

基于  $\nu_t$  尺度方程的雷诺应力模型初步研究\*

陈彦君 王圣业† 符翔 刘伟

(国防科技大学空天科学学院, 长沙 410073)

(2022年3月8日收到; 2022年4月10日收到修改稿)

雷诺应力模型一直是湍流模式理论研究的前沿和难点, 而提高数值鲁棒性是其广泛开展工程应用的关键. 借鉴经典的  $k-kL$  湍流模型, 本文构造了一种新的  $\nu_t$  尺度方程, 并将其用于耦合 SSG/LRR 模式从而形成 SSG/LRR- $\nu_t$  雷诺应力模型. 通过零压力梯度湍流平板边界层、翼型尾迹流、超声速方腔流和 NACA0012 翼型  $45^\circ$  迎角分离流动 4 个标准算例对新模型进行了验证与确认. 同时, 为了测试模型的数值鲁棒性, 采用高精度数值格式对模型方程进行了离散求解, 并与 SA 涡粘模型和 SSG/LRR- $\omega$  雷诺应力模型进行对比. 结果表明:  $\nu_t$  尺度方程在黏性壁面边界严格为零, 相比传统的  $\omega$  尺度, 具有更好的数值鲁棒性, 从而可实现新模型与高精度数值格式的匹配并获得更好的网格收敛效率; 新模型具备雷诺应力模型的传统优势, 可对拐角流动进行很好的模拟; 具备尺度自适应能力, 对于非定常分离流动的模拟存在一定的潜力.

**关键词:** 湍流流动, 雷诺应力模型, 分离流动, 加权紧致非线性格式

**PACS:** 47.27.-i, 47.27.em, 47.27.ep, 47.11.Bc

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220417

## 1 引言

湍流是经典物理学中著名的难题, 数百年来人们一直致力于对它的研究. 其中, 湍流模式理论是人们研究湍流运动规律得到的主要成果之一, 并且依托飞速发展的计算机技术, 成为目前解决实际湍流问题的主要手段. 无论是雷诺平均模拟 (RANS), 大涡数值模拟 (LES) 还是混合 RANS/LES 模拟, 核心均是对雷诺应力张量 (或亚格子应力张量) 进行封闭建模. 这包括基于 Boussinesq 假设的线性涡粘模式, 直接建立应力输运方程的雷诺应力模式 (或亚格子应力模式) 以及其他非线性模式等<sup>[1]</sup>.

本文主要研究 RANS 方法中的雷诺应力模式 (RSM), 它由周培源先生<sup>[2,3]</sup> 首次建立起一般方程框架. RSM 相比目前广泛应用的线性涡粘模式, 在诸多方面具备优势, 如曲壁面流动、旋转/涡流动、拐角流动等<sup>[1,4,5]</sup>. 但也存在明显不足, 包括计算花

费和数值稳定性两个主要方面. 前者属于固有问题, 是需要离散求解更多的偏微分方程所导致的. 但当前随着计算机硬件水平的巨大提升, 其超出涡黏模式的计算代价已经可以接受, 且远未达到 LES 的需求水平. 而对于后者, 包括美国宇航局 (NASA)<sup>[6]</sup>、德国宇航局 (DLR)<sup>[7]</sup> 等均指出需要持续开展研究投入.

无论何种形式的 RSM, 方程中往往仍包含一个未知量, 即各向同性耗散率  $\varepsilon$ . 在物理上实质是需要提供一个标量的湍流长度尺度或时间尺度. 多年实践表明, 尺度提供方程对 RSM 的数值稳定性有非常大的影响. 例如, 早期的 RSM 往往耦合  $\varepsilon$  尺度方程求解<sup>[8]</sup>. 但与在  $k-\varepsilon$  模型中类似,  $\varepsilon$  方程存在两个问题<sup>[9]</sup>: 一是缺乏自然边界条件; 二是在壁面附近需要处理高阶关联, 易造成数值刚性问题. 这些问题使得早期的 RSM 应用效果很不理想. Wilcox<sup>[1]</sup> 发展的  $\omega$  方程是在尺度建模中里程碑式的工作, 它避免了  $\varepsilon$  方程在近壁附近的数值刚性问题. 其后

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12002379)、湖南省自然科学基金 (批准号: 2020JJ5648)、国防科技大学科研计划 (批准号: ZK20-43) 和国家专项工程 (批准号: GJXM92579) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: wangshengye13@nudt.edu.cn

Menter<sup>[10]</sup> 又进一步发展了  $\omega$  尺度方程, 通过设计过渡函数, 使得  $\omega$  尺度方程在远场也具良好表现 (过渡到类似  $\varepsilon$  模型, 减弱来流湍流敏感性). 2005 年, Eisfeld 和 Brodersen<sup>[7]</sup> 将 Menter 的  $\omega$  尺度方程用于 RSM, 提出了 SSG/LRR- $\omega$  模型. 该模型经过 10 多年的研究和改进, 在很多工程问题中取得了良好的模拟效果<sup>[11–14]</sup>.

尽管如此,  $\omega$  方程本身在理论上仍然存在一些问题. Togiti 和 Eisfeld<sup>[15]</sup> 指出  $\omega$  在壁面附近存在奇性且缺乏自然边界条件. 因此将  $g$  方程<sup>[9]</sup> ( $g = 1/\sqrt{\omega}$  在壁面边界为 0) 用于 RSM (SSG/LRR- $g$  模型), 并表明可降低对近壁区网格分辨率的依赖. 其后, Eisfeld 和 Togiti 等<sup>[14]</sup> 又将 Ilinca 和 Pelletier<sup>[16]</sup> 发展的  $\log(\omega)$  尺度变换用于 RSM (SSG/LRR- $\log(\omega)$  模型), 同样获得了明显的鲁棒性提升. Abdol-Hamid<sup>[17]</sup> 也提出了将  $kL$  尺度方程用于 RSM 的思路, 但并未深入研究. 舒博文等<sup>[18]</sup> 对 SSG/LRR- $g$  模型在多个典型航空问题中进行了应用研究, 指出了该模型预测分离问题的优秀能力. 本文作者借鉴 Rotta<sup>[19]</sup>, Menter 和 Egorov<sup>[20]</sup> 以及 Abdol-Hamid 等<sup>[21]</sup> 发展的  $k-kL$  模型, 推导了新的  $\nu_t$  尺度方程 ( $\nu_t \propto \sqrt{k}L$ ), 并用于 RSM. 该尺度方程从变量形式上看, 类似 Spalart-Allmaras (SA) 模型<sup>[22]</sup>, 在壁面边界为 0 具有更好的数值潜力. 同时相比  $g$  方程和  $\log(\omega)$  方程, 具备尺度自适应能力, 还可用于非定常分离问题的模拟.

## 2 湍流模型及数值方法

### 2.1 $\nu_t$ 尺度方程

湍流涡黏系数可以表示为湍动能  $\hat{k}$  和湍流长度尺度  $L_t$  的组合, 即  $\nu_t = C_\mu^{1/4} \sqrt{\hat{k}} L_t$ <sup>[19]</sup>. 其中  $C_\mu$  为经验系数, 通常取 0.09. 参考 Menter 和 Egorov<sup>[20]</sup> 以及 Abdol-Hamid<sup>[21]</sup> 发展的  $k-kL$  模型, 推导出  $\nu_t$  输运方程如下:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{\rho}\nu_t)}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_j\nu_t)}{\partial x_j} \\ &= \frac{\nu_t}{\hat{k}} \bar{\rho} P_{tke} \left[ C_{p1} - C_{p2} \left( \frac{L_t}{L_{vK}} \right)^2 \right] - C_\varepsilon \bar{\rho} \hat{k} \\ & \quad - 6\bar{\rho}\bar{\nu} \frac{\nu_t}{d_w^2} f_\varepsilon + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[ \bar{\rho}(\bar{\nu} + \sigma_\nu \nu_t) \frac{\partial \nu_t}{\partial x_j} \right], \quad (1) \end{aligned}$$

方程右端依次为生成项、耗散项、耗散修正项和扩

散项. “—”代表一般 Reynolds 平均量; “ $\wedge$ ”代表 Favre 平均量.  $d_w$  为网格到壁面的距离.

$L_{vK}$  为 von Karman 长度尺度, 通过下式得到:

$$L_{vK} = \frac{\kappa \sqrt{2\hat{S}_{ij}\hat{S}_{ij}}}{\sqrt{(\nabla^2\hat{u})^2 + (\nabla^2\hat{v})^2 + (\nabla^2\hat{w})^2}}. \quad (2)$$

同时, 为防止出现非物理现象, 需要对  $L_{vK}$  进行限制:  $0.1L_t < L_{vK} < 1.3\kappa d_w f_p$ . 其中, 限制函数  $f_p$  为

$$f_p = \min \left[ \max \left( \frac{P_{tke}}{C_\mu \hat{k}^2 / \nu_t}, 0.5 \right), 1.0 \right]. \quad (3)$$

耗散修正项中的经验函数  $f_\varepsilon$  由下式得到:

$$f_\varepsilon = \frac{1 + 4.7\xi}{1 + \xi^4}, \quad \xi = \frac{\sqrt{0.3\hat{k}d_w}}{20\bar{\nu}}. \quad (4)$$

其余经验系数通过丰富的湍流算例进行标定. 本文分别取  $\kappa = 0.41$ ,  $C_{p1} = 0.775$ ,  $C_{p2} = 1.47$ ,  $C_\varepsilon = 0.0478C_\mu^{1/4}$  和  $\sigma_\nu = 2/3$ . 最后需要指出,  $\nu_t$  在壁面边界为 0; 在远场或入口处根据实际的湍流黏性比赋值, 缺省值为 0.009 $\nu$ .

### 2.2 SSG/LRR- $\nu_t$ 雷诺应力模型

对 NS 方程进行 Reynolds 平均后会出现雷诺应力项. 传统线性涡黏模型, 如 SA 模型, 基于 Boussinesq 假设对雷诺应力项封闭; 而雷诺应力模型则是直接建立雷诺应力输运方程:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{R}_{ij})}{\partial t} + \frac{\partial(\bar{\rho}\hat{u}_k\hat{R}_{ij})}{\partial x_k} \\ &= \bar{\rho}P_{ij} + \bar{\rho}\Pi_{ij} - \bar{\rho}\varepsilon_{ij} + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ \bar{\rho}(\bar{\nu} + \sigma_R \nu_t) \frac{\partial \hat{R}_{ij}}{\partial x_k} \right], \quad (5) \end{aligned}$$

其中,  $\bar{\rho}\hat{R}_{ij} = -\tau_{ij} = \overline{\rho u'_i u'_j}$ . 方程右端依次为生成项、再分配项、耗散项和扩散项. 其中生成项可精确得到:

$$\bar{\rho}P_{ij} = -\bar{\rho}\hat{R}_{ik} \frac{\partial \hat{u}_j}{\partial x_k} - \bar{\rho}\hat{R}_{jk} \frac{\partial \hat{u}_i}{\partial x_k}, \quad (6)$$

其与尺度方程中生成项关系为  $P_{tke} = P_{ii}/2$ , 同时  $\hat{k} = \hat{R}_{ii}/2$ .

耗散项通过各向同性假设建模:

$$\bar{\rho}\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3}\bar{\rho}\varepsilon\delta_{ij}, \quad (7)$$

其中  $\varepsilon = C_\mu \hat{k}^2 / \nu_t + 2\bar{\nu}\hat{k}/d_w^2$ . 右端第二项为耗散修正函数, 与  $\nu_t$  尺度方程中的作用类似, 即弥补模型在近壁附近湍流耗散不足的问题.

雷诺应力模型中, 最关键的是再分配项. 本文采用 Einfeld 和 Brodersen<sup>[7]</sup> 发展的 SSG/LRR 混合模型, 即通过过渡函数  $F$  实现在近壁区使用 Launder-Reece-Rodi 模型<sup>[8]</sup>, 在远离壁面过渡到 Speziale-Sarkar-Gatski 模型<sup>[23]</sup>.

$$\begin{aligned} \bar{\rho}\Pi_{ij} = & - \left( C_1 \bar{\rho}\varepsilon + \frac{1}{2} C_1^* \bar{\rho} P_{kk} \right) \hat{a}_{ij} \\ & + C_2 \bar{\rho}\varepsilon \left( \hat{a}_{ik} \hat{a}_{kj} - \frac{1}{3} \hat{a}_{kl} \hat{a}_{kl} \delta_{ij} \right) \\ & + \left( C_3 - C_3^* \sqrt{\hat{a}_{kl} \hat{a}_{kl}} \right) \bar{\rho} \hat{k} \hat{S}_{ij}^* \\ & + C_4 \bar{\rho} \hat{k} \left( \hat{a}_{ik} \hat{S}_{jk} + \hat{a}_{jk} \hat{S}_{ik} - \frac{2}{3} \hat{a}_{kl} \hat{S}_{kl} \delta_{ij} \right) \\ & + C_5 \bar{\rho} \hat{k} (\hat{a}_{ik} \hat{W}_{jk} + \hat{a}_{jk} \hat{W}_{ik}), \end{aligned} \quad (8)$$

其中各向异性张量  $\hat{a}_{ij}$ , 应变率张量  $\hat{S}_{ij}$  和  $\hat{S}_{ij}^*$ , 以及涡量张量  $\hat{W}_{ij}$  可参考文献 [11–14]. 相关系数通过 (9) 式和表 1 获得.

表 1 再分配项系数

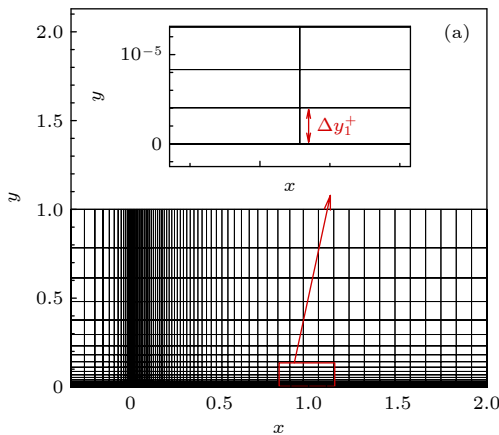
Table 1. Coefficients in redistribution item.

	$C_1$	$C_1^*$	$C_2$	$C_3$	$C_3^*$	$C_4$	$C_5$
$\phi^{(SSG)}$	1.7	0.9	1.05	0.8	0.65	0.625	0.2
$\phi^{(LRR)}$	1.8	0	0	0.8	0	0.971	0.578

$$\phi = F\phi^{(LRR)} + (1 - F)\phi^{(SSG)}. \quad (9)$$

过渡函数根据 Menter<sup>[10]</sup> 在 SST 模型中提出的  $F_2$  得到:

$$F = \tanh(\Gamma^2), \quad \Gamma = \max\left(\frac{2\nu_t}{C_\mu d_w \sqrt{\hat{k}}}, \frac{500\bar{\nu}\nu_t}{\hat{k}d_w^2}\right). \quad (10)$$



同时, 扩散项系数也通过该函数得到:  $\sigma_R = 0.5F + 0.44(1 - F) / (3C_\mu)$ .

### 2.3 高精度数值方法

本文采用团队自研的高精度 CFD 软件<sup>[4,24,25]</sup>. 该软件主要基于单元中心型有限差分格式, 包括二阶精度 MUSCL 格式、五阶和七阶 WCNS 系列高阶精度格式<sup>[26]</sup>等. 需要强调的是, 本文对 NS 方程和湍流模型方程求解采用松耦合模式, 但针对两者的空间离散精度是一致的. 换句话说, 湍流模型将同样采用高阶精度离散, 以此验证新模型的数值鲁棒性. 另一方面, 本文采用邓小刚等<sup>[27]</sup>提出的对称守恒网格导数算法 (SCMM) 计算网格导数, 以降低网格变换引入的数值误差.

## 3 计算结果

### 3.1 零压力梯度湍流平板边界层

零压力梯度湍流平板边界层是湍流模型研究中最基础的验证算例. 本节参考 NASA 湍流模型资源网站<sup>[28]</sup>中推荐的流动条件: 入口马赫数  $Ma_{inlet} = 0.2$ , 每米雷诺数  $Re_m = 5 \times 10^6$ . 通过控制第一层网格距壁面的高度  $\Delta y_1^+$ , 生成了 5 套网格. 网格轮廓见图 1(a), 其中平板长度为 2 m.

图 1(b) 给出了 SSG/LRR- $\nu_t$  模型在 5 套网格上得到的阻力系数结果. 该模型分别用二阶 MUSCL 格式和七阶 WCNS 格式进行离散求解. 同时添加了二阶和七阶精度下的 SA 模型和二阶精度下的 SSG/LRR- $\omega$  模型进行了对比. 值得一提

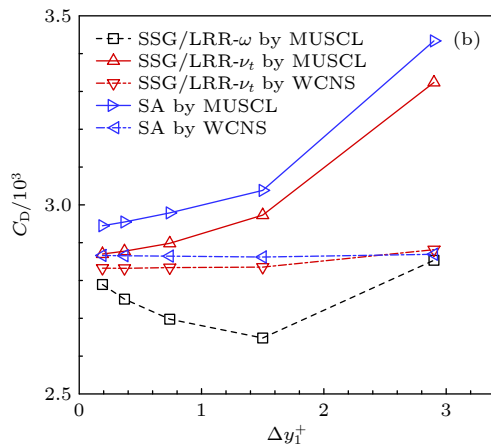


图 1 平板边界层网格收敛性分析 (a) 平板网格示意图; (b) 阻力系数结果

Fig. 1. Convergence analysis on plate boundary layer meshes: (a) Sketch of plate mesh; (b) drag coefficient results.

的是, SSG/LRR- $\omega$ 模型由于 $\omega$ 在壁面附近存在奇性,无法搭配低耗散的七阶格式进行稳定的计算.而 $\nu_t$ 尺度在壁面边界严格为零,使得整个模型具有更好的鲁棒性.再搭配高精度数值格式,可实现类似SA模型的优秀网格收敛特性.

图2给出了SSG/LRR- $\nu_t$ 模型结合七阶WCNS格式在 $\Delta y_1^+ = 0.37$ 网格上的计算结果.在 $x = 0.97$ 处速度型与经典的Coles公式符合;整个平板上摩擦阻分布与经验公式符合.证明了SSG/LRR- $\nu_t$ 模型能够对最基础的湍流平板边界层进行有效模拟.

另一方面,保证 $\Delta y_1^+ < 1.0$ 的条件下重新生成4套网格,网格节点数分别为 $35 \times 25$ ,  $69 \times 49$ ,  $137 \times 97$ 和 $273 \times 193$ ,即按维度两倍加密.分别采用SA模型和SSG/LRR- $\nu_t$ 模型计算,考察前三套网格在 $x = 0.97$ 处摩擦阻力误差与网格尺度和计

算时间的关系.其中误差以各自模型采用七阶精度、在最密网格上的值为“精确值”得出(SA模型:0.00271303;SSG/LRR- $\nu_t$ 模型:0.00267997);网格尺度通过 $h = 1/\sqrt{N_x \times N_y}$ 得到, $N$ 为网格节点数;计算时间以串行计算时平均残差下降至 $10^{-8}$ 为标准统计.

图3表明,相同网格时,七阶精度格式的计算花费约为二阶格式的1.8倍,但随着网格尺度的减小,高精度格式的计算误差下降更快.所以,在达到相同误差水平的条件下,七阶格式的花费比二阶格式小,即效率更高.另一方面,相同网格时,SSG/LRR- $\nu_t$ 模型的计算花费约是SA模型的1.6倍.其花费的增加比率小于方程数的增加(前者共12个偏微分方程;后者6个),说明SSG/LRR- $\nu_t$ 模型的求解效率是良好的.

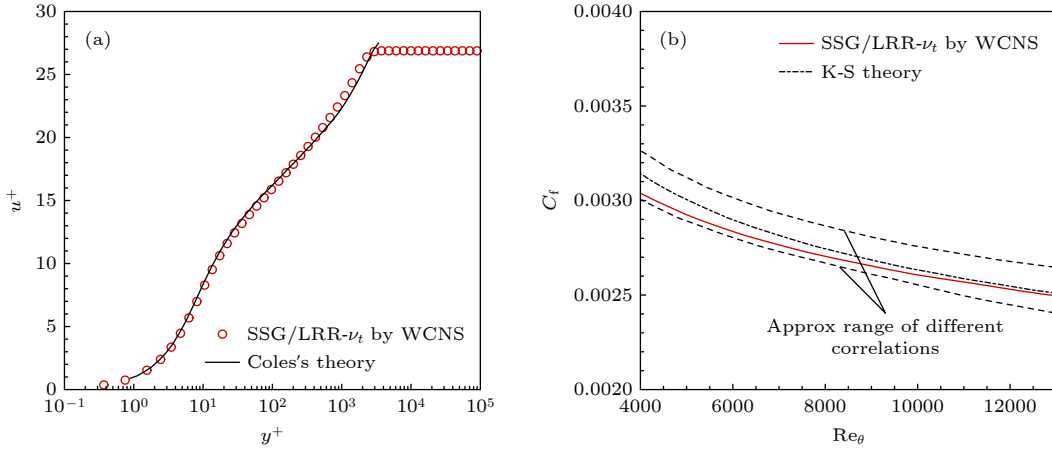


图2 SSG/LRR- $\nu_t$ 模型在 $\Delta y_1^+ = 0.37$ 网格上的结果 (a)  $x = 0.97$ 处速度型; (b) 摩擦阻力分布

Fig. 2. Results of SSG/LRR- $\nu_t$  model on grid of  $\Delta y_1^+ = 0.37$ : (a) u-velocity profile at  $x = 0.97$ ; (b) friction drag coefficient along the plate.

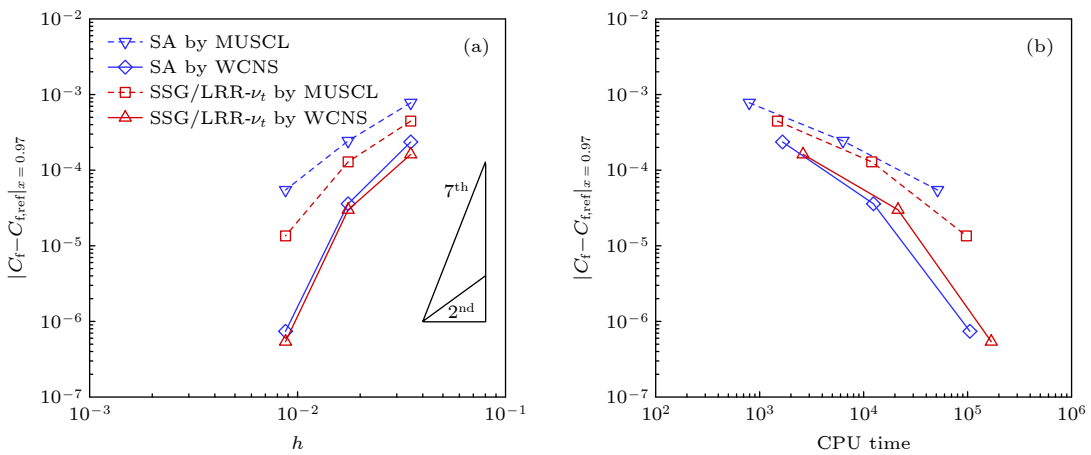


图3  $x = 0.97$ 处摩擦阻力误差与网格尺度和计算时间的关系 (a) 误差与网格尺度; (b) 误差与计算时间

Fig. 3. Relationship between friction drag error at  $x = 0.97$  and grid scale as well as CPU time: (a) Error vs. grid scale; (b) error vs. CPU time.

### 3.2 翼型尾迹流

翼型尾迹流同样来自 NASA 湍流模型资源网站, 用来考核湍流模型在自由剪切流动中对雷诺应力分量的模拟准确度. 流动条件为: 来流马赫数  $Ma_\infty = 0.088$ , 基于弦长的雷诺数  $Re_c = 1.2 \times 10^6$ . 网格采用该网站提供的粗网格 (281 × 49), 如图 4 所示.

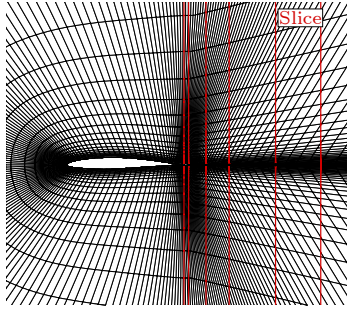


图 4 翼型尾迹流网格及切面  
Fig. 4. Airfoil wake mesh and slices.

图 5 给出了图 4 所示切面上雷诺切应力分布. 与平板算例类似, 采用七阶 WCNS 离散, 仅在粗网格上即可实现较好的模拟效果. 证明了高精度离散对于湍流量的预测同样有意义. SSG/LRR- $\nu_t$  模型由于更好的数值鲁棒性, 能够成功与高精度格式结合进行求解. 而 SSG/LRR- $\omega$  模型却无法稳定求解.

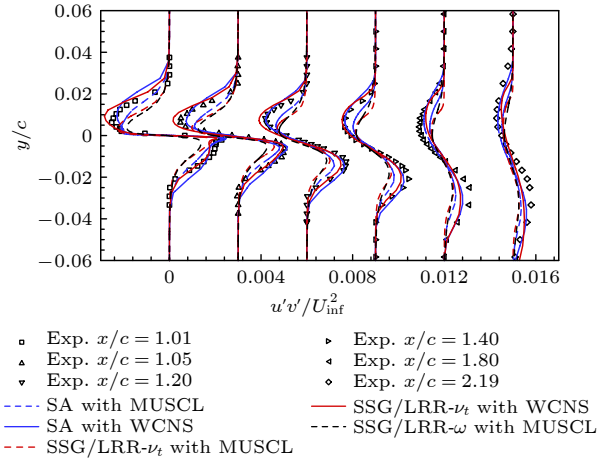


图 5 翼型尾迹流雷诺切应力分布  
Fig. 5. Reynolds shear stress distribution on airfoil wake case.

### 3.3 超声速方腔流

方腔是典型的考察拐角流动模拟能力的算例. 对于传统基于 Boussinesq 假设的湍流模型, 无法分辨雷诺正应力各向异性, 导致很难得到正确的拐角涡结构. 该算例的条件设置和网格同样参考 NASA 湍流模型资源网站. 入口马赫数  $Ma_{inlet} = 3.9$ , 基于方腔宽度的雷诺数  $Re_D = 5.08 \times 10^5$ , 方腔的宽或高  $D = 25.4$  mm. 由于方腔为对称结构, 可取四分之一部分进行计算. 网格和边界条件设置如图 6(a) 所示.

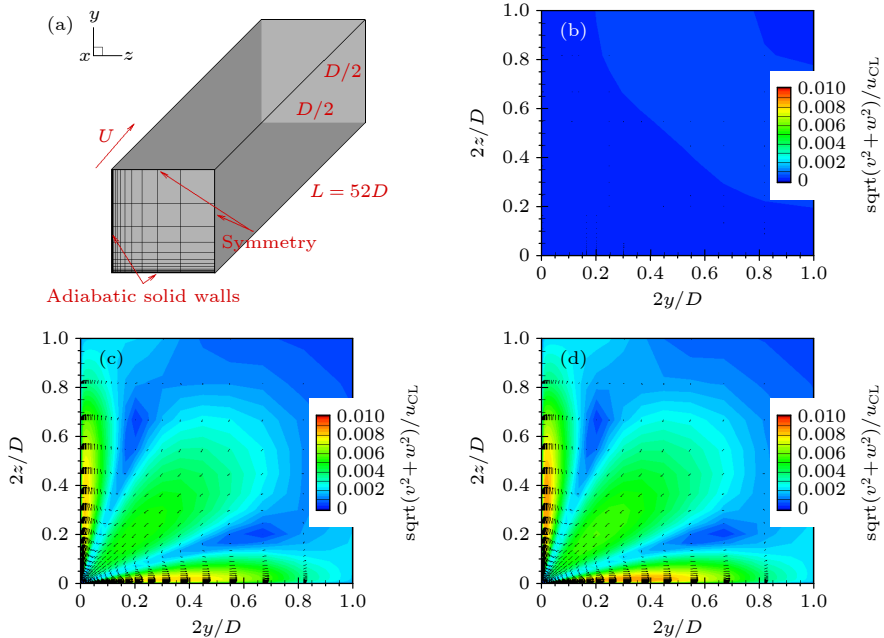


图 6 方腔流动示意图 (a) 计算网格及边界条件; (b) SA 模型在  $x/D = 50$  面上的速度矢量图; (c) SSG/LRR- $\omega$  模型在  $x/D = 50$  面上的速度矢量图; (d) SSG/LRR- $\nu_t$  模型在  $x/D = 50$  面上的速度矢量图

Fig. 6. Sketch of square duct flow: (a) Mesh and boundary conditions; (b) velocity vector distributions on  $x/D = 50$  by SA; (c) velocity vector distributions on  $x/D = 50$  by SSG/LRR- $\omega$ ; (d) velocity vector distributions on  $x/D = 50$  by SSG/LRR- $\nu_t$ .

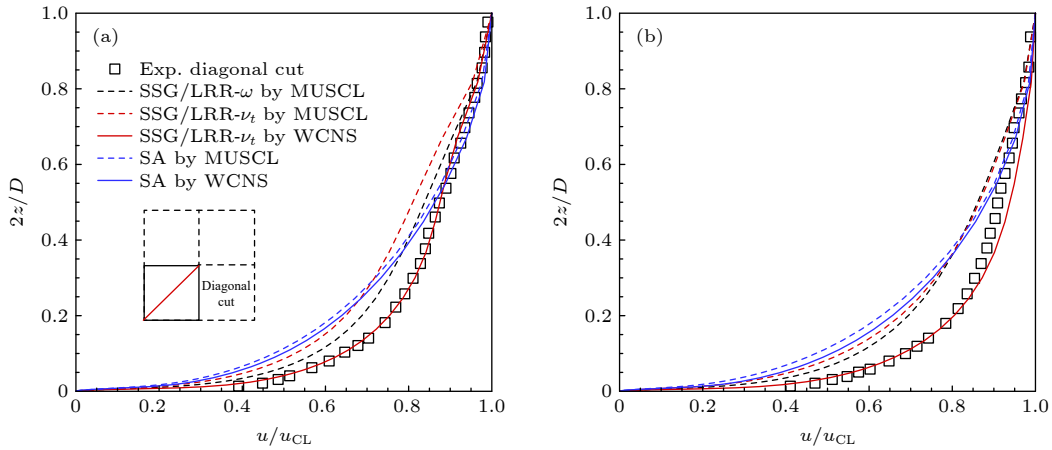


图 7 流向速度沿对角线的分布 (a)  $x/D = 40$ ; (b)  $x/D = 50$

Fig. 7. Distribution of  $u$ -velocity along diagonal: (a)  $x/D = 40$ ; (b)  $x/D = 50$ .

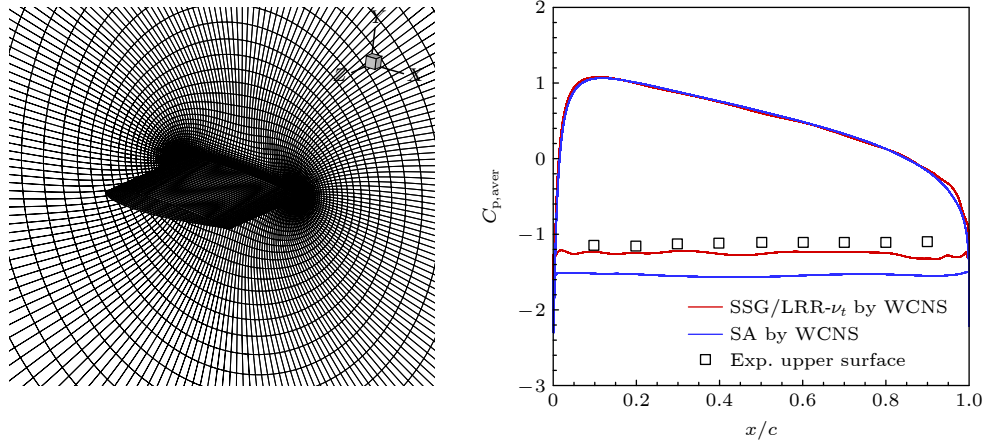


图 8 NACA0012 翼型网格及表面压力分布对比

Fig. 8. NACA0012 airfoil mesh and comparison of surface pressure distributions.

图 6(b)–(d) 给出了三种湍流模型在  $x/D = 50$  剖面上的速度矢量图, 颜色通过横向速度大小标识. 在拐角处, 会形成一对反向旋转且对称的角涡. 对于 SA 这类的线性涡黏模型而言, 是无法有效捕捉到的. 而对于雷诺应力模型, 则天然具备优势. 本文作者发展的 SSG/LRR- $\nu_t$  模型同样继承了该特点.

图 7 给出了  $x/D = 40$  和  $50$  两个剖面上, 流向速度沿对角线的分布. 网格采用的  $241 \times 41 \times 41$  的粗网格. SSG/LRR- $\nu_t$  模型由于可以进行高精度离散, 因而获得了较好的结果. 而 SSG/LRR- $\omega$  模型则无法采用七阶 WCNS 格式稳定求解.

### 3.4 NACA0012 翼型 $45^\circ$ 迎角分离流动

最后考察非定常分离湍流问题. 算例选择  $45^\circ$  迎角的 NACA0012 翼型, 来流马赫数  $Ma_\infty = 0.5$ ,

基于弦长的雷诺数  $Re_c = 1.3 \times 10^6$ . 该算例常被用来考核像分离涡模拟 (DES) 等混合 RANS/LES 模型<sup>[29]</sup>, 而对于单纯的 RANS 模型而言具有挑战性. 图 8(a) 给出了计算网格, 参考 Strelets<sup>[29]</sup> 工作, 网格节点数为  $193 \times 103 \times 31$ , 展向长度为  $1c$ . 计算采用非定常双时间步法, 每个外迭代步推进  $0.01T$  ( $T = c/U_\infty$ ). 计算  $50T$  后开始平均统计, 一直到  $150T$  结束. 图 8(b) 对比了 SSG/LRR- $\nu_t$  和 SA 模型得到的平均压力系数分布. 可以看到: SA 模型明显高估了背风面 (上表面) 的吸力; 而 SSG/LRR- $\nu_t$  模型给出了与实验符合的结果.

图 9 分别给出了两种模型在  $100T$  时刻得到的展向涡量云图. 传统的 RANS 模型会在分离区高估涡黏性, 导致小尺度涡结构被耗散掉. 而本文提出的 SSG/LRR- $\nu_t$  模型,  $\nu_t$  尺度方程参考了  $k$ - $kL$  模型具有尺度自适应能力 ((1) 式生成项中包含

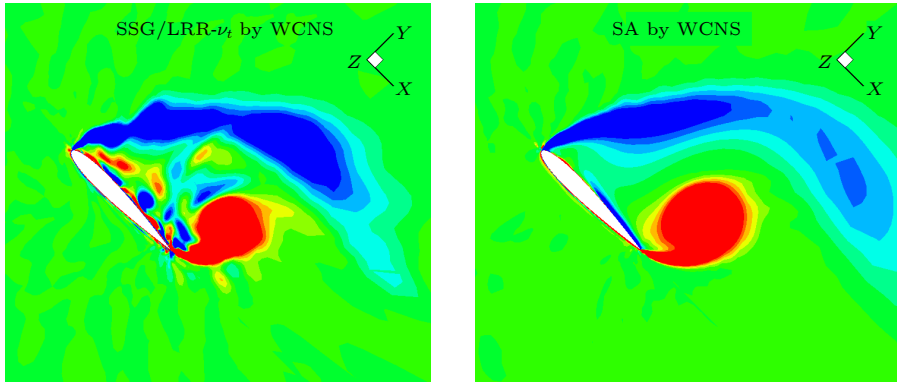


图 9 展向涡量云图

Fig. 9. Spanwise vorticity distributions.

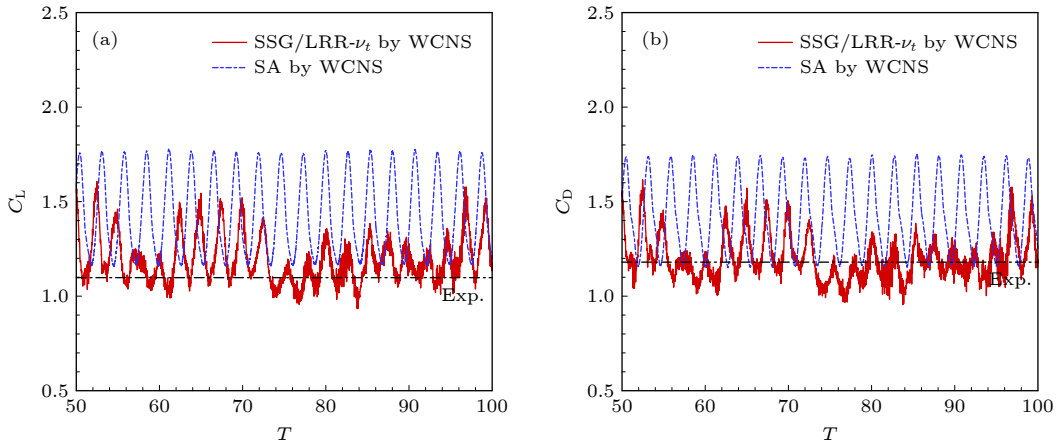


图 10 气动力随时间的变化过程 (a) 升力系数; (b) 阻力系数

Fig. 10. History of aerodynamic forces over time: (a) Lift coefficient; (b) Drag coefficient.

湍流长度尺度和 von Karman 长度尺度的比值). 因而在 WCNS 格式的配合下, 分辨出了丰富的涡结构.

上述特点反应在气动力上, 如图 10 所示. 由于 SA 模型只保留了前缘和后缘的脱体涡, 因而气动力随时间的变化类似简谐振荡, 并且偏离实验值. 而 SSG/LRR- $\nu_t$  模型得到的气动力变化更符合湍流随机性的特点, 且在实验值周围振荡.

## 4 结 论

本文参考  $k-kL$  模型推导了一种  $\nu_t$  尺度方程, 并用于耦合 SSG/LRR 模型. 形成的新型雷诺应力模型称为 SSG/LRR- $\nu_t$  模型. 该模型通过 4 个标准算例进行了初步研究. 结合高精度 WCNS 格式, 并与 SA 涡黏模型和 SSG/LRR- $\omega$  雷诺应力模型对比, 得到以下结论:

1)  $\nu_t$  尺度方程在黏性壁面具有严格为零的边

界条件, 相比传统的  $\omega$  尺度, 可减小因数值奇性带来的不稳定;

2)  $\nu_t$  尺度方程与 SA 模型类似, 在数值耗散较小的情况下仍能稳定求解. 这使得 SSG/LRR- $\nu_t$  模型能够与高精度数值格式结合, 从而获得更好的网格收敛效率;

3) SSG/LRR- $\nu_t$  模型具备雷诺应力模型的传统优势, 可对拐角流动进行很好的模拟;

4) SSG/LRR- $\nu_t$  模型具备尺度自适应能力, 对于非定常分离流动的模拟存在一定的潜力.

本文对 SSG/LRR- $\nu_t$  模型的研究尚局限在简单算例. 在今后的工作中, 还需要进行更为广泛的验证与确认, 包括阻力预测会议 (DPW) 标模、高升力预测会议 (HiLiftPW) 标模、国际涡流实验 (VFE) 标模等.

感谢中山大学航空学院王光学研究员的讨论.

## 参考文献

- [1] Wilcox D C 2006 *Turbulence Modeling for CFD* (3rd Ed.) (La Canda: DCW Industries)
- [2] Chou P Y 1940 *Chin. J. Phys.* **4** 1 (in Chinese) [周培源 1940 中国物理学报 **4** 1]
- [3] Chou P Y 1945 *Quart. Appl. Math.* **3** 38
- [4] Wang S Y, Wang G X, Dong Y D, Deng X G 2017 *Acta Phys. Sin.* **66** 184701 (in Chinese) [王圣业, 王光学, 董义道, 邓小刚 2017 物理学报 **66** 184701]
- [5] Wang S Y, Fu X, Yang X L, Zheng H B, Deng X G 2021 *Adv. Mech.* **51** 29 (in Chinese) [王圣业, 符翔, 杨小亮, 郑浩榜, 邓小刚 2021 力学进展 **51** 29]
- [6] Slotnick J, Khodadoust A, Alonso J, Darmofal D, Gropp W, Lurie E, Mavriplis D 2014 NASA/CR-2014-218178
- [7] Eisfeld B, Brodersen O 2005 *AIAA Paper* 4727
- [8] Launder B E, Reece G L, Rodi W 1975 *J. Fluid Mech.* **68** 537
- [9] Speziale C G, Abid R, Anderson E C 1992 *AIAA J.* **30** 324
- [10] Menter F R 1994 *AIAA J.* **32** 1598
- [11] Eisfeld B, Rumsey C, Togiti V 2016 *AIAA J.* **54** 1524
- [12] Cecora R D, Radespiel R, Eisfeld B, Probst A 2015 *AIAA J.* **53** 739
- [13] Wang S Y, Dong Y D, Deng X G, et al. 2018 *J. Aircraft* **53** 1177
- [14] Eisfeld B, Rumsey C, Togiti V, Braun S, Stürmer A 2021 *AIAA J.* Published online
- [15] Togiti V K, Eisfeld B 2015 *AIAA Paper* 2925
- [16] Ilinca F, Pelletier D 1998 *AIAA J.* **32** 44
- [17] Abdol-Hamid K S 2019 *AIAA Paper* 1878
- [18] Shu B W, Du Y M, Gao Z H, Xia L, Chen S S 2022 *Acta Aeronautica et Astronautica Sinica* **43** 126385 (in Chinese) [舒博文, 杜一鸣, 高正红, 夏露, 陈树生 2022 航空学报 **43** 126385]
- [19] Rotta J C 1968 *Aerodynamische Versuchsanstalt Göttingen, Rep.* **69** A14
- [20] Menter F R, Egorov Y 2010 *Flow, Turbulence, and Combustion* **85** 113
- [21] Abdol-Hamid K S, Carlson J R, Rumsey C L 2016 *AIAA Paper* 3941
- [22] Spalart P R, Allmaras S R 1994 *Recherche Aerospaciale* **1** 5
- [23] Speziale C G, Sarkar S, Gatski T B 1991 *J. Fluid Mech.* **227** 245
- [24] Wang G X, Wang S Y, Ge M M, Deng X G 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 194701 (in Chinese) [王光学, 王圣业, 葛明明, 邓小刚 2018 物理学报 **67** 194701]
- [25] Li H, Liu W, Wang S Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 144702 (in Chinese) [李昊, 刘伟, 王圣业 2020 物理学报 **69** 144702]
- [26] Deng X G, Zhang H X 2000 *J. Comput. Phys.* **165** 90
- [27] Deng X G, Min Y B, Mao M L, Liu H Y, Tu G H, Zhang H X 2013 *J. Comput. Phys.* **239** 90
- [28] Rumsey C *Turbulence Modeling Resource* <https://turbmodels.larc.nasa.gov/>
- [29] Strelets M 2001 *AIAA Paper* 0879

# Preliminary study on Reynolds stress model based on $\nu_t$ -scale equation\*

Chen Yan-Jun    Wang Sheng-Ye<sup>†</sup>    Fu Xiang    Liu Wei

(*College of Aerospace Science and Engineering, National University of Defense Technology, Changsha 410073, China*)

( Received 8 March 2022; revised manuscript received 10 April 2022 )

## Abstract

Reynolds stress model has always been the frontier and challenging problem in turbulence model theory research, where improving numerical robustness is the key to its wide application in engineering. Referring to the classical  $k$ - $kL$  turbulence model, a new  $\nu_t$ -scale equation is constructed and used to couple the SSG/LRR model to form a so-called SSG/LRR- $\nu_t$  Reynolds stress model. Four benchmark cases, including zero pressure gradient turbulent plate boundary layer, airfoil wake flow, supersonic square duct flow and separated flow over NACA0012 airfoil at 45 degree angle of attack, are carried out to test the new turbulence model. At the same time, high-order numerical schemes are used to discretize the turbulence equations in order to assess its numerical robustness. The results are compared with those of SA eddy viscosity model and SSG/LRR- $\omega$  Reynolds stress model. It is shown that the  $\nu_t$ -scale equation is strictly equal to zero at the viscous wall boundary. Compared with the traditional  $\omega$ -scale, it has better numerical robustness. Along with this, the new model can be matched with the high-order numerical schemes and obtain a better efficiency in the mesh convergence. Moreover, the new model has the inherent advantage of Reynolds stress model in simulating the corner flow and has the potential in scale adaptive simulation of unsteady separated flow.

**Keywords:** turbulence flow, Reynolds stress model, separated flow, weighted compact nonlinear scheme

**PACS:** 47.27.-i, 47.27.em, 47.27.ep, 47.11.Bc

**DOI:** [10.7498/aps.71.20220417](https://doi.org/10.7498/aps.71.20220417)

---

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12002379), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant No. 2020JJ5648), the Scientific Research Project of National University of Defence Technology, China (Grant No. ZK20-43), and the National Key Project of China (Grant No. GJXM92579).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [wangshengye13@nudt.edu.cn](mailto:wangshengye13@nudt.edu.cn)



## 基于 $\nu_t$ 尺度方程的雷诺应力模型初步研究

陈彦君 王圣业 符翔 刘伟

### Preliminary study on Reynolds stress model based on $\nu_t$ -scale equation

Chen Yan-Jun Wang Sheng-Ye Fu Xiang Liu Wei

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 164701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220417

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220417>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 针对典型分离流动数值模拟的自适应耗散调节方法

A method of adaptively adjusting dissipation for the simulation of separated flow

物理学报. 2020, 69(14): 144702 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200102>

#### 基于转捩模型及声比拟方法的高精度圆柱分离涡/涡致噪声模拟

High-order delay detached-eddy simulations of cylindrical separated vortex/vortex induced noise based on transition model and acoustic analogy

物理学报. 2018, 67(19): 194701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172677>

#### 基于深度残差网络的高精度自然转捩模拟方法

High-order natural transition simulation method based on deep residual network

物理学报. 2020, 69(20): 204701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200563>

#### 横向磁场作用下Taylor-Couette湍流流动的大涡模拟

Large eddy simulation of Taylor-Couette turbulent flow under transverse magnetic field

物理学报. 2021, 70(18): 184702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210389>

#### 高雷诺数双螺旋涡尾迹演化特性分析

Evolution characteristic analysis of double-helical vortex wake of high Reynolds number flow

物理学报. 2018, 67(5): 054701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171291>

#### 高速跟驰交通流动力学模型研究

Dynamic model of high speed following traffic flow

物理学报. 2020, 69(6): 064501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191251>