺陷试件表面  $H_x$  的影响; (b) 应力对裂纹缺陷试件表面  $H_z$  的影响

Fig. 11. Influence of stress on  $H_x$  and  $H_z$  of the specimen with macroscopic crack defect: (a) Influence of stress on  $H_x$ ; (b) influence of stress on  $H_z$ .

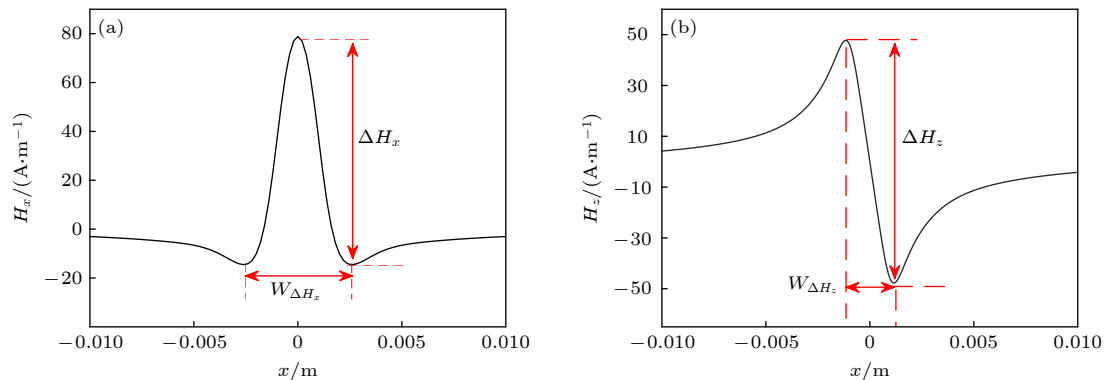


图 12 磁记忆检测信号特征参数 (a) 与磁场水平分量  $H_x$  相关的特征值; (b) 磁场法向分量  $H_z$  相关的特征值

Fig. 12. Characteristic parameters of magnetic memory detection signal: (a) Characteristic parameters of  $H_x$ ; (b) characteristic parameters of  $H_z$ .

其中,  $\Delta H_x$  表示磁场水平分量  $H_x$  缺陷中心峰值及左右缺陷两侧谷值之差;  $\Delta H_z$  表示磁场法向分量  $H_z$  缺陷左右两侧正、负峰谷值之差;  $W_{\Delta H_x}$  表示磁场水平分量  $H_x$  在缺陷左右两侧谷值之间的距离;  $W_{\Delta H_z}$  表示磁场法向分量  $H_z$  在缺陷左右两侧正、负峰谷值之间的距离.

1) 缺陷宽度对磁场分布的影响

缺陷宽度  $W_c$  分别取 0.5, 1, 1.5, 2, 3, 4, 5 和 6 mm, 缺陷长度  $L_c$  为 10 mm, 深度  $D_c$  为 2 mm, 缺陷埋深  $B_c$  为 0, 试件所受拉伸载荷为 50 MPa, 提取试件中部 -10—10 mm、距离试件表面 1 mm 高度位置处  $H_x$  和  $H_z$ , 计算各分量的特征参数, 结果如图 13 所示.

由图 13(a) 和图 13(b) 可知: 在缺陷中部, 磁场水平分量  $H_x$  曲线出现正向峰值, 随着缺陷宽度的增大,  $H_x$  曲线的异常区域变宽, 在中部出现平台区域, 且  $H_x$  的峰值呈现出先增大后减小的趋势; 而磁场法向分量  $H_z$  曲线出现正、负峰-谷值变化, 并在缺陷中心位置过零点, 随着缺陷宽度的增大,  $H_z$  异

常区域宽度和峰-谷值的幅值都逐渐增大. 由图 13(c) 可知: 当缺陷宽度小于 3 mm 时,  $\Delta H_x$  随缺陷宽度的增大而增大, 当缺陷宽度超过 3 mm 后,  $\Delta H_x$  发生反转, 小幅减小后逐渐趋于平稳; 与  $\Delta H_x$  不同,  $\Delta H_z$  则随缺陷宽度的增大呈非线性增大趋势, 且在缺陷宽度较小时, 增大的趋势更为明显, 而当缺陷宽度超过 3 mm 后,  $\Delta H_z$  增大趋势明显放缓. 由图 13(d) 可知:  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  随缺陷宽度的增大呈线性增大趋势, 不同缺陷宽度  $W_c$  下,  $W_{\Delta H_x}$  的值均比缺陷实际宽度偏大; 当缺陷宽度小于 3 mm 时,  $W_{\Delta H_z}$  的值比缺陷实际宽度偏大, 当缺陷宽度大于 3 mm 后,  $W_{\Delta H_z}$  的取值就十分接近缺陷的实际宽度.

2) 缺陷长度对磁场分布的影响

缺陷宽度  $W_c$  为 1 mm, 深度  $D_c$  为 2 mm, 缺陷长度  $L_c$  分别取 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8 和 10 mm, 试件所受拉伸载荷为 50 MPa, 提取试件中部 -10—10 mm、距离试件表面 1 mm 高度位置处  $H_x$  和  $H_z$ , 计算分量的特征参数, 结果如图 14 所示.

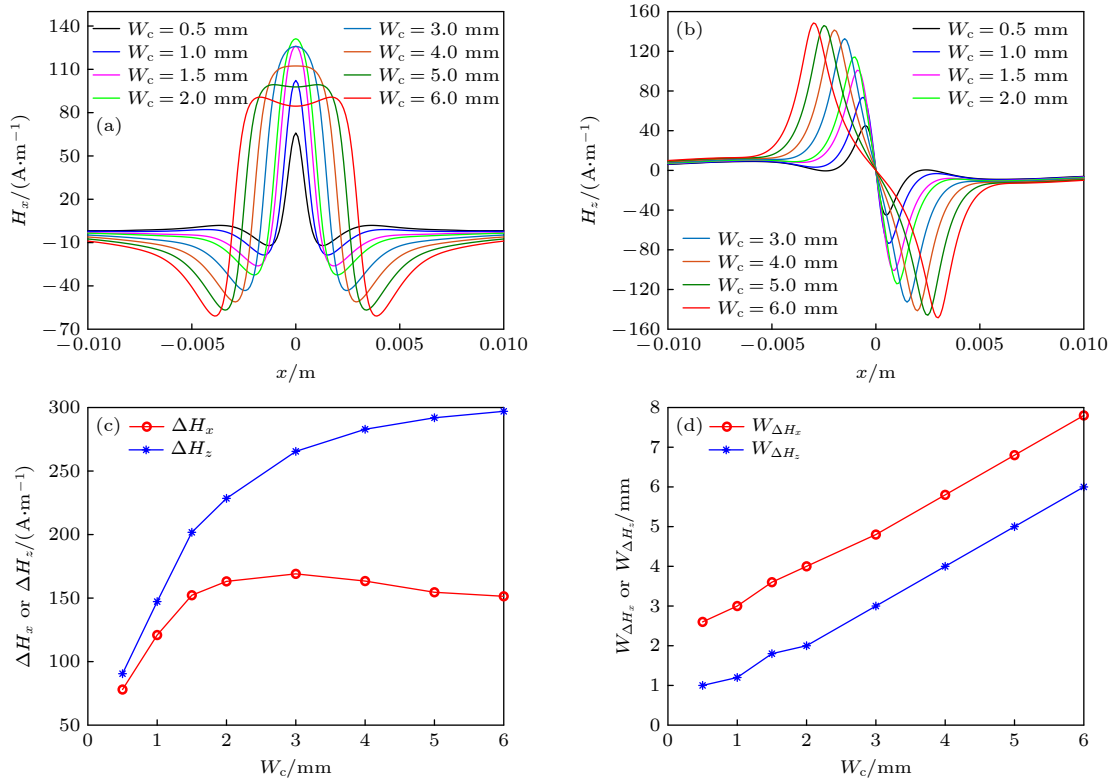


图 13 槽形缺陷宽度  $W_c$  对磁场分布的影响 (a)  $H_x$  随缺陷宽度  $W_c$  变化情况; (b)  $H_z$  随缺陷宽度  $W_c$  变化情况; (c)  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_z$  随缺陷宽度  $W_c$  变化情况; (d)  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  随缺陷宽度  $W_c$  变化情况

Fig. 13. Influence of crack defect width  $W_c$  on magnetic field distribution: (a) Variation of  $H_x$  with  $W_c$ ; (b) variation of  $H_z$  with  $W_c$ ; (c) variation of  $\Delta H_x$  and  $\Delta H_z$  with  $W_c$ ; (d) variation of  $W_{\Delta H_x}$  and  $W_{\Delta H_z}$  with  $W_c$ .

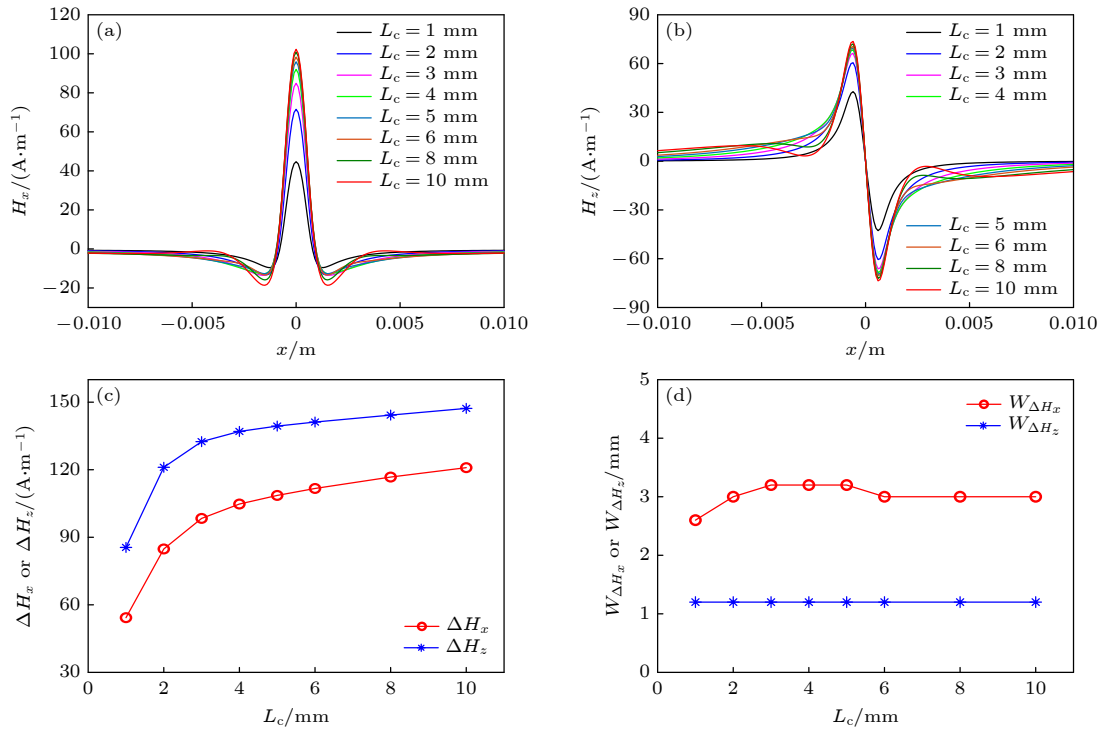


图 14 槽形缺陷长度  $L_c$  对磁场分布的影响 (a)  $H_x$  随缺陷长度  $L_c$  变化情况; (b)  $H_z$  随缺陷长度  $L_c$  变化情况; (c)  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_z$  随缺陷长度  $L_c$  变化情况; (d)  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  随缺陷长度  $L_c$  变化情况

Fig. 14. Influence of crack defect length  $L_c$  on magnetic field distribution: (a) Variation of  $H_x$  with  $L_c$ ; (b) variation of  $H_z$  with  $L_c$ ; (c) variation of  $\Delta H_x$  and  $\Delta H_z$  with  $L_c$ ; (d) variation of  $W_{\Delta H_x}$  and  $W_{\Delta H_z}$  with  $L_c$ .

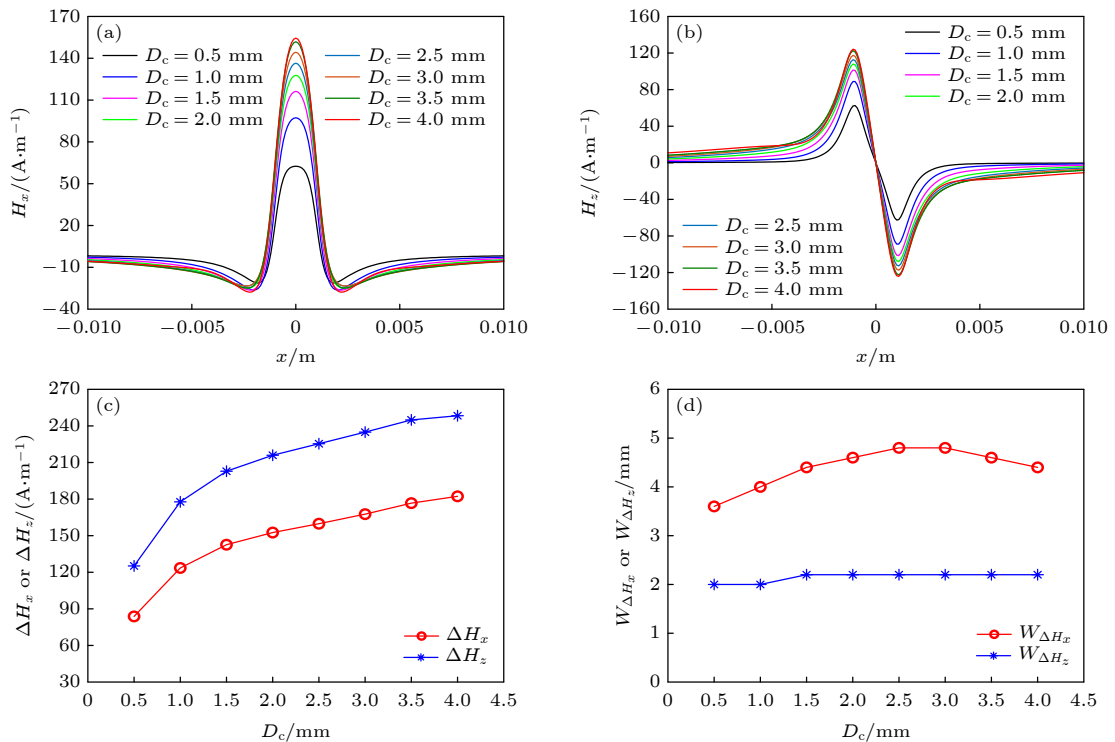


图 15 槽形缺陷深度  $D_c$  对磁场分布的影响 (a)  $H_x$  随缺陷深度  $D_c$  变化情况; (b)  $H_z$  随缺陷深度  $D_c$  变化情况; (c)  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_z$  随缺陷深度  $D_c$  变化情况; (d)  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  随缺陷深度  $D_c$  变化情况

Fig. 15. Influence of crack defect depth  $D_c$  on magnetic field distribution: (a) Variation of  $H_x$  with  $D_c$ ; (b) variation of  $H_z$  with  $D_c$ ; (c) variation of  $\Delta H_x$  and  $\Delta H_z$  with  $D_c$ ; (d) variations of  $W_{\Delta H_x}$  and  $W_{\Delta H_z}$  with  $D_c$ .

由图 14 可知: 随着缺陷长度的增大, 磁场水平分量  $H_x$  和法向分量  $H_z$  呈非线性增大趋势, 当缺陷长度  $L_c$  小于 4 mm 时,  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_z$  随缺陷长度  $L_c$  的增大快速增大, 当缺陷长度  $L_c$  超过 4 mm 后,  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_z$  的增大趋势逐渐减缓, 相同缺陷长度  $L_c$  条件下  $\Delta H_z$  幅值大于  $\Delta H_x$  幅值;  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  几乎不随缺陷长度的变化而变化, 可见缺陷长度  $L_c$  对异常区域宽度的影响较小。

### 3) 缺陷深度对磁场分布的影响

缺陷深度  $D_c$  分别取 0.5, 1, 1.5, 2, 2.5, 3, 3.5 和 4 mm,  $L_c$  为 10 mm,  $W_c$  为 2 mm, 试件厚度为 4 mm, 所受拉伸载荷为 50 MPa, 提取试件中部 -10—10 mm、距离试件表面 1 mm 高度处  $H_x$  和  $H_z$ , 计算分量特征参数, 结果如图 15 所示。

由图 15 可知: 随着缺陷深度  $D_c$  的增大, 磁场水平分量  $H_x$  和法向分量  $H_z$  幅值都呈非线性增大的趋势, 且当缺陷深度  $D_c$  较小时, 水平分量  $H_x$  的峰值区域较宽, 随着缺陷深度  $D_c$  的增大,  $H_x$  的峰值区域收窄; 同时, 随着缺陷深度  $D_c$  的增大, 磁场

水平分量  $H_x$  异常区域宽度  $W_{\Delta H_x}$  呈小幅增大, 而法向分量  $H_z$  的峰谷值间距  $W_{\Delta H_z}$  几乎不随缺陷深度  $D_c$  的变化而变化, 由此可见缺陷深度  $D_c$  对异常区域宽度的影响较小。

### 4) 缺陷埋深对磁场分布的影响

拉伸试件的厚度增加为 4 mm, 缺陷长度  $L_c$  为 10 mm, 宽度  $W_c$  为 2 mm, 缺陷深度  $D_c$  为 1 mm, 缺陷埋深  $B_c$  分别取 0, 0.5, 1, 1.5, 2 和 2.5 mm, 试件所受拉伸载荷为 50 MPa, 提取试件中部 -10—10 mm、距离试件表面 1 mm 高度位置处  $H_x$  和  $H_z$ , 并计算各分量的特征参数, 结果如图 16 所示。

由图 16 可知: 随着缺陷埋深  $B_c$  增大, 磁场水平分量  $H_x$  和法向分量  $H_z$  幅值都呈非线性减小的趋势, 当缺陷埋深  $B_c$  小于 1.5 mm 时, 随着缺陷埋深  $B_c$  的增大,  $H_x$  和  $H_z$  的峰值均迅速衰减, 当缺陷埋深  $B_c$  超过 1.5 mm 后,  $H_x$  和  $H_z$  的波峰、波谷逐渐变得不明显; 同时, 随着缺陷埋深  $B_c$  的增大, 磁场水平分量  $H_x$  和法向分量  $H_z$  异常区域宽度  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  均逐渐增大。

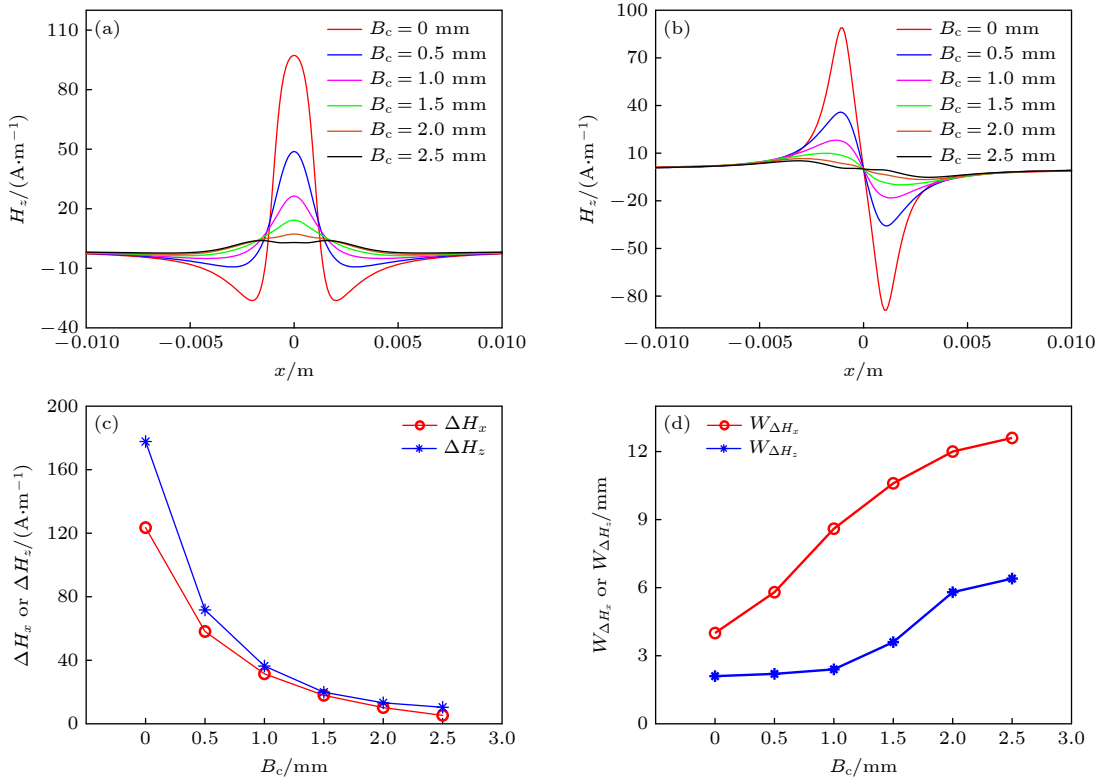


图 16 槽形缺陷埋深  $B_c$  对磁场分布的影响 (a)  $H_x$  随缺陷埋深  $B_c$  变化情况; (b)  $H_z$  随缺陷埋深  $B_c$  变化情况; (c)  $\Delta H_x$  和  $\Delta H_z$  随缺陷埋深  $B_c$  变化情况; (d)  $W_{\Delta H_x}$  和  $W_{\Delta H_z}$  随缺陷埋深  $B_c$  变化情况

Fig. 16. Influence of crack defect buried depth  $B_c$  on magnetic field distribution: (a) Variation of  $H_x$  with  $B_c$ ; (b) variation of  $H_z$  with  $B_c$ ; (c) variation of  $\Delta H_x$  and  $\Delta H_z$  with  $B_c$ ; (d) variation of  $W_{\Delta H_x}$  and  $W_{\Delta H_z}$  with  $B_c$ .

## 5 结 论

1) 针对现有磁记忆检测磁偶极子正演模型存在的问题, 本文在结合力磁耦合理论、磁荷理论和有限元方法基础上, 将试件离散为有限多个微小单元, 假设每个微小单元内部磁特征参数分布均匀, 确定了单元应力、磁化强度与磁荷密度之间的关系, 建立了能够考虑应力不均匀分布对磁荷密度分布影响的金属磁记忆检测正演模型. 通过与实验结果对比, 本文建立模型无论是定性、还是定量上都能很好预测磁记忆信号变化规律, 可为定量分析磁记忆检测过程中缺陷附近磁场变化规律提供新的理论模型.

2) 应力集中和宏观缺陷对构件表面磁场分布的影响具有显著区别: 当试件内部只存在应力集中时, 水平分量  $H_x$  在应力集中区域出现负向谷值区域, 法向分量  $H_z$  在应力集中区域出现由负到正的谷-峰值变化; 当试件出现宏观缺陷后, 磁场各分量的分布规律与只存在应力集中时的分布正好相反, 可以利用磁场信号的分布特征对试件内部的损伤类型进行判断; 此外, 当试件出现宏观缺陷后, 试件表面的磁场信号曲线形状主要取决于宏观缺陷的轮廓形状, 而应力幅值的影响相对较小.

3) 以裂纹缺陷为例, 详细讨论了裂纹缺陷宽度  $W_c$ 、长度  $L_c$ 、深度  $D_c$  和埋深  $B_c$  对磁记忆信号及其特征参量的影响规律. 结果表明:  $W_{\Delta H_x}$ ,  $W_{\Delta H_z}$  与缺陷宽度  $W_c$  之间存在较好的线性对应关系;  $\Delta H_x$ ,  $\Delta H_z$  随缺陷长度  $L_c$  和深度  $D_c$  的增大而增大;  $\Delta H_x$ ,  $\Delta H_z$  随缺陷埋深  $B_c$  的增大而逐渐减小.

## 参考文献

[1] Dubov A A 1997 *Met. Sci. Heat Treat.* **39** 401

- [2] Wang Z D, Yao K, Deng B, Ding K Q 2010 *NDT and E Int.* **43** 354
- [3] Wang Z D, Yao K, Deng B, Ding K Q 2010 *NDT and E Int.* **43** 513
- [4] Wang Q, Li S Z, Tang Z F 2011 *Nondestr. Test.* **33** 12 (in Chinese) [万强, 李思忠, 汤紫峰 2011 无损检测 **33** 12]
- [5] Leng J C, Xu M Q, Li J W 2010 *Chin. J. Mech. Eng.* **23** 532
- [6] Leng J C, Xing H Y, Zhou G Q, Gao Y T 2013 *Insight* **55** 498
- [7] Xu M X, You T Q, Xu M Q, Fan J M, Li L 2015 *J. Cent. South Univ.* **46** 1215 (in Chinese) [徐明秀, 尤天庆, 徐敏强, 樊久铭, 李立 2015 中南大学学报(自然科学版) **46** 1215]
- [8] Shi P P, Zheng X J 2016 *Nondestr. Test. Eval.* **31** 45
- [9] Shi P P, Hao S 2021 *Acta Phys. Sin.* **70** 034101 (in Chinese) [时朋朋, 郝帅 2021 物理学报 **70** 034101]
- [10] Sun L 2007 *Ph. D. Dissertation* (Lanzhou: Lanzhou University) (in Chinese) [孙乐 2007 博士学位论文(兰州: 兰州大学)]
- [11] Zhou H M 2007 *Ph. D. Dissertation* (Lanzhou: Lanzhou University) (in Chinese) [周浩森 2007 博士学位论文(兰州: 兰州大学)]
- [12] Zhou H M, Zhou Y H, Zheng X J, Ye Q, Wei J 2009 *J. Magn. Magn. Mater.* **321** 281
- [13] Shi P P 2017 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xidian University) (in Chinese) [时朋朋 2017 博士学位论文(西安: 西安电子科技大学)]
- [14] Shi P P 2020 *J. Magn. Magn. Mater.* **512** 166980
- [15] Shi P P, Jin K, Zheng X J 2016 *J. Appl. Phys.* **119** 145103
- [16] Luo X, Zhu H Y, Ding Y P 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 187501 (in Chinese) [罗旭, 朱海燕, 丁雅萍 2019 物理学报 **68** 187501]
- [17] Liu Q Y, Luo X, Zhu H Y, Liu J X, Han Y W 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 107501 (in Chinese) [刘清友, 罗旭, 朱海燕, 韩一维, 刘建勋 2017 物理学报 **66** 107501]
- [18] Zhou G H, Xiao C H, Liu S D, Gao J J 2009 *Trans. Chin. Elect. Soc.* **24** 1 (in Chinese) [周国华, 肖昌汉, 刘胜道, 高俊吉 2009 电工技术学报 **24** 1]
- [19] Sun Y 2018 *M. S. Thesis* (Xi'an: Chang'an University) (in Chinese) [孙阳 2018 硕士学位论文(西安: 长安大学)]
- [20] Zhou Y Z, Zhang G Y 2004 *Analysis and Calculation of Ship Magnetic Field* (Beijing: National Defense Industry Press) pp187-195 (in Chinese) [周耀忠, 张国友 2004 舰船磁场分析计算(北京: 国防工业出版社) 第187—195页]
- [21] Maciej R, Gawrilenko P 2008 *NDT and E Int.* **41** 507
- [22] Maciej R, Andrzej R, Michal B 2013 *Meccanica* **48** 45

# Forward model of metal magnetic memory testing based on equivalent surface magnetic charge theory\*

Luo Xu<sup>1)†</sup> Wang Li-Hong<sup>1)</sup> Lü Liang<sup>2)</sup> Cao Shu-Feng<sup>1)</sup>  
Dong Xue-Cheng<sup>1)</sup> Zhao Jian-Guo<sup>3)</sup>

1) (*School of Mechanical and Electrical Engineering, Chengdu University of Technology, Chengdu 610059, China*)

2) (*Thermal Engineering Department, Hebei Petroleum University of Technology, Chengde 067000, China*)

3) (*School of Mechatronic Engineering, Southwest Petroleum University, Chengdu 610500, China*)

( Received 24 January 2022; revised manuscript received 5 April 2022 )

## Abstract

The magnetic dipole theory has been widely and successfully used to qualitatively analyze the testing signals of metal magnetic memory (MMM) testing. However, the magnetic charge density of the existing models is always an assumed value distributed uniformly or linearly along the defect section or in a stress concentration area, as a result the existing models are unsuitable for quantitatively analyzing the metal magnetic memory signal. In this work, a new forward model of MMM testing is established by considering the influence of uneven stress on magnetic charge density distribution, discretizing the specimen into numbers of micro elements firstly, assuming that the magnetic characteristic parameters of each element are evenly distributed and the magnetic charge density changes with stress in each element which can be determined by combining the modified magneto-mechanical model and the classical theory of magnetic charges. Compared with the experimental results of hole defect and crack defect specimen, the theoretical results calculated by the proposed model prove to be in good agreement with the testing results both qualitatively and quantitatively. Consequently, the proposed model is a new theoretical and quantitative model for analyzing the experimental change rule of metal magnetic memory testing. Then, the effects of stress concentration and macroscopic defects on the distribution of magnetic field are analyzed, showing that when there is only a stress concentration in the specimen, the horizontal component is negative valley, and the normal component changes from negative to positive valley peak in the stress concentration area; when there is a crack defect in the specimen, the distribution of magnetic field is just opposite to that when there is only a stress concentration. The distribution characteristics of the magnetic field can be used to judge the damage type in the specimen. Moreover, taking crack defect for example, the horizontal and normal component of magnetic field and their characteristic parameters changing with the size parameters of crack defect, such as width, length, depth and buried depth of crack defect, are analyzed in detail. The results show that the  $W_{\Delta H_x}$  and  $W_{\Delta H_z}$  increase lineally with the increase of the width of crack,  $\Delta H_x$  and  $\Delta H_z$  increase with the increase of the length and depth of crack, but gradually decrease with the increase of defect buried depth.

**Keywords:** metal magnetic memory testing, magnetic charge theory, magneto-mechanical model, forward model

**PACS:** 41.20.Gz, 51.60.+a, 75.50.Bb, 75.80.+q

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220176

\* Project Supported by the Science and Technology Program of Sichuan Province, China (Grant Nos. 2021YFS0305, 2022YFQ0061).

† Corresponding author. E-mail: [luoxu@cdut.edu.cn](mailto:luoxu@cdut.edu.cn)