

# 基于 CHSH 不等式几何解释的“X”态量子非局域关联检验\*

曾柏云 辜鹏宇 胡强 贾欣燕 樊代和<sup>†</sup>

(西南交通大学物理科学与技术学院, 成都 610031)

(2022 年 3 月 13 日收到; 2022 年 4 月 12 日收到修改稿)

量子非局域关联现象是量子理论区别于经典理论的重要特征之一。“X”态作为一种典型的量子混合态, 基于其进行的量子非局域关联的检验研究, 不论对验证量子理论的正确性, 还是在量子信息论的应用领域研究, 都具有重要的意义. 本文在基于传统 Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) 不等式进行量子非局域关联检验的基础上, 提出了一种基于“X”态几何解释的量子非局域关联检验策略. 利用“X”态的几何解释策略, 可使物理图像更为直观地研究检验时最优化测量基选取, 以及可获得的最大 CHSH 不等式检验值等. 最后给出了基于 CHSH 不等式几何解释策略, “X”态成功进行量子非局域关联检验的参数范围.

**关键词:** 量子非局域关联, X 态, CHSH 不等式, 几何解释

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Mn, 02.40.-k

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220445

## 1 引言

量子非局域关联现象最早于 1935 年由 Einstein 等<sup>[1]</sup>引入 (即所谓的 EPR 佯谬现象的提出), 其揭示了量子理论和经典局域实在论之间的尖锐矛盾. 随着量子非局域关联现象在量子信息学中的深入研究和应用, 诸如量子通信<sup>[2]</sup>和量子计算<sup>[3]</sup>等方案应运而生. 可以说, 量子非局域关联性是量子理论最基本的特性, 也是量子信息学发展的关键<sup>[4]</sup>.

为了检验量子非局域关联的存在, 1964 年, Bell<sup>[5]</sup>提出了著名的 Bell 不等式. 在 Bell 不等式的基础之上, 1969 年, Clauser 等<sup>[6]</sup>发展出了一种更适于实验验证的不等式, 即 CHSH 不等式. CHSH 不等式的经典上限为  $S_{c-max} = 2$ , 而对于量子理论, 其上限可达到  $S_{q-max} = 2\sqrt{2}$ . 因此, 通过检验 CHSH 不等式的上限值, 即可检验量子非局域关联的存在.

在 CHSH 不等式提出之后, 相关量子非局域关联的实验检验也相继展开. 如 1972 年, Freedman 和 Clauser<sup>[7]</sup>报道了对 CHSH 不等式 6 倍标准差违背的实验验证. Aspect 等<sup>[8]</sup>在 1982 年利用时变分析仪检验了 CHSH 不等式, 结果与量子力学预测一致. 尽管在 CHSH 不等式提出之后, CGLMP 不等式<sup>[9]</sup>、 $I_{nn22}$ 不等式<sup>[10]</sup>、MABK 不等式<sup>[11-13]</sup>等量子非局域关联检验方案被相继提出, 并且一些无不等式的方法, 如 GHZ 定理<sup>[14]</sup>和 Hardy 定理<sup>[15]</sup>也相继问世, 但 CHSH 不等式仍然是用来证明量子非局域关联存在的强有力工具. 在如今量子信息学的各个领域, 如量子通信、量子密钥分发和量子隐态传输等也不乏利用 CHSH 不等式检验量子非局域性的身影<sup>[16-18]</sup>.

然而, 无论是基于不等式的方法还是基于无不等式的方法, 它们在进行量子非局域关联检验时, 均存在物理图像不直观的问题. 这种不直观性体现

\* 计算物理国防科技重点实验室项目 (批准号: 6142A05180401) 和国家自然科学基金 (批准号: 12147208) 资助的课题.

<sup>†</sup> 通信作者. E-mail: dhfan@swjtu.edu.cn

在, 人们难以寻找最佳的测量基, 并且进一步加大了量子非局域检验的计算量. 针对这一问题, 2021年, Seiler等<sup>[19]</sup>提出了一种基于CHSH不等式的非最大纠缠态的几何解释方案. 该方案使用两个Bloch球和一个关联矩阵的组合, 通过直观的图像分析, 可以较为方便地找出最优的测量基策略, 最终使利用CHSH不等式的检验过程的物理图像更加直观. 并且, 这种图像解释不仅适用于纠缠纯态, 还适用于纠缠混合态.

众所周知, 由于实验过程中存在各种噪声, 以及环境退相干效应对量子态制备的影响, 使得实验制备的量子态通常为一混合态, 所以基于混合态的量子非局域关联检验就变得尤为重要. 1989年, Werner<sup>[20]</sup>构造了一种典型的混合态(即Werner态). 2002年, Zhang等<sup>[21]</sup>利用光子的自发参量下转换和受控退相干成功制备了Werner态, 这为实验检验基于混合态的量子非局域关联提供了可能. 实际上, 在量子理论中, 还存在一种典型的混合态, 由于该混合态密度矩阵的对角线和反对角线中非零元组成了一个“X”的形状, 且在常见的噪声影响下, 其演化过程仍能使密度矩阵保持为“X”型<sup>[22]</sup>, 因此也被称为“X”态.

事实上, 这种“X”态并不罕见, 它可以在各种物理环境中产生. 目前, “X”态在量子信息领域中被越来越多地利用. 如Shi等<sup>[23]</sup>利用“X”态研究了量子比特与局域退相干信道相互作用时多体纠

缠的动力学演化. Namitha和Satyanarayana<sup>[24]</sup>构造了单光子相干态和双光子相干态这两类“X”态, 并将它们作为初始态来研究马尔可夫近似下的纠缠动力学等. 2022年, Mishra等<sup>[25]</sup>研究了“X”态在马尔可夫和非马尔可夫信道中的相干性. Guo等<sup>[26]</sup>研究了任意两比特“X”态的局域量子不确定性和几何结构的突变性等.

但是, 到目前为止, 一种能够较为直观或基于图形化的、基于“X”态的量子非局域关联检验方案还未见报道. 尽管我们课题组在2020年利用Hardy定理对“X”态进行了量子非局域关联检验研究, 给出了任意“X”态能够进行量子非局域关联检验的条件和范围<sup>[27]</sup>, 但是, 该检验方案依然存在检验中物理图像不直观的问题.

基于上述原因, 在文献<sup>[19]</sup>的启发下, 本文从CHSH不等式的Bloch球描述出发, 首先给出基于几何解释的策略, 然后利用上述方法对“X”态进行了基于图形化的量子非局域关联检验研究. 并对得到的图像进行详细分析, 给出最优化检验策略. 最终给出了“X”态在不同纠缠度和不同保真度下, 成功进行量子非局域关联的条件和范围.

## 2 基于“X”态的CHSH不等式几何解释方法

考虑一“X”态作为研究对象, 其密度矩阵可以写为<sup>[22]</sup>

$$\rho = \frac{1-f}{3} \mathbf{I}_4 + \frac{4f-1}{3} |\psi\rangle\langle\psi| = \begin{pmatrix} \frac{4f-1}{3} \times \frac{1}{1+r^2} + \frac{1-f}{3} & 0 & 0 & -\frac{4f-1}{3} \times \frac{r}{1+r^2} \\ 0 & \frac{1-f}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-f}{3} & 0 \\ -\frac{4f-1}{3} \times \frac{r}{1+r^2} & 0 & 0 & \frac{4f-1}{3} \times \frac{r^2}{1+r^2} + \frac{1-f}{3} \end{pmatrix}, \quad (1)$$

其中 $|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+r^2}}(r|H\rangle_A|H\rangle_B - |V\rangle_A|V\rangle_B)$ 表示一偏振纠缠纯态,  $|H\rangle$ 和 $|V\rangle$ 分别表示水平偏振态和垂直偏振态, A和B分别表示两个子系统.  $r$  ( $0 \leq r \leq 1$ ) 值的大小决定 $|\psi\rangle$ 的纠缠度, 当 $r=0$ 时, (1)式表示一个直积态; 而当 $r=1$ 时, (1)式则表示一个最大纠缠态.  $\mathbf{I}_4$ 是一个 $4 \times 4$ 单位矩阵.  $f$  ( $1/4 \leq$

$f \leq 1$ )为保真度, 它表示“X”态与偏振纠缠纯态的相似程度, 当 $f=1/4$ 时, “X”态中将只存在噪声; 而当 $f=1$ 时, 该“X”态约化为偏振纠缠纯态.

对(1)式所示的“X”态进行量子非局域关联检验时, 关于CHSH几何解释的最优化测量基问题, 可归为研究一个椭球与一个截面相交的椭圆内接

平行四边形的周长问题. 如对“X”态的两个子系统, 可分别进行两种测量: 在 A(B) 系统中, 可用  $Q = \mathbf{q} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A$  ( $P = \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$ ),  $J = \mathbf{j} \cdot \boldsymbol{\sigma}_A$  ( $T = \mathbf{t} \cdot \boldsymbol{\sigma}_B$ ) 两个算符来表示相应的测量. 其中,  $\mathbf{q}(\mathbf{p})$  和  $\mathbf{j}(\mathbf{t})$  分别表示 A(B) 系统中的两个测量向量, 表示 A(B) 系统中两个测量基的选取方向.  $\boldsymbol{\sigma}_A$  ( $\boldsymbol{\sigma}_B$ ) 表示泡利算符, 可以是  $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$  中的任意一个.

根据 CHSH 不等式<sup>[6]</sup>, 可以将 (2) 式所示的  $S$  期望值的大小与经典理论上限  $S_{c-\max} = 2$  做比较, 当  $S > S_{c-\max}$  时, 即可说明“X”态能够被成功用于基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验.

$$S = \langle \mathbf{Q} \otimes \mathbf{P} \rangle - \langle \mathbf{Q} \otimes \mathbf{T} \rangle + \langle \mathbf{J} \otimes \mathbf{P} \rangle + \langle \mathbf{J} \otimes \mathbf{T} \rangle. \quad (2)$$

将上述对 A, B 系统的测量算符分别代入到 (2) 式, 通过计算可进一步得到 CHSH 不等式中的  $S$  表达式为

$$S = \mathbf{q} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{p} - \mathbf{t}) + \mathbf{j} \cdot \mathbf{K} \cdot (\mathbf{p} + \mathbf{t}), \quad (3)$$

其中,  $\mathbf{K} = (k_{mn})$  为一  $3 \times 3$  矩阵, 表示了 A 和 B 两个子系统之间的关联矩阵<sup>[28]</sup>, 其矩阵元可写为  $k_{mn} = \langle \psi | \boldsymbol{\sigma}_m \otimes \boldsymbol{\sigma}_n | \psi \rangle = \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_m \otimes \boldsymbol{\sigma}_n)$ , ( $m, n = x, y, z$ ).

实际上, 上述理论分析可用图 1 所示的两个 Bloch 球来进行几何分析. 即可用 A, B 系统的两个 Bloch 球中, 选取 4 个测量方向 (即  $\mathbf{j}, \mathbf{q}, \mathbf{p}$  和  $\mathbf{t}$ ) 和它们的关联矩阵  $\mathbf{K}$  来描述 (3) 式所示的期望值  $S$ .

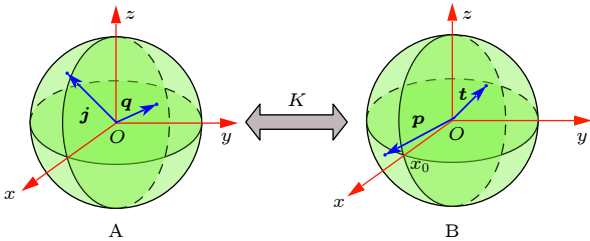


图 1 基于 CHSH 不等式的 Bloch 球表示图. 左右两个 Bloch 球分别代表 A 和 B 两个系统, 它们之间的关系由一个关联矩阵  $\mathbf{K}$  进行描述.  $\mathbf{j}$  和  $\mathbf{q}$  表示 A 系统中的两个测量方向,  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{t}$  表示 B 系统中的两个测量方向  
Fig. 1. Diagram of Bloch ball representation based on CHSH inequality. The left and right Bloch sphere represents the two sub-system A and B, respectively. The relationship between them is described by a correlation matrix  $\mathbf{K}$ .  $\mathbf{j}$  and  $\mathbf{q}$  represents the two measurement directions in system A,  $\mathbf{p}$  and  $\mathbf{t}$  represents the two measurement directions in system B.

根据泡利算符的具体表达式, 并将 (1) 式代入  $k_{mn}$  的表达式中, 即可计算得到“X”态 A, B 两个子系统之间的关联矩阵  $\mathbf{K}$  的矩阵元素为

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_x \otimes \boldsymbol{\sigma}_x) & \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_x \otimes \boldsymbol{\sigma}_y) & \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_x \otimes \boldsymbol{\sigma}_z) \\ \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y \otimes \boldsymbol{\sigma}_x) & \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y \otimes \boldsymbol{\sigma}_y) & \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_y \otimes \boldsymbol{\sigma}_z) \\ \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \boldsymbol{\sigma}_x) & \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \boldsymbol{\sigma}_y) & \text{tr}(\boldsymbol{\rho} \cdot \boldsymbol{\sigma}_z \otimes \boldsymbol{\sigma}_z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{2(4f-1)r}{3(1+r^2)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2(4f-1)r}{3(1+r^2)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4f-1}{3} \end{pmatrix}. \quad (4)$$

可以看出, 当将关联矩阵  $\mathbf{K}$  作用于 B 系统的 Bloch 球后, 将等效于如图 2 所示 Bloch 球, A 系统保持不变, 而 B 系统从球形变成一椭球形, 该椭球球面在  $x$  轴、 $y$  轴和  $z$  轴上的值将由原来的  $x_0 = y_0 = z_0 = 1$  变为  $x_1 = y_1 = |2(4f-1)r/[3(1+r^2)]|$ , 以及  $z_1 = |(4f-1)/3|$ . 同时, B 系统的向量  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{t}$  将变为新的向量  $\mathbf{p}_K = \mathbf{K} \cdot \mathbf{p}$  和  $\mathbf{t}_K = \mathbf{K} \cdot \mathbf{t}$ . 由于  $|2r/(1+r^2)| \leq 1$  (当且仅当  $r = 1$  时, 等号成立), 因此可以得到  $|(4f-1)/3| \geq |2(4f-1)r/[3(1+r^2)]|$ . 该结果说明, 经过关联矩阵  $\mathbf{K}$  作用后, B 系统的 Bloch 球面在  $z$  轴的长度将大于  $x$  轴和  $y$  轴, 如图 2 所示.

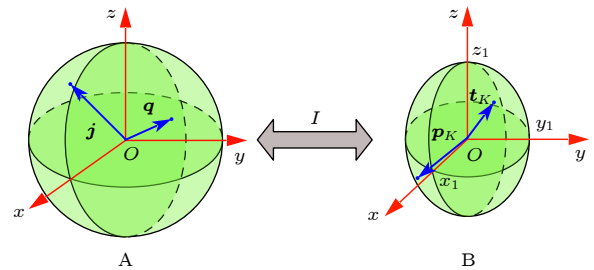


图 2 将关联矩阵  $\mathbf{K}$  作用于 B 系统后的 Bloch 球表示图. 其中 A 系统的 Bloch 球保持不变, B 系统的 Bloch 球受关联矩阵  $\mathbf{K}$  的影响而发生改变. 两系统间的关联由单位矩阵  $\mathbf{I}$  来描述  
Fig. 2. The Bloch sphere representation diagram by applying the correlation matrix  $\mathbf{K}$  to system B. The Bloch sphere of system A keep constant. The Bloch sphere of system B is changed. The correlation between two systems is described by the unit matrix  $\mathbf{I}$ .

在考虑上述等效操作后, (3) 式可以进一步写为

$$S = \mathbf{q} \cdot (\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K) + \mathbf{j} \cdot (\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K). \quad (5)$$

为了能够获得最大的  $S$  值, 接下来用几何方法, 对 (5) 式的结果做进一步分析. 在实际的量子非局域关联检验过程中, 由于 A, B 两个子系统之间的 4 个向量 (即  $\mathbf{j}$  和  $\mathbf{q}, \mathbf{p}$  和  $\mathbf{t}$ , 分别表示了选取的测量

基) 可任意选取, 因此可以通过选取最优化的向量方向来获取 (5) 式的最大值. 如考虑到向量  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{j}$  分别是子系统 A 中的单位向量, 因此可以选取向量  $\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K$  ( $\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K$ ) 和向量  $\mathbf{q}$  ( $\mathbf{j}$ ) 的方向相同, 即可将 (5) 式中的向量点乘关系, 最大化地约化到仅与向量模大小运算相关的表达式:

$$S_{\max}(\mathbf{p}_K, \mathbf{t}_K) = |\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K| + |\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K|. \quad (6)$$

为了能够进一步得到 (6) 式的最大值, 可以将图 2 所示的 Bloch 球进一步简化到一个椭圆平面进行研究. 如图 2 中, 选取过 B 系统椭球的球心  $O$ , 且包含向量  $\mathbf{p}_K$  和  $\mathbf{t}_K$  构成的平面, 与 Bloch 椭球相交, 得到一个新椭圆平面. 并以  $O$  为坐标原点, 建立新的二维坐标系  $x'-y'$ , 如图 3(a) 所示. 其中  $x'$  轴处于椭圆短轴方向,  $y'$  轴处于椭圆的长轴方向.

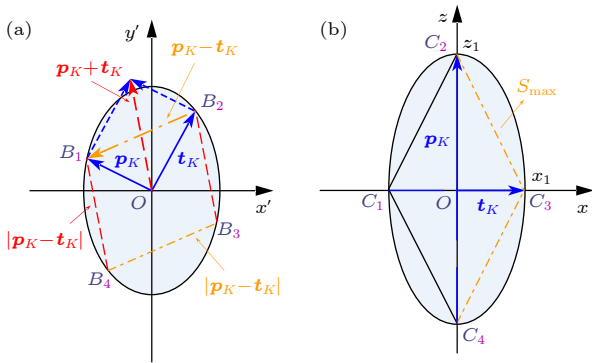


图 3 B 系统 Bloch 球退变为—椭圆平面时的表示图 (a) 向量  $\mathbf{p}_K$  在椭圆上的交点为  $B_1$ , 向量  $\mathbf{t}_K$  在椭圆上的交点是  $B_2$ , 红色虚线表示向量  $\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K$ , 橙色点划线表示向量  $\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K$ ; (b) 向量  $\mathbf{p}_K$  在椭圆上的交点是  $C_2$ , 向量  $\mathbf{t}_K$  在椭圆上的交点是  $C_3$ , 橙色点划线表示最大期望值  $S_{\max}$ .  
Fig. 3. Diagram of elliptic plane when the Bloch sphere of system B is changed: (a) The intersection of vector  $\mathbf{p}_K$  on the ellipse is  $B_1$ , the intersection of vector  $\mathbf{t}_K$  on the ellipse is  $B_2$ . The red dashed line indicates vector  $\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K$ , and the orange dotted line indicates vector  $\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K$ . (b) The intersection of vector  $\mathbf{p}_K$  on the ellipse is  $C_2$ , and the intersection of vector  $\mathbf{t}_K$  on the ellipse is  $C_3$ . The orange dotted line indicates the maximum expectation value of  $S_{\max}$ .

此时, 在图 3(a) 中, 通过将向量  $\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K$  和  $\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K$  分别平移到的  $B_3B_4$  和  $B_2B_3$  位置, 即可在椭圆平面内构成一平行四边形  $B_1B_2B_3B_4$ . 在这种情况下,  $B_1B_2$  的长度将等于向量  $|\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K|$ , 且  $B_1B_4$  的长度将等于  $|\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K|$ . 而最大量子非局域关联检验结果的研究, 将变为如何通过选取最优化的向量  $\mathbf{p}_K, \mathbf{t}_K$ , 使平行四边形  $B_1B_2B_3B_4$  周长实现最大化的几何问题.

结合上述分析得到的图 2 中 B 系统 Bloch 球  $x, y, z$  轴长度不同的特点, 再结合几何关系分析<sup>[29]</sup> 可以得出, 当  $\mathbf{t}_K$  选取为沿  $x$  轴方向,  $\mathbf{p}_K$  选取为沿  $z$  轴方向时, 平行四边形  $B_1B_2B_3B_4$  将变为图 3(b) 所示的菱形  $C_1C_2C_3C_4$ , 此时, 将获得  $|\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K| + |\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K|$  的最大值, 也即获得 CHSH 不等式  $S$  的最大值.

根据图 3(b) 的几何图形关系, 就可以非常方便地计算得到“X”态基于 CHSH 不等式的最大化量子非局域关联检验的结果为

$$S_{\max} = 2\sqrt{x_1^2 + z_1^2} = \frac{8f - 2}{3} \sqrt{1 + \left(\frac{2r}{1+r^2}\right)^2}. \quad (7)$$

此时, 只需判断  $S_{\max} > 2$  是否成立, 即可说明“X”态能否进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验研究. 同时, 进行量子非局域关联检验时的最优化测量基的选取方式也可以确定: 即选取 B 系统的两个测量方向  $\mathbf{p}$  和  $\mathbf{t}$  分别沿着 Bloch 球的  $z$  轴方向和  $x$  轴方向, 且进一步选取 A 系统中的两个测量方向  $\mathbf{q}$  和  $\mathbf{j}$ , 分别满足  $\mathbf{q} = \pm \frac{\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K}{|\mathbf{p}_K - \mathbf{t}_K|}$  和  $\mathbf{j} = \pm \frac{\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K}{|\mathbf{p}_K + \mathbf{t}_K|}$  即可.

### 3 “X”态量子非局域关联检验结果分析

利用几何分析方法得到的最大 CHSH 不等式检验结果 (7) 式 (即选取最优化的测量基时), 选取 3 个特定的保真度值 (即  $f = 0.78, f = 0.90$  以及  $f = 1$ ), 可以得到如 (1) 式所示的“X”态, 进行量子非局域关联检验时,  $S_{\max}$  随  $r$  的变化关系曲线如图 4 所示.

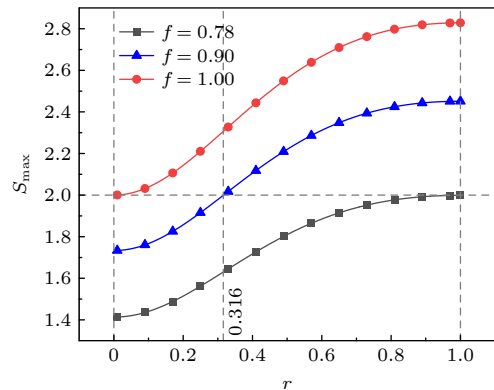


图 4 在不同保真度  $f$  下,  $S_{\max}$  随  $r$  的变化关系图  
Fig. 4. Plot of  $S_{\max}$  vs.  $r$  under different values of fidelity  $f$ .

从图 4 可以看出, 当  $f = 1$  (图中红色圆点表示, 此时“X”态约化为一偏振纠缠纯态) 且取最优化测量基的情况下, 只要  $r > 0$ , “X”态均可进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验 (即  $S_{\max} > 2$ ). 且随着  $r$  值的增大,  $S_{\max}$  的值也非线性地增大. 特别地, 当  $r = 1$  时 (最大纠缠态), 可获得  $S_{\max} = 2\sqrt{2}$ . 该结果与 Clauser 等 [6] 的研究结果完全一致, 证明了本文得到的基于几何解释的正确性.

当  $f = 0.78$  (图 4 中黑色实心框表示) 且取最优化测量基的情况下, 无论  $r$  为何值, 均将得到  $S_{\max} \leq 2$ , 说明此时的“X”态不能进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验. 而当保真度的取值位于  $0.78 < f < 1$  时, 仅有部分“X”态可成功用于基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验研究.

同理, 图 5 给出了在 3 个特定  $r$  值 (即  $r = 0$ ,  $r = 0.50$  以及  $r = 1$ ) 下, 且选取最优化测量基时,  $S_{\max}$  随保真度  $f$  的变化关系曲线.

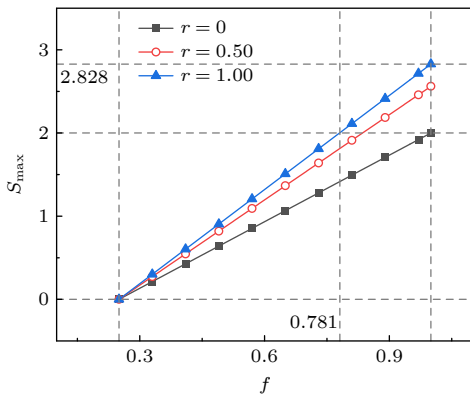


图 5 在不同  $r$  下,  $S_{\max}$  随保真度  $f$  的变化关系图  
Fig. 5. Plot of  $S_{\max}$  vs. fidelity  $f$  under different values of  $r$ .

从图 5 可以看出, 不论  $r$  取何值, 随着保真度  $f$  的增大,  $S_{\max}$  均将线性地增大. 并且随着  $r$  值的增大, 可用于成功检验量子非局域关联检验 (即  $S_{\max} > 2$ ) 的  $f$  值的范围也将增大. 为了能够清晰地表示在不同  $r$  取值范围下, “X”态能够成功进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验的保真度范围, 给出了  $f_{\min}$  随  $r$  的变化关系曲线, 如图 6 所示.

从图 6 可以看出, 随着  $r$  的增大,  $f_{\min}$  的值将非线性地减小, 这也意味着可用于进行量子非局域关联检验的“X”态的范围将非线性地增大. 特别地, 当 (1) 式所示的“X”态中  $|\psi\rangle$  为一最大偏振纠缠态时 (即  $r = 1$ ), 可用于进行量子非局域关联检验的“X”态的范围最大, 即只要保真度  $f > 0.781$  即可.

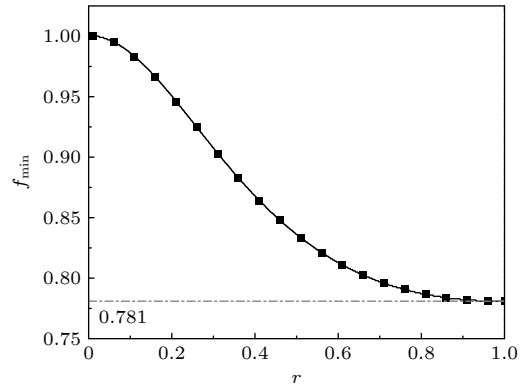


图 6  $f_{\min}$  随  $r$  的变化关系图  
Fig. 6. Plot of  $f_{\min}$  vs.  $r$ .

为了更加全面地描述“X”态在不同保真度  $f$  以及  $r$  取值时的量子非局域关联检验情况, 图 7 给出了 (1) 式所示的“X”态进行量子非局域关联检验时的最大期望值  $S_{\max}$  随  $f$  和  $r$  的变化关系. 从图 7 可以看出,  $S_{\max}$  的值随  $f$  和  $r$  值的增大均呈现出连续变化的现象. 只有在满足一定条件时, “X”态才能够成功地 (即  $S_{\max} > 2$ ) 进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验研究. 进一步, 从图 7 可以看出, 不论  $r$  取何值,  $S_{\max}$  随保真度  $f$  值的变化, 基本呈现线性变化关系; 而不论保真度  $f$  取何值,  $S_{\max}$  随  $r$  值的变化均呈现出非线性变化关系.

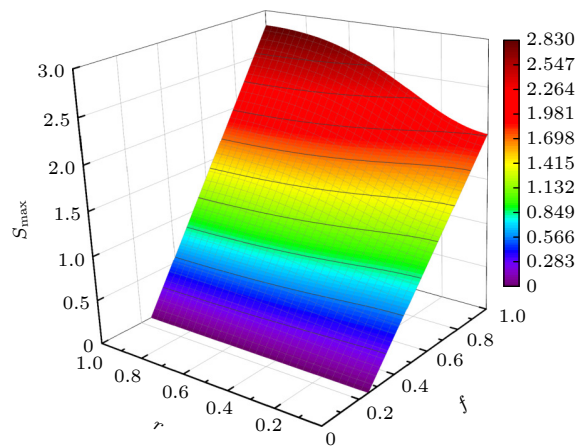


图 7  $S_{\max}$  随保真度  $f$  和  $r$  的变化关系图  
Fig. 7. Plot of  $S_{\max}$  vs. fidelity  $f$  and  $r$ .

## 4 总结

在传统基于 CHSH 不等式进行量子非局域关联检验研究的基础之上, 本文提出了一种以量子“X”态作为研究对象的几何解释策略. 从“X”态的 Bloch 球分析研究出发, 利用几何解释的方法, 分

别给出了“X”态进行基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验研究时,最优化测量基的选取策略,以及可获得的最大 CHSH 不等式检验值. 这种几何解释的方法,可进一步降低进行量子非局域关联检验时的理论计算量,同时也可使量子非局域关联检验的物理图像更为直观.

通过几何解释研究发现,当“X”态的保真度  $f = 1$  时,由于“X”态将直接约化到一偏振纠缠纯态,对其进行的量子非局域关联检验结果与传统的基于 CHSH 不等式进行检验的结果完全一致(最大 CHSH 不等式值为  $S_{\max} = 2\sqrt{2}$ ),证明了本文提出的几何解释方案的正确性. 而当  $f < 1$  时,仅有部分“X”态(即  $r$  值存在一定范围)可成功用于量子非局域关联的检验研究. 同时,研究还发现,随着  $r$  值的增大,可进一步扩大可成功进行量子非局域关联检验的保真度  $f$  值的范围. 特别地,当  $r = 1$  时,保真度  $f$  取值范围最大,即只要满足  $f > 0.781$ ,该“X”态即可成功用于基于 CHSH 不等式的量子非局域关联检验研究.

实际上,本文的研究结果在基于“X”态进行的量子非局域关联实验检验方面也具有一定的指导价值. 如可通过密度矩阵的重构操作,首先得出制备的“X”态的密度矩阵具体表达式,并进一步分析得到该“X”态的保真度  $f$  以及  $r$  参数值. 而本文的研究结果,已经较为清晰地给出了在特定  $f$  和  $r$  值的情况下,该“X”态能否成功进行量子非局域关联的实验检验研究. 如能够满足检验要求,则可进一步选取本文基于几何解释得出的最优化测量基,进行实际的实验检验.

本文提出的几何解释方案,实际上为量子态进行量子非局域关联检验的研究提供了一个物理图像较为直观的研究策略. 相信本文的研究将对后续开展基于其他方案的量子非局域关联检验研究提供参考.

## 参考文献

- [1] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [2] Chen Y A, Zhang Q, Chen T Y, et al. 2021 *Nature* **589** 214
- [3] Zhang X, Li H O, Cao G, Xiao M, Guo G C, Guo G P 2019 *Nat. Sci. Rev.* **6** 32
- [4] Horodecki R 2021 arXiv: 2103.07712 v2 [quant-ph]
- [5] Bell J S 1964 *Physics* **1** 195
- [6] Clauser J F, Horne M A, Shimony A, Holt R A 1969 *Phys. Rev. Lett.* **23** 880
- [7] Freedman S J, Clauser J F 1972 *Phys. Rev. Lett.* **28** 938
- [8] Aspect A, Dalibard J, Roger G 1982 *Phys. Rev. Lett.* **49** 1804
- [9] Collins D, Gisin N, Linden N, Massar S, Popescu S 2002 *Phys. Rev. Lett.* **88** 040404
- [10] Collins D, Gisin N 2004 *J. Math. Phys.* **37** 1775
- [11] Mermin N D 1990 *Phys. Rev. Lett.* **65** 1838
- [12] Ardehali M 1992 *Phys. Rev. A* **46** 5375
- [13] Belinskii A, Klyshko D N 1993 *Phys. Usp.* **36** 653
- [14] Greenberger D M, Horne M A, Shimony A, Zeilinger A 1990 *Am. J. Phys.* **58** 1131
- [15] Hardy L 1993 *Phys. Rev. Lett.* **71** 1665
- [16] Kim J H, Chae J W, Jeong Y C, Kim Y H 2022 *J. Korean Phys. Soc.* **80** 203
- [17] Singh J, Ghosh S, Arvind, Goyal S K 2021 *Phys. Lett. A* **392** 127158
- [18] Koga J I, Kimura G, Maeda K 2018 *Phys. Rev. A* **97** 062338
- [19] Seiler J, Strohm T, Schleich W P 2021 *Phys. Rev. A* **104** 032218
- [20] Werner R F 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4277
- [21] Zhang Y S, Huang Y F, Li C F, Guo G C 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062315
- [22] Yu T, Eberly J 2007 *Quantum Inf. Comput.* **7** 459
- [23] Shi J D, Wu T, Song X K, Ye L 2014 *Quantum Inf. Process.* **13** 1045
- [24] Namitha C, Satyanarayana S 2018 *J. Phys. B:At. Mol. Opt.* **51** 045506
- [25] Mishra S, Thapliyal K, Pathak A, Venugopalan A 2022 *Quantum Inf. Process.* **21** 1
- [26] Guo Y N, Peng H P, Zeng K, Wang G Y 2020 *Quantum Inf. Process.* **19** 1
- [27] Liu J, Miu B, Hu Q, Fan D H 2020 *J. Quantum Opt.* **26** 6 (in Chinese) [刘晋, 缪波, 胡强, 樊代和 2020 *量子光学学报* **26** 6]
- [28] Shi M J, Du J F, Zhu D P, Ruan T N 2000 *Acta Phys. Sin.* **49** 1912 (in Chinese) [石名俊, 杜江峰, 朱栋培, 阮图南 2000 *物理学报* **49** 1912]
- [29] Connes A, Zagier D 2007 *Am. Math. Mon.* **114** 909

# Quantum nonlocal test of “X” state based on geometric interpretation of CHSH inequality\*

Zeng Bai-Yun   Gu Peng-Yu   Hu Qiang   Jia Xin-Yan   Fan Dai-He †

(School of Physical Science and Technology, Southwest Jiaotong University, Chengdu 610031, China)

( Received 13 March 2022; revised manuscript received 12 April 2022 )

## Abstract

Quantum nonlocal correlation is one of the important features that distinguish the quantum theory from classical theory. As a typical quantum mixed state, the study of quantum nonlocal correlation based on the “X” state is of great importance for the verification of the correctness of quantum theory and the application of quantum information theory. In this work, with the traditional Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) inequality testing for quantum nonlocal correlations, we propose a strategy for testing the quantum nonlocal correlations based on the geometric interpretation of the “X” state. By using the geometric interpretation of the “X” state, which is described by the transform of Bloch sphere, it is possible to investigate the optimal selection of measurement settings. The maximum value of CHSH inequalities can also be obtained from the physical images. Finally, the range of parameters for a successful quantum nonlocal correlation testing based on the CHSH inequality for the “X” state is studied. The results show that when  $f = 1$ , the “X” state will be reduced to a normal pure entangled state, and the quantum nonlocal correlation testing results are in full agreement with the traditional ones. This result proves the correctness of the geometric interpretation strategy proposed in this work. When  $f < 1$ , only some of the “X” states can be used for successfully testing the quantum nonlocal correlations. It is also found that the range of fidelity values that can successfully test the quantum nonlocal correlations will be further increased by increasing the values of  $r$ . In particular, when  $r = 1$ , the range of fidelity value will reach a largest one (e.g.  $f > 0.781$ ). The results in this work can provide the reference for experimentally testing the quantum nonlocal correlation by using the “X” state.

**Keywords:** quantum nonlocal correlation, X state, CHSH inequality, geometric interpretation

**PACS:** 03.65.Ud, 03.67.Mn, 02.40.-k

**DOI:** [10.7498/aps.71.20220445](https://doi.org/10.7498/aps.71.20220445)

\* Project supported by the Key Laboratory Project of Computational Physics of National Defense Science and Technology, China (Grant No. 6142A05180401) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12147208).

† Corresponding author. E-mail: [dhfan@swjtu.edu.cn](mailto:dhfan@swjtu.edu.cn)



## 基于CHSH不等式几何解释的“X”态量子非局域关联检验

曾柏云 辜鹏宇 胡强 贾欣燕 樊代和

## Quantum nonlocal test of “X” state based on geometric interpretation of CHSH inequality

Zeng Bai-Yun Gu Peng-Yu Hu Qiang Jia Xin-Yan Fan Dai-He

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 170302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220445

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220445>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

### 您可能感兴趣的其他文章

#### Articles you may be interested in

#### 退相干条件下两比特纠缠态的量子非局域关联检验

Testing quantum nonlocality of two-qubit entangled states under decoherence

物理学报. 2022, 71(7): 070301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211453>

#### 基于Hardy-type佯谬的混合态高概率量子非局域关联检验

Testing quantum nonlocality with high probability using quantum mixed state based on hardy-type paradox

物理学报. 2019, 68(23): 230302 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191125>

#### Tavis-Cummings模型中的几何量子失协特性

Geometric quantum discord in Tavis-Cummings model

物理学报. 2018, 67(11): 110301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172699>

#### 关联退极化量子信道中qutrit-qutrit系统的量子相干性演化

Evolution of quantum coherence of qutrit-qutrit system under correlated depolarizing channels

物理学报. 2022, 71(7): 070303 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20212067>

#### 态选择电荷交换实验测量以及对天体物理软X射线发射模型的检验

Experimental measurement of state-selective charge exchange and test of astrophysics soft X-ray emission model

物理学报. 2021, 70(8): 080702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201685>

#### 基于量子算法的量子态层析新方案

A novel scheme of quantum state tomography based on quantum algorithms

物理学报. 2019, 68(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190157>