

# 旋转肥皂泡热对流能量耗散与边界层特性的数值模拟\*

贺啸秋<sup>1)2)</sup> 熊永亮<sup>1)2)†</sup> 彭泽瑞<sup>1)2)</sup> 徐顺<sup>1)2)</sup>

1) (华中科技大学航空航天学院, 武汉 430074)

2) (工程结构分析与安全评定湖北省重点实验室, 武汉 430074)

(2022年4月14日收到; 2022年8月20日收到修改稿)

将底部加热的半个肥皂泡作为一个新的热对流模型, 结合了肥皂泡固有的球面与准二维特征, 由此有助于理解行星大气流动中的复杂物理机制与热对流特性. 本文使用直接数值模拟方法计算了旋转肥皂泡上的湍流热对流, 研究了肥皂泡上的温度与黏性边界层以及拟热能和动能耗散规律. 结合肥皂泡上温度场与速度场特征, 分别根据温度脉动均方根最大值以及速度脉动边界处斜率延长线与最大值交点提出了肥皂泡上温度与黏性边界层的识别方法. 研究发现, 当肥皂泡从边界吸收能量时, 拟热能耗散与动能耗散均集中在边界层中, 肥皂泡上的温度边界层与黏性边界层厚度与瑞利数  $Ra$  存在明确的标度关系. 相比经典 Rayleigh-Bénard 对流 (RB 对流) 模型, 温度标度指数具有较为接近的结果, 但速度标度指数存在一定的差异. 此外, 在混合区, 均方根温度 ( $T^*$ ) 随纬度 ( $\theta$ ) 具有近似  $T^* \sim \theta^{0.5}$  的标度关系, 这与 RB 对流模型及其相应的理论预测一致. 最后通过能量平衡方程发现, 肥皂泡上拟热能内耗散率  $\varepsilon_T^0$  和动能内耗散率  $\varepsilon_u^0$  比拟热能外耗散率  $\varepsilon_T^1$  和动能外耗散率  $\varepsilon_u^1$  大 1 个量级, 拟热能与动能的内部耗散率在边界层中具有支配地位, 随着肥皂泡旋转速率的增加, 热羽流难以输运到高纬度地区, 进一步降低了拟热能与动能外耗散率的影响.

关键词: 肥皂泡, 湍流热对流, 能量耗散率, 边界层

PACS: 47.11.-j, 47.27.E-

DOI: 10.7498/aps.71.20220693

## 1 引言

海洋的平均深度约为数千千米, 但纵向长度可以达到数千公里; 同样, 地球大气圈的厚度只有数十公里, 但是在经度与纬度方向的尺寸达到了数千公里, 因而大尺度的海洋和大气流动具有一定的二维流动特征<sup>[1,2]</sup>. 先前的研究表明, 二维湍流可以较好地近似描述宏观大尺度的大气与海洋流动规律<sup>[2]</sup>. 类似地, 肥皂薄膜的宏观尺寸可以达到厘米量级, 但是其厚度只在微米量级, 因此流体在肥皂薄膜中的湍流运动非常好地近似了二维湍流, 与行星大气

与海洋的大尺度流动具有一定相似性<sup>[3,4]</sup>, 实验中广泛地将肥皂薄膜应用于二维湍流的研究<sup>[5]</sup>. Wu 等<sup>[6]</sup>使用肥皂薄膜研究了二维 Couette 流动, 并验证了被动标量在二维湍流中的扩散所遵守的标度率. Kellay 等<sup>[7]</sup>则使用竖直肥皂薄膜验证了二维湍流的能量逆级串规律. 近十年来, 曲面肥皂薄膜<sup>[8]</sup>也被应用于实验研究中: 底部加热的肥皂泡作为一个较独特的热对流模型受到了很多学者的关注<sup>[3,4,9,10-14]</sup>. Kellay<sup>[8]</sup>成功将半个肥皂泡长时间稳定地固定在一个水浴加热的铜制基座上. 通过旋转铜质基座, 可以实现肥皂泡绕对称轴进行旋转<sup>[13]</sup>. 肥皂泡被底座加热, 肥皂水在浮力的驱动下进行对流输运;

\* 国家自然科学基金 (批准号: 11872187, 12072125) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xylcfd@hust.edu.cn

当加热足够强时,肥皂泡上就产生了湍流热对流[9].

在实验中,肥皂泡上出现了能长时间存在的岛涡,学者发现岛涡的运动轨迹与飓风轨迹均满足超扩散关系[9].实验结果表明肥皂泡上岛涡的运动轨迹特征以及强度与随机观察的一百多个飓风的轨迹以及强度之间具有非常类似的特征[9,12],学者依据这些特征建立了快速预报飓风轨迹锥的模型[3,12].肥皂泡模型刻画了流体在二维曲面中的湍流热对流运动,同时也有助于深入了解二维湍流热对流的物理机制[4,14].现阶段,对肥皂泡大尺度特征[3,9,12]和小尺度特征[4,10,13,14]都开展了一定研究.Bruneau等[4]使用直接数值模拟(DNS)方法研究了静止肥皂泡上的湍流热对流,发现了肥皂泡上能量串级符合Bolgiano-Oberbeck的标度规律.而He等[14]使用DNS方法研究了旋转对肥皂泡上流场与温度场的影响,获得了旋转对肥皂泡上小尺度脉动的影响规律.

在三维湍流系统中,能量由大尺度注入湍流,并在惯性区间内发生能量级串,最终在Kolmogorov尺度以下被消耗殆尽[15,16].而在二维情况下,湍流中存在双向能量级串:湍流动能与拟涡能沿不同的方向传递[2].能量耗散对湍流场中的当地脉动具有重要的影响.惯性区间内的动能级串的过程中,二阶速度结构函数的标度直接受到动能耗散率 $\varepsilon_{\tilde{u}} = \tilde{\nu}(\nabla\tilde{u})^2$ 的影响[17,18],其中 $\tilde{u}$ 为速度场, $\tilde{\nu}$ 为运动黏度.在湍流热对流中,温度是主动标量,温度脉动在流体中的传播也具有级串形式[19],其标度规律与拟热能耗散率 $\varepsilon_{\tilde{T}} = \tilde{\kappa}(\nabla\tilde{T})^2$ 直接相关[20],其中 $\tilde{\kappa}$ 为热扩散系数,而 $\tilde{T}$ 为温度场.同时,能量耗散的高低对湍流热对流系统的全局热通量具有调节作用[21].于是,研究能量耗散对揭示湍流热对流的物理机制具有重要的作用.例如,经典的Rayleigh-Bénard热对流(RB对流)包含一层厚度为 $\tilde{H}$ 的流体和上下两个水平的恒温边界:下边界温度高于上边界温度,温差为 $\delta\tilde{T}$ ,热能被流体从下边界输运至上边界[22,23].RB对流的控制参数为瑞利数 $Ra$ 和普朗特数 $Pr$ :

$$Ra = \frac{\tilde{g}\tilde{\beta}\delta\tilde{T}\tilde{H}^3}{\tilde{\nu}\tilde{\kappa}}, \quad (1)$$

$$Pr = \frac{\tilde{\nu}}{\tilde{\kappa}}, \quad (2)$$

其中 $\tilde{g}$ 是重力加速度的大小, $\tilde{\beta}$ 是热膨胀系数.人们最关心 $Ra$ 与 $Pr$ 如何影响RB对流的热输运效

率[22,23].热输运效率用努塞尔特数 $Nu$ 表征,即通过这一层流体的无量纲热通量:

$$Nu = \frac{\tilde{Q}}{\tilde{\lambda}\frac{\delta\tilde{T}}{\tilde{H}}}, \quad (3)$$

其中, $\tilde{Q}$ 是通过流体的热通量, $\tilde{\lambda}$ 为流体的热传导率.另一方面,人们用雷诺数 $Re$ 描述RB对流中流体的运动状态, $Re$ 随 $Ra$ 与 $Pr$ 的变化规律也是研究的重点. $Re$ 的定义为

$$Re = \frac{\tilde{\nu}\tilde{u}_c}{\tilde{H}}, \quad (4)$$

式中 $\tilde{u}_c$ 是选取的特征速度. $Nu$ 与 $\varepsilon_{\tilde{u}}$ 和 $\varepsilon_{\tilde{T}}$ 有以下准确关系[21]:

$$\langle\varepsilon_{\tilde{u}}\rangle_V = \frac{\tilde{\nu}^3}{\tilde{H}^4}(Nu - 1)\frac{Ra}{Pr^2}, \quad (5)$$

$$\langle\varepsilon_{\tilde{T}}\rangle_V = \tilde{\kappa}\frac{\delta\tilde{T}^2}{\tilde{H}^2}Nu, \quad (6)$$

式中, $\langle\cdot\rangle_V$ 代表对流体体积求空间与时间平均.GL理论基于(5)式和(6)式推导出了 $Nu$ 与 $Re$ 随 $Ra$ 和 $Pr$ 变化的公式,并得到了大量研究的验证[24–28].GL理论认为,在湍流热对流中能量耗散通常集中在边界层.事实上,Grossmann与Lohse[24–26]在描述RB对流中的能量耗散时,将边界层中的作用与湍流体中的作用分开讨论.人们在进一步发展GL理论的过程中,将羽流的影响加入了这一物理图像,并将羽流归纳为边界层流体脱离边界而产生的运动[27,28].许多数值仿真[29,30]与实验研究[31–33]都验证了这一物理图像的正确性.最近,人们又利用区分研究边界层与湍流体中的平均能量耗散这一思想将GL理论推广至水平热对流[34]、双标量RB对流[35]、内加热对流[36]以及倾斜RB对流[37].对于以上提及的多个热对流模型,GL理论的推广理论成功得到了 $Nu$ 和 $Re$ 随 $Ra$ 和 $Pr$ 变化的规律,并被多个相互独立的实验和数值研究所验证[34–37].这说明了GL理论具有较好的通用性,GL理论所描述的物理图像在湍流热对流中广泛存在.然而,据作者所知,肥皂泡模型的研究中尚未有专门和系统的工作投入于研究能量耗散与边界层特性.所以本文希望借助GL理论提出的物理图像,对肥皂泡上热对流的能量耗散与边界层特性进行深入的研究,并分析肥皂泡旋转所带来的影响,从而对肥皂泡模型的物理特点做进一步的揭示.

由于 RB 对流简单的边界与几何特征中蕴含了热对流的本质规律, 目前对热对流的研究主要集中在经典的 RB 对流模型, 人们对 RB 对流中能量的输运与耗散做了深入细致的研究, 取得了丰富的成果<sup>[22,23]</sup>. 在经典 RB 对流模型的研究中, 旋转所带来的影响也是热点方向之一, 即所谓的旋转 Rayleigh-Bénard 对流 (RRB 对流). 旋转作用由罗斯比数的倒数  $1/Ro$  表征,  $1/Ro$  越小, 旋转作用越弱; 反之  $1/Ro$  越大, 旋转作用越强. 对于旋转速度为  $\tilde{\Omega}$  的 RRB 对流, 罗斯比数  $Ro$  的定义为

$$Ro = \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \sqrt{\frac{\tilde{g}\tilde{\beta}\tilde{\delta T}}{\tilde{R}}}. \quad (7)$$

RRB 对流中, 随着  $1/Ro$  的逐渐增加, 流场依次进入弱旋转态、中旋转态与强旋转态<sup>[38]</sup>. 在弱旋转态中, 流场中旋转的作用基本可以忽略<sup>[39]</sup>. 而当流场处于中旋转态时, 由于 Ekman 泵吸效应,  $Nu$  随着  $1/Ro$  增大而有一定程度的上升<sup>[40–43]</sup>. 在强旋转态中, 流体的运动被抑制,  $Nu$  随着  $1/Ro$  的增大而剧烈下降<sup>[44]</sup>.

在靠近上下水平边界处, 存在一层非常薄的温度边界层, RB 对流的主要热阻源于温度边界层<sup>[22]</sup>. 而 RB 对流中能量的输运与耗散均与边界层有重要的关系<sup>[29,30,33]</sup>. 在 RB 对流中, 大尺度环流 (large-scale circulation, LSC) 和角涡是两个独特的流动特征, 对  $Nu$  与  $Re$  有着重要的影响. 黄茂静和包芸<sup>[45]</sup> 利用 DNS 方法研究了二维与三维方腔在不同  $Ra$  下温度边界层的厚度变化. 她们指出由于二维与三维情况下角涡数量的不同, 导致了二者在温度分布变化上的差异, 但二维与三维流动中边界层厚度都与  $Ra$  存在明确的标度关系<sup>[45]</sup>. 在二维较高  $Ra$  ( $Ra = 10^{13}$ ) 下, 包芸等<sup>[46]</sup> 发现  $Nu$  和 LCS 受  $Ra$  的影响. 他们发现, 两者随  $Ra$  的变化规律有较强的关联性, 而 GL 理论可以部分准确地预测  $Nu$  随较高  $Ra$  的变化规律<sup>[46]</sup>. 另外, 包芸等<sup>[47]</sup> 研究了  $Ra$  较高的条件下 ( $Ra = 10^{10}$ ), 温度边界层厚度和  $Nu$  随  $Pr$  变化的规律. 其中温度边界层的厚度随  $Pr$  的变化并不明显<sup>[47]</sup>. 在较低  $Pr$  数下,  $Nu$  随  $Pr$  上升而增加; 而当  $Pr$  数较高时, 难以观察到  $Nu$  随  $Pr$  的变化<sup>[47]</sup>. Wang 等<sup>[48]</sup> 通过实验测量了准二维系统中边界层的温度脉动的空间分布规律, 并发现平均温度分布与边界层厚度存在一个普适的标度关系, 并指出边界层方程对理解边界层脉动提供了一个理论框架. 另外, Zhou 和 Xia<sup>[49]</sup> 对下边界的温度边界层进行

了高精度测量, 他们发现脉动温度均方根 (RMS) 的最大值距离下边界的距离, 是一个可以非常好的描述温度脉动统计特征的空间尺度.

LSC 与黏性边界层有着密切关系, Sun 等<sup>[50]</sup> 利用粒子图像测速 (particle image velocimetry, PIV) 方法实验测量了在大尺度环流作用下的边界层特征, 发现黏性边界层厚度随  $Re$  的标度指数是  $-0.5$ . Zhou 等<sup>[51]</sup> 也分析了温度与黏性边界层剖面曲线, 他们发现在使用适当的物理量进行缩放后, RB 对流的温度与黏性边界层剖面与经典 Prandtl-Blasius (PB) 层流边界层符合得较好. 最近, 方明卫等<sup>[52]</sup> 对温度边界层剖面曲线与 PBP (Prandtl-Blasius-Pohlhausen) 解进行了拟合, 找到了拟合参数随  $Ra$  与  $Pr$  的变化规律. 而在边界层外的混合区中, 脉动温度的均方根 (root mean square, RMS) 剖面曲线与到边界的距离满足幂律函数的形式<sup>[50]</sup>. Sun 等<sup>[50]</sup> 测量的脉动温度 RMS 曲线与 Adrian 的理论研究<sup>[53]</sup> 所预测的结果一致. 而最近的实验研究<sup>[54]</sup> 也获得了满足幂律函数形式的脉动温度 RMS 分布曲线.

对于 RB 对流的能量耗散, 学术界也取得了许多重要研究进展. 在实验研究方面, He 等<sup>[31,32]</sup> 首先成功测量出 RB 对流中空间不同位置的时间平均拟热能耗散率  $\langle \varepsilon_{\bar{T}} \rangle_t$ ,  $\langle \cdot \rangle_t$  代表求时间平均. 他们发现,  $\langle \varepsilon_{\bar{T}} \rangle_t$  在温度边界层中受平均温度的主导, 而在边界层外的湍流体中受脉动温度的主导<sup>[31,32]</sup>. Ni 等<sup>[55]</sup> 使用拉格朗日粒子追踪法直接测量了二阶速度结构函数, 并利用结构函数间接获得了当地动能耗散率  $\langle \varepsilon_{\bar{u}} \rangle_{\delta V}$ ,  $\langle \cdot \rangle_{\delta V}$  代表对空间某处局部体积  $\delta V$  求空间与时间平均. 他们发现,  $\langle \varepsilon_{\bar{u}} \rangle$  随  $Ra$  的变化可以用幂律函数进行标度<sup>[55]</sup>. 数值研究方面, Zhang 等<sup>[29]</sup> 研究了水 ( $Pr = 5.3$ ) 与空气 ( $Pr = 0.7$ ) 中, 动能耗散率  $\varepsilon_{\bar{u}}$  和拟热能耗散率  $\varepsilon_{\bar{T}}$  的统计特性、空间分布规律以及随  $Ra$  的标度关系. 而 Xu 等<sup>[30]</sup> 研究了极低  $Pr$  的条件下 ( $Pr = 0.025$ ) 拟热能耗散率  $\varepsilon_{\bar{T}}$  在湍流体与边界层中的统计特征. 他们发现尽管边界层区域较小, 但其对总的拟热能与动能耗散占到支配作用, 并建立了  $\langle \varepsilon_{\bar{T}} \rangle$  和  $\langle \varepsilon_{\bar{u}} \rangle$  与  $Ra$  的标度关系<sup>[29,30]</sup>. 在理论研究方面, Petschel 等<sup>[56]</sup> 从能量耗散的角度定义了耗散边界层, 并推广到了任意流动.

本文借助 RB 对流中所建立起的经典研究方法与物理概念, 利用 DNS 可以直接获得肥皂泡上完整的速度场和温度场信息的优势<sup>[57]</sup>, 结合肥皂

泡模型的特点, 提出了肥皂泡温度与黏性边界层厚度的定义方法: 温度边界层的厚度为脉动温度 RMS 最大值所处纬度距离赤道的大地距离; 而黏性边界层厚度为纬度方向脉动速度 RMS 曲线近赤道线性部分的延长线与其最大值的交叉纬度距离赤道的大地距离. 同时本文也对肥皂泡模型中的能量耗散与边界层特征进行分析与研究, 比较和 RB 对流模型的异同. 相比 RB 对流, 肥皂泡热对流模型中没有明显的 LSC 与角涡的存在, 且浮力强弱随着纬度而发生变化, 其球面特征还使得不同纬度上空间的热通量强度不同. 通过验证 RB 对流中物理规律是否可以用于描述肥皂泡模型的特征, 既可以促进充分认识肥皂泡模型的物理机制, 同时也检验 RB 对流模型中理论的通用性. 本文的结构如下: 第 2 节详细介绍 DNS 所使用的数学模型; 第 3 节选取了多个不同数量级的  $Ra$  和罗斯比数开展数值研究, 探索了肥皂泡上的能量运输和流场特征,  $Nu$  与  $Re$  随  $Ra$  以及  $1/Ro$  的变化规律, 同时还讨论了肥皂泡上边界层和能量耗散特征; 第 4 节进行总结分析.

## 2 DNS 数值模拟方法

### 2.1 数值模型

DNS 使用半径为  $\tilde{R}$  的二维半球面  $\mathcal{B}$  来描述肥皂泡的几何外形. 肥皂泡与基座相接触的部分为一个半径也为  $\tilde{R}$  的大圆, 在本文中被命名为赤道, 赤道上保持恒定温度  $\tilde{T}_0$ . 同时肥皂泡可在基座的带动下, 围绕对称轴进行旋转, 旋转角速度为  $\tilde{\Omega}$ , 且  $|\tilde{\Omega}| = \tilde{\Omega}$ . DNS 中的坐标系始终以相同的角速度旋转, 肥皂泡上的流体受到科里奥利力的作用. 流体从赤道吸收能量, 温度上升密度下降, 在浮力的作用下进行湍流热对流运动. 与经典的 RB 对流一样, 肥皂泡模型使用 Oberbeck-Boussinesq 近似描述密度对温度的依赖关系. 系统的特征速度被定义为自由下落速度, 即  $\tilde{u}_c = \sqrt{\tilde{g}\tilde{\beta}\tilde{T}_0\tilde{R}}$ . 利用  $\tilde{R}$ ,  $\tilde{T}_0$  和  $\tilde{u}_c$  对肥皂泡模型进行量纲一化之后, 肥皂泡上流场的控制方程为

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (8a)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \Delta \mathbf{u} + Te_g - \frac{1}{Ro} \mathbf{e}_z \times \mathbf{u} - F\mathbf{u}, \quad (8b)$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) T = \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \Delta T - ST, \quad (8c)$$

其中  $\mathbf{u}$  和  $T$  分别为量纲一的速度场与温度场. 肥皂泡控制方程的量纲一参数为  $Ra$ ,  $Pr$  和  $Ro$ , 它们的定义分别为

$$Ra = \frac{\tilde{g}\tilde{\beta}\tilde{T}_0\tilde{R}^3}{\tilde{\nu}\tilde{\kappa}}, \quad (9)$$

$$Pr = \tilde{\nu}/\tilde{\kappa}, \quad (10)$$

$$Ro = \frac{1}{2\tilde{\Omega}} \sqrt{\frac{\tilde{g}\tilde{\beta}\tilde{T}_0}{\tilde{R}}}. \quad (11)$$

$1/Ro$  的大小与转速成反比:  $1/Ro$  越大, 旋转的作用就越大.

与经典的 Rayleigh-Bénard 方程相比, 肥皂泡上流场的控制方程多了两项: 外冷却项  $-ST$  和外摩擦项  $-F\mathbf{u}$ .  $S$  和  $F$  分别为量纲一冷却系数与摩擦系数, 外冷却项与外摩擦项表征了肥皂泡模型与外部环境中冷空气产生热交换与摩擦. 当  $S = 0$  且  $F \neq 0$  时, 肥皂泡模型的能量方程和 Oberbeck-Boussinesq 方程组中的能量方程一样. 由于肥皂泡只有赤道一条恒温热边界, 能量单向通过赤道流入肥皂泡, 使肥皂泡上的温度随着时间的增加而不断增加, 这一过程为非平衡过程. 最终肥皂泡上的温度处处与赤道温度相同时, 肥皂泡停止从赤道吸收能量而达到平衡态, 此时流体失去浮力驱动形成热寂<sup>[4,14]</sup>. 冷却项使肥皂泡上的平均温度始终小于赤道温度, 在适当的  $S$  取值范围下, 可使极地平均温度在数量级上远低于赤道温度, 近似为 0. 肥皂泡的赤道与顶部的温差近似保持恒定, 使热对流在恒定的  $Ra$  下可以一直进行下去, 并使肥皂泡进入统计稳平衡态<sup>[4,14]</sup>. 而如果  $S \neq 0$  且  $F = 0$  时, 肥皂泡的 DNS 随着仿真时间步的推进而无法避免地产生爆炸<sup>[11,4,14]</sup>. 肥皂泡上的湍流热对流属于二维湍流, 存在能量逆级串的现象<sup>[11,4,14]</sup>. 能量逆级串使流体从赤道吸收的热能以羽流相互作用的方式形成大尺度的经向流<sup>[2,11]</sup>, 最终不断快速汇聚的经向动能使得 CFL 条件永远无法得到满足从而使 DNS 仿真失败<sup>[11]</sup>. 向控制方程中添加外摩擦项, 其意义在于抑制肥皂泡上大尺度流动结构的能量不受限制的积累, 使肥皂泡进入统计平衡态. 在以往的二维湍流 DNS 的研究中, 添加外摩擦项也是一种普遍采用的方法<sup>[2]</sup>. 以往的研究已经表明,  $S = F = 0.06$  及其所在的量级可以较好地模拟肥皂泡上的统计平衡热对流<sup>[4,14]</sup>, 此时北极部分的平均量纲一温度相比赤道量纲一温度

$T_0 = 1$  有多个数量级的差异, 可近似为 0. 同时本文也会对两者带来的外耗散影响进行讨论, 以验证外冷却项与外摩擦项对流动的作用不会影响系统的物理机制.

以肥皂泡的球心为原点建立量纲一三维笛卡尔坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$ ,  $x_1$  和  $x_2$  坐标轴均在赤道平面. 三个方向的基矢分别为  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  和  $\mathbf{e}_3$ .  $\mathbf{e}_3$  的方向为从原点指向肥皂泡的球顶. 肥皂泡模型的边界为赤道, 赤道上保持恒温无滑移边界条件 ( $\mathbf{u} = 0$  与  $T = 1$ ). 肥皂泡的曲面方程为

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1, \quad x_3 \geq 0, \quad (12)$$

而描述赤道的曲线方程为

$$x_1^2 + x_2^2 = 1. \quad (13)$$

量纲一三维笛卡尔坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  所对应的球坐标系为  $(r, \phi, \psi)$ :  $r$  为径向长度,  $\phi$  为方位角,  $\psi$  为极角. 球坐标系三个方向的单位基矢分别为  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\phi$  和  $\mathbf{e}_\psi$ . 为了方便描述数值计算结果, 引入地理坐标系中的经度与纬度来描述肥皂泡上任意一点的空间位置: 经度坐标与方位角定义相同, 也用  $\phi$  表示; 纬度坐标是极角  $\psi$  的余角, 用  $\theta = \pi/2 - \psi$  表示. 在赤道上纬度  $\theta$  为  $0^\circ$ , 而极角  $\psi = 90^\circ$ ; 在肥皂泡的顶点纬度  $\theta$  为  $90^\circ$ , 而极角  $\psi = 0^\circ$ . 经度方向基矢与方位角方向基矢相同, 为  $\mathbf{e}_\phi$ . 纬度方向基矢与极角方向基矢方向相反,  $\mathbf{e}_\theta = -\mathbf{e}_\psi$ .

## 2.2 数值方法

控制方程 (8) 是向量形式, 在求解时需要根据坐标系确定算符的具体形式. 由于肥皂的几何外形为二维半球曲面, 使用笛卡尔坐标系求解控制方程 (8) 需要额外的方法处理曲面, 增加了求解难度. 如果使用球坐标系求解, 众所周知, 球坐标系的 NS 方程在极点处引入了奇异性, 因而必须通过其他方式回避这一问题. 球极投影坐标系  $(x, y)$  可以解决肥皂泡曲面几何所带来的难题. 球极投影的几何关系如图 1 所示. 肥皂泡球面上任意 A 点与南极点 B 之间的连线在赤道平面上唯一相交于点 C, 通过该一一映射关系可以将球面上所有点映射在一个平面圆上. 而球极投影坐标系的原点  $x = y = 0$  也处于肥皂泡的球心.  $x$  方向与  $y$  方向分别与笛卡尔坐标系中  $x_1$  方向和  $x_2$  方向重合.

通过简单的几何关系推导, 可以得到笛卡尔坐标系  $(x_1, x_2, x_3)$  与球极投影坐标系  $(x, y)$  的变换为

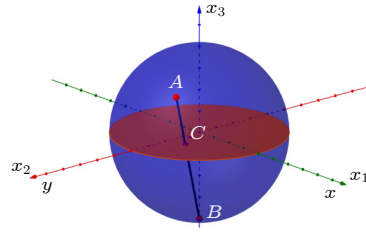


图 1 不同坐标系下的计算域与球极投影平面投影示意图  
Fig. 1. Computational domain under different coordinate system and the illustration of the stereographical projection.

$$x = x_1/(1 + x_3), \quad (14)$$

$$y = x_2/(1 + x_3). \quad (15)$$

而逆变换为

$$x_1 = 2x/(1 + x^2 + y^2), \quad (16)$$

$$x_2 = 2y/(1 + x^2 + y^2), \quad (17)$$

$$x_3 = \frac{1 - x^2 - y^2}{1 + x^2 + y^2}. \quad (18)$$

为获得球极投影坐标系中的矢量算符的具体形式, 首先需要计算球极投影坐标系的拉梅系数.  $x$  和  $y$  两个方向的拉梅系数可写为

$$\begin{aligned} L_x &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial x}\right)^2} \\ &= 2/(x^2 + y^2 + 1), \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} L_y &= \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial y}\right)^2} \\ &= 2/(x^2 + y^2 + 1). \end{aligned} \quad (20)$$

由于两个方向的拉梅系数相同, 下文定义  $L = L_x = L_y$ . 球极投影坐标系在  $x$  与  $y$  方向上的单位基矢分别是  $\mathbf{h}_x$  与  $\mathbf{h}_y$ , 分别为

$$\mathbf{h}_x = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial x_1}{\partial x} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial x} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial x} \mathbf{e}_3 \right), \quad (21)$$

$$\mathbf{h}_y = \frac{1}{L} \left( \frac{\partial x_1}{\partial y} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial x_2}{\partial y} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial x_3}{\partial y} \mathbf{e}_3 \right). \quad (22)$$

速度矢量在球极投影坐标系中可以写为

$$\mathbf{u} = u\mathbf{h}_x + v\mathbf{h}_y, \quad (23)$$

其中  $u$  和  $v$  分别为速度矢量在  $x$  和  $y$  方向的投影. 速度矢量在笛卡尔坐标系、球坐标系和地理坐标系中的各个分量为

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= u_1\mathbf{e}_1 + u_2\mathbf{e}_2 + u_3\mathbf{e}_3 \\ &= u_r\mathbf{e}_r + u_\phi\mathbf{e}_\phi + u_\psi\mathbf{e}_\psi = u_\phi\mathbf{e}_\phi + u_\theta\mathbf{e}_\theta. \end{aligned} \quad (24)$$

由于肥皂泡为二维半球面, 径向速度恒为 0:  $u_r \equiv 0$ . 而根据基矢关系可以知道,  $u_\theta = -u_\psi$ .

根据曲线坐标系中梯度算符的通式, 可以写出  $\nabla$  算符在球极投影坐标系中的形式:

$$\nabla = \frac{1}{L} \mathbf{h}_x \frac{\partial}{\partial x} + \frac{1}{L} \mathbf{h}_y \frac{\partial}{\partial y}, \quad (25)$$

而拉普拉斯算符  $\Delta$  在球极投影坐标系中为

$$\Delta = \nabla \cdot \nabla = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{1}{L^2} \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}. \quad (26)$$

拉格朗日导数为

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) = \frac{\partial}{\partial t} + \left( \frac{u}{L} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{v}{L} \frac{\partial}{\partial y} \right). \quad (27)$$

在获得以上单位基矢与算符的转换关系以后, 可以将球极投影坐标系内的算符代入到矢量形式的控制方程中, 从而获得球极投影坐标系下的控制方程. 连续性方程可以写为

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{2(xu + yv)}{x^2 + y^2 + 1}. \quad (28)$$

动量方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \left( u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) + v(xv - yu) \\ &= -\frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} T \\ & \quad - Fu + \frac{1}{Ro} \frac{4(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} v \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2}{4} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ & \quad + \frac{x^2 + y^2 + 1}{\sqrt{Ra/Pr}} \left( x \frac{\partial v}{\partial y} - y \frac{\partial v}{\partial x} \right) - \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{Ra/Pr}} u, \quad (29) \\ & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \left( u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) + u(yu - xv) \\ &= -\frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \frac{\partial p}{\partial y} - \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} T - Fv \\ & \quad - \frac{1}{Ro} \frac{4(x^2 + y^2 - 1)}{(x^2 + y^2 + 1)^2} u \\ & \quad + \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2}{4} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ & \quad + \frac{x^2 + y^2 + 1}{\sqrt{Ra/Pr}} \left( y \frac{\partial u}{\partial x} - x \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{x^2 + y^2}{Ra/Pr} v. \quad (30) \end{aligned}$$

能量方程为

$$\begin{aligned} & \frac{\partial T}{\partial t} + u \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{x^2 + y^2 + 1}{2} \frac{\partial T}{\partial y} \\ &= \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \frac{(x^2 + y^2 + 1)^2}{4} \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \right) - ST. \quad (31) \end{aligned}$$

在球极投影坐标系  $(x, y)$  中, 肥皂泡的曲面方程为  $x^2 + y^2 \leq 1$ , 是一个半径为 1 的圆. 将计算域设定为边长为 1.01 的正方形, 使用交错结构化网格来离散计算域: 温度与压强结点在网格的中心, 而速度结点位于网格边的中点. 网格结点分布如图 2 所示, 其中  $i$  和  $j$  分别为  $x$  和  $y$  方向上的结点编号.

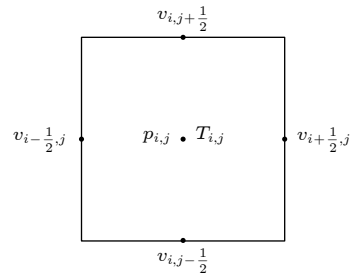


图 2 网格结点分布图

Fig. 2. Node distribution inside a grid cell.

边界条件使用惩罚法来实现, 时间离散格式为二阶 Gear 格式, 而非线性项使用三阶 Murman-like 格式来离散, 更详细的数值方法与验证可参考文献 [4,14].

### 2.3 算例设置

表 1 列出了本文肥皂泡模型 DNS 算例的全部参数信息. 由于肥皂水中肥皂的浓度很低, 其物性与水非常接近, 算例的  $Pr$  固定为 7 不变. 算例的  $Ra$  的变化范围为  $3 \times 10^6 - 3 \times 10^9$ , 小  $Ra$  下采用  $1024 \times 1024$  的数值解析度, 在最高  $Ra$  下网格分辨率达到了  $2048 \times 2048$ , 以往的研究表明这一数值解析度可以充分获得网格独立解 [4,11,14].

表 1 算例详细信息

Table 1. The detailed information of the cases.

$Ra$	$1/Ro$	$Pr$	$S$	$F$	Mesh resolution
$3 \times 10^6$	0; 0.1; 1; 10				$1024 \times 1024$
$3 \times 10^7$	0; 0.1; 1; 10				$1024 \times 1024$
$3 \times 10^8$	0; 0.1; 1; 10	7	0.06	0.06	$1536 \times 1536$
$3 \times 10^9$	0; 0.1; 1; 10				$2048 \times 2048$

## 2.4 统计稳态

在数值实验中,肥皂泡的初始状态为静止态,即  $\mathbf{u} = 0$  且  $T = 0$ . 随着计算的进行,时间步不断向前迭代,肥皂泡上的流体开始受热并运动,产生湍流热对流逐渐达到统计稳态<sup>[4,14]</sup>. 此时肥皂泡上的湍流得到了充分发展,肥皂泡吸收的能量与其耗散的能量达到了动态平衡. 在这样的条件下,流场量可以分解为平均值与脉动值之和,如温度  $T$ :

$$T = \langle T \rangle + T'. \quad (32)$$

在下文,符号  $\langle \cdot \rangle$  表示时间和经度空间平均. 肥皂泡在经度  $\phi$  方向具有旋转对称性,流场变量在统计上并不依赖经度坐标  $\phi$ . 于是,在控制参数确定的情况下,所有流场变量的平均值是纬度  $\theta$  的函数.

## 3 结果与讨论

### 3.1 瞬态流场

对所研究的不同  $Ra$  都考虑了 4 个  $1/Ro$ : 0, 0.1, 1 和 10, 以便分析旋转作用的影响. 这里首先从最直观的流场瞬时云图来展示不同  $Ra$  与不同旋转角速度  $1/Ro$  给流场带来的影响. 图 3 给出了不

同  $Ra$  与  $1/Ro$  条件下温度场  $T$  在肥皂泡上的瞬时分布云图. 当  $Ra = 3 \times 10^6$  时,在没有旋转的情况下 ( $1/Ro = 0$ ), 可以从瞬时温度场中清晰地观察到羽流的形状特点: 羽流尺寸大, 而数量相对少. 随着  $Ra$  升高至  $Ra = 3 \times 10^9$ , 肥皂泡表面的羽流的尺寸大幅减小, 且更加卷曲, 同时羽流数量大幅增加. 在肥皂泡高速旋转的情况下 ( $1/Ro = 10$ ), 羽流的形状与尺度大小同未旋转的情况下相比并无明显变化, 但是羽流造成的影响难以上升到肥皂泡顶部区域.

同时, 图 4 给出了在不同  $Ra$  与  $1/Ro$  设置下, 肥皂泡上的瞬时动能的对数  $\lg E_k = \lg(1/2\mathbf{u}^2)$ . 在肥皂泡没有旋转的情况下, 在  $Ra = 3 \times 10^6$  时, 可通过区分动能集中的区域识别出流动结构的尺寸较大; 而当  $Ra = 3 \times 10^9$  时, 流动结构的尺寸明显变小, 同时变得更加破碎. 如果保持  $Ra$  大小不变, 在高速旋转时  $1/Ro = 10$ , 肥皂泡上靠近赤道的部分出现了大尺寸且动能集中的流动结构, 这是旋转带来的稳定经向流. 另一方面, 在肥皂泡的顶部附近, 流动结构的动能较小, 但尺寸相比没有旋转的情况更大.

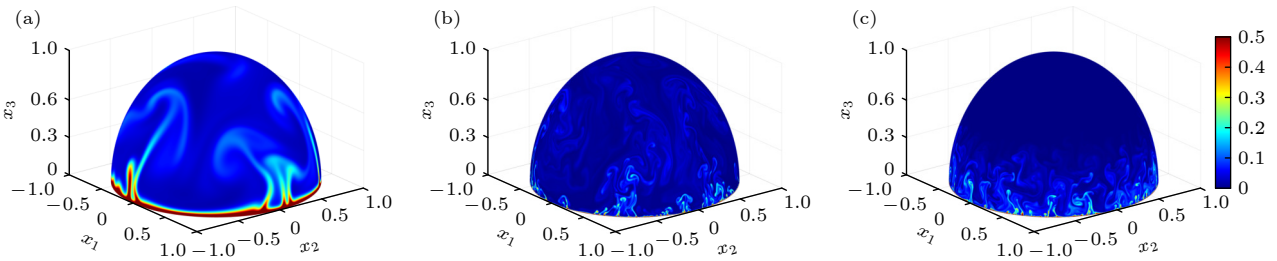


图 3 不同  $1/Ro$  与  $Ra$  下,  $T$  在肥皂泡上的分布 (a) 算例  $Ra = 3 \times 10^6$ ,  $1/Ro = 0$ ; (b) 算例  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 0$ ; (c) 算例  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 10$

Fig. 3. The instantaneous temperature field with different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a) The case of  $Ra = 3 \times 10^6$ ,  $1/Ro = 0$ ; (b) the case of  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 0$ ; (c) the case of  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 10$ .

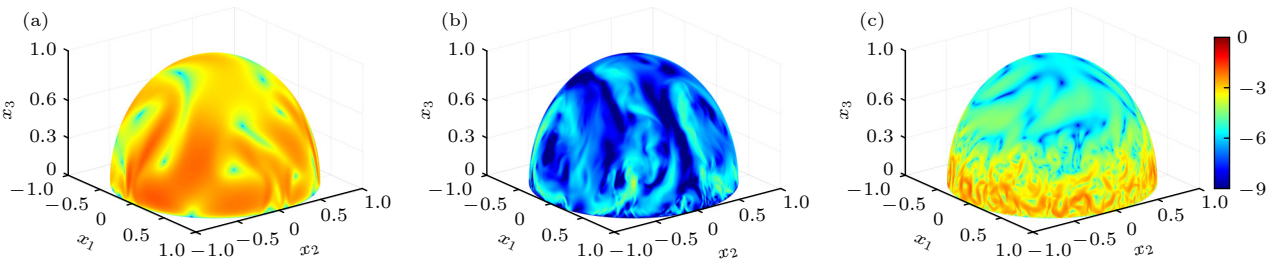


图 4 不同  $1/Ro$  与  $Ra$  下,  $\log E_k$  在肥皂泡上的分布 (a) 算例  $Ra = 3 \times 10^6$ ,  $1/Ro = 0$ ; (b) 算例  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 0$ ; (c) 算例  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 10$

Fig. 4. The instantaneous field of  $\log E_k$  with different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a) The case of  $Ra = 3 \times 10^6$ ,  $1/Ro = 0$ ; (b) the case of  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 0$ ; (c) the case of  $Ra = 3 \times 10^9$ ,  $1/Ro = 10$ .

### 3.2 $Nu$ 与 $Re$

在经典 RB 热对流模型中, 热能从下边界注入, 从上边界流出,  $Nu$  被用来表征流体对流输运热能的效率. 但在肥皂泡模型中, 只有赤道边界: 热量通过这条边界流入肥皂泡, 然后通过外部和内部耗散在肥皂泡上消耗殆尽. 本文使用  $Nu$  来表征肥皂泡赤道上的对流传热效率,  $Nu$  同时也代表了肥皂泡从外界吸收能量的效率,  $Nu$  越大意味着肥皂泡通过对流从外界吸收热能的能力越强. 于是,  $Nu$  的定义为赤道处的无量纲热通量, 其形式如下:

$$Nu = \frac{\tilde{Q}_{eq}}{\tilde{Q}_c} = -\frac{\partial \langle T \rangle}{\partial x_3}, \quad (33)$$

其中  $\tilde{Q}_{eq} = -\tilde{\lambda} \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \tilde{x}_3} \Big|_{\tilde{x}_3=0}$  为赤道上的热通量. 本文使用理想传导热通量  $\tilde{Q}_c = \tilde{\lambda} (\tilde{T}_0 / \tilde{R})$  来量纲一化赤道上的对流热通量. 这是由于在统计稳态中, 肥皂泡顶部的平均温度非常低, 接近于 0<sup>[14,4]</sup>, 赤道与肥皂泡顶部的平均温差可以近似于  $\tilde{T}_0$ . 图 5 给出了本文全部算例的无量纲平均温度  $\langle T \rangle$  随纬度变化的曲

线, 图中数据说明, 在肥皂泡顶部的平均无量纲温度远小于 1. 因此选取热通量  $\tilde{Q}_c$  作为理想情况下, 当流体中只存在热传导时赤道上所具有的热通量. 使用  $\tilde{Q}_c$  来定义  $Nu$  数, 可以让肥皂泡  $Nu$  的定义与经典 RB 对流具有接近的形式, 使肥皂泡的研究更具有通用性.

在热对流中, 温度较高的流体受到浮力的作用从赤道向肥皂泡的顶部运动, 将热能与动能输运至肥皂泡内部. 但是, 可以证明在经度方向上的平均速度为 0. 首先写出球坐标系下的平均连续性方程:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \langle u_r \rangle) + \frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\langle u_\psi \rangle \sin \psi) + \frac{1}{r \sin \psi} \left\langle \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right\rangle = 0. \quad (34)$$

肥皂泡具有旋转对称性, 平均流场在统计上不依赖  $\phi$ , 于是  $\left\langle \frac{\partial}{\partial \phi} \right\rangle \equiv 0$ . 而  $u_r = 0$ , 于是平均连续性方程组可以简化为

$$\frac{1}{r \sin \psi} \frac{\partial}{\partial \psi} (\langle u_\psi \rangle \sin \psi) = 0, \quad (35)$$

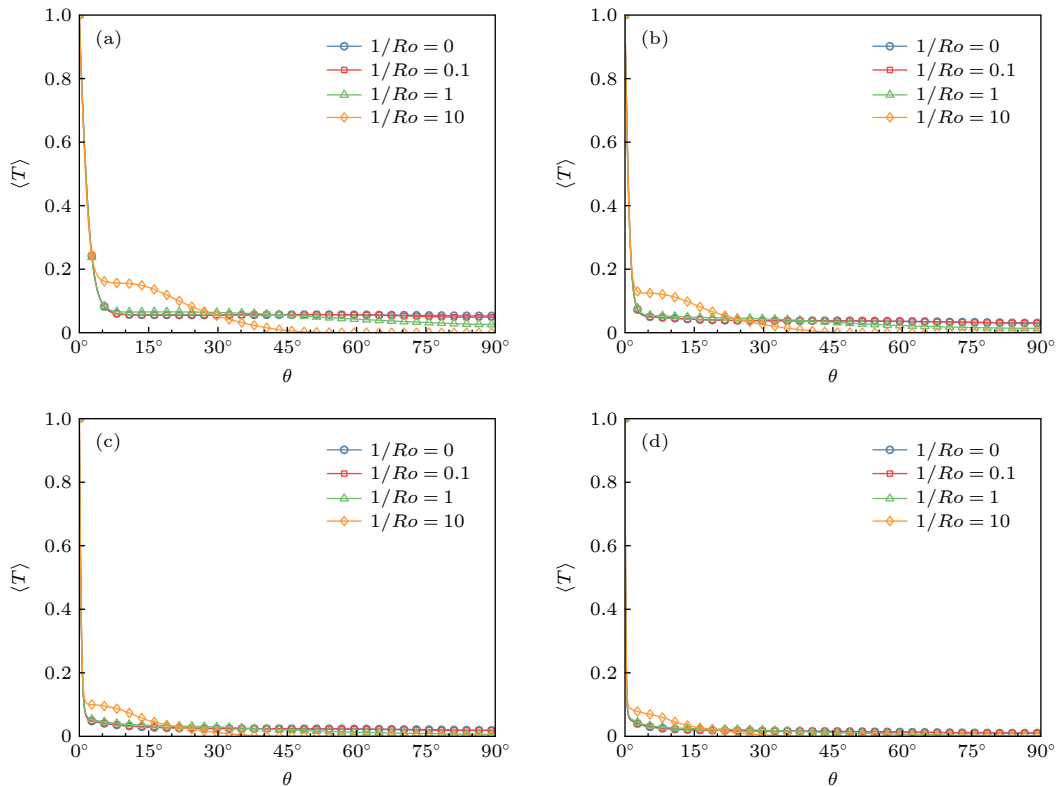


图 5 不同  $1/Ro$  和  $Ra$  下, 平均温度  $\langle T \rangle$  随纬度  $\theta$  的变化规律 (a) 算例  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b) 算例  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c) 算例  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d) 算例  $Ra = 3 \times 10^9$

Fig. 5. The variation of mean temperature  $\langle T \rangle$  with the latitude  $\theta$  for the different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a) The cases of  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b) the cases of  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c) the cases of  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d) the cases of  $Ra = 3 \times 10^9$ .

结合边界条件  $\mathbf{u}|_{\psi=90^\circ} = 0$ , 可以得到  $\langle u_\psi \rangle = 0$ , 即  $\langle u_\theta \rangle = 0$ . 于是在热能与动能输运的过程中, 流体纬度方向的脉动速度  $u'_\theta = u_\theta - \langle u_\theta \rangle$  具有非常重要的作用. 本文使用  $u'_\theta$  的均方根  $u_\theta^* = \sqrt{\langle (u_\theta - \langle u_\theta \rangle)^2 \rangle}$  的最大值来定义  $Re$ :

$$Re = \sqrt{\frac{Ra}{Pr}} \max(u_\theta^*). \quad (36)$$

图 6 给出了  $Nu$  与  $Re$  随  $Ra$  变化的规律. 从图 6 可以看出,  $Nu$  随  $Ra$  变化近似满足标度率  $\sim Ra^{\frac{1}{3}}$ , 这与许多 RB 对流中所观察到的结果非常接近. 图 6 中结果表明,  $1/Ro$  的变化对  $Nu$  的影响非常小, 只有在  $Ra$  较低 ( $Ra \leq 3 \times 10^7$ ), 并且  $1/Ro = 10$  的条件下,  $Nu$  有很微弱的上升. 综合全部结果可以发现,  $1/Ro$  对  $Nu$  标度率的影响可以忽略. 从定义公式 (33) 可以知道,  $Nu$  的大小主要取决于边界层中的平均温度分布曲线. 图 5 数据表明, 越靠近赤道, 平均温度随着旋转速度的变化越微弱<sup>[14]</sup>. 这暗示科里奥利力的作用随着纬度的减小而减小.

如果将速度  $\mathbf{u} = u_\phi \mathbf{e}_\phi + u_\theta \mathbf{e}_\theta$  代入动量方程的科里奥利力项, 则可以得到:

$$-\frac{1}{Ro} \mathbf{e}_3 \times (u_\phi \mathbf{e}_\phi + u_\theta \mathbf{e}_\theta) = -\frac{u_\phi}{Ro} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\phi - \frac{u_\theta}{Ro} \mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\theta. \quad (37)$$

当纬度为 0 时,  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_3$  所以  $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\theta = 0$ ; 另一方面, 在赤道上有  $\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_r$ ; 所以赤道上科里奥利力项可以写为  $-\frac{u_\phi}{Ro} \mathbf{e}_r$ . 由于肥皂泡二维半球面的几何特征, 径向上的力对流体运动没有任何作用. 在赤道上, 科里奥利力的作用为 0, 而且在靠近赤道的区域内, 科里奥利力的作用都很弱. 这就揭示了旋转对  $Nu$  的影响非常微小的原因. 肥皂泡上  $Nu$  随  $1/Ro$  的变化规律与旋转 RB 对流有较明显的不同. 旋转 RB 对流中  $Nu$  随着  $1/Ro$  的逐渐增加呈现先升后降的变化规律: 在合理的参数范围内,  $1/Ro$  可以使  $Nu$  最大增加 30%<sup>[41,40]</sup>. 在适当的旋转速度下, 旋转 RB 对流中的羽流变为竖直排列的涡, 产生 Ekman 抽吸效应, 将边界层中的流体向湍流体中输运, 使  $Nu$  有明显的上升<sup>[43,42]</sup>. Ekman

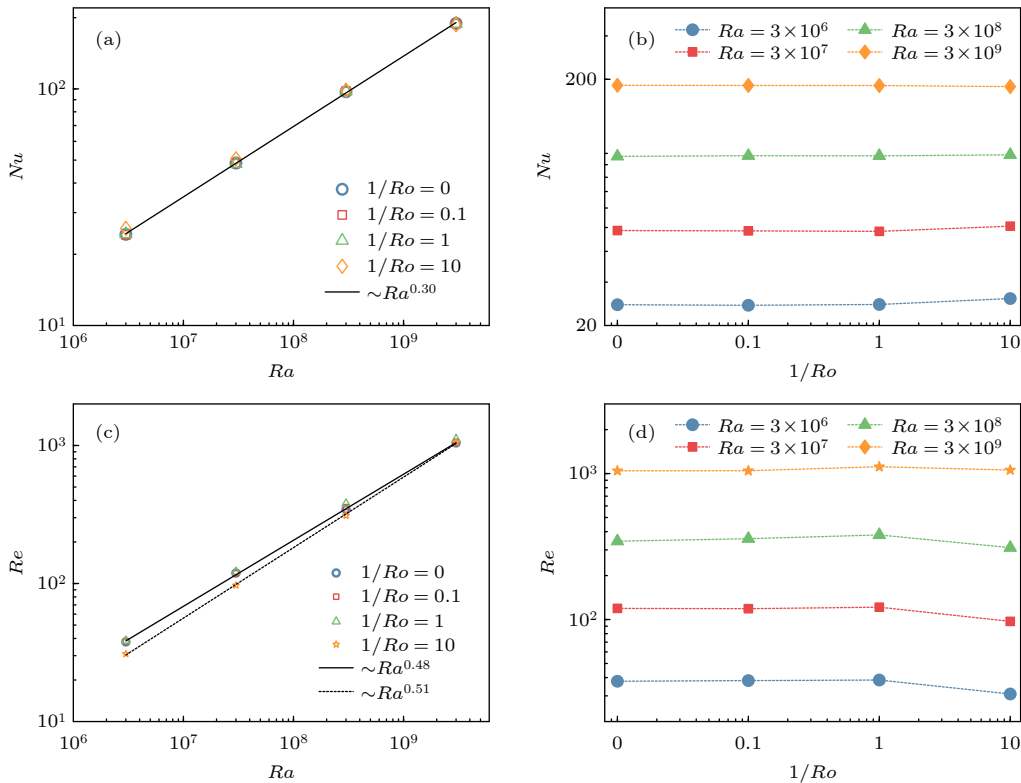


图 6  $Nu$  (上) 和  $Re$  (下) 随  $Ra$  (左) 和  $1/Ro$  (右) 的变化规律 (a) 在  $1/Ro$  恒定的条件下,  $Nu$  随  $Ra$  的标度规律; (b) 在  $Ra$  恒定的条件下,  $Nu$  随  $1/Ro$  的变化规律; (c) 在  $1/Ro$  恒定的条件下,  $Re$  随  $Ra$  的标度规律; (d) 在  $Ra$  恒定的条件下,  $Re$  随  $Ra$  的变化规律

Fig. 6. The variation of  $Nu$  (up) and  $Re$  (down) with  $Ra$  (left) and  $1/Ro$  (right): (a) The scaling behavior of  $Nu$  with  $Ra$  in condition of fixed  $1/Ro$ ; (b) the variation of  $Nu$  with  $1/Ro$  in condition of fixed  $Ra$ ; (c) the scaling behavior of  $Re$  with  $Ra$  in condition of fixed  $1/Ro$ ; (d) the variation of  $Re$  with  $1/Ro$  in condition of fixed  $Ra$ .

抽吸效应的效率随着  $Pr$  数的上升而得到加强, 而随着  $Ra$  数的上升  $Nu$  被削弱<sup>[40]</sup>. 但是只有在三维流场中才会产生 Ekman 抽吸效应, 所以肥皂泡上  $Nu$  上升的机理与 RB 对流具有较大不同.

另一方面,  $Re$  随着  $Ra$  的变化曲线也具有幂律函数的形式. 当肥皂泡静止或者旋转速度较小时 ( $1/Ro \leq 1$ ),  $Re$  满足标度率  $Re \sim Ra^{0.48}$ , 而且  $Re$  随  $1/Ro$  的变化可以忽略. 但当  $1/Ro = 10$  时, 在较低  $Ra$  的条件下,  $Re$  出现了明显的下降, 而在较高  $Ra$  的条件下,  $Re$  随  $1/Ro$  的变化依然较小, 这导致  $Re$  的标度系数从 0.48 上升到 0.51.  $Re$  同时受到  $Ra$  与  $1/Ro$  的影响, 与  $u_\theta^*$  随纬度分布的规律直接相关<sup>[14]</sup>. 在之后讨论黏性边界层的小节会展示, 当  $1/Ro = 10$  时, 纬度方向速度的脉动受到极大的抑制,  $\max(u_\theta^*)$  也随之下降. 但随着  $Ra$  上升,  $\max(u_\theta^*)$  下降幅度逐渐缩小, 使  $Re$  的降幅也变小.

### 3.3 均方根温度分布与温度边界层

RB 对流的温度边界层厚度  $\delta_T$  可以根据平均温度  $\langle T \rangle$  来定义, 也可以根据脉动温度的均方根  $T^* = \sqrt{\langle T'^2 \rangle}$  来定义<sup>[49]</sup>. RB 对流的实验发现, 当非常靠近上下平板时, 流体的平均温度  $\langle T \rangle$  与到边界的距离  $d$  之间的变化曲线表现出较好的线性规律. 对线性分布区域做拟合线并且延长, 当拟合线达到湍流体区域的平均温度时, 其与边界的距离可定义为边界层的厚度<sup>[50,49]</sup>. 但是, 肥皂泡对流模型中只有一个热边界, 所以在边界的法线方向上流场并不对称, 且静止肥皂泡上的经向流非常微弱<sup>[14]</sup>, 这导致流场中不存在一个有明确物理定义的湍流体区域. RB 对流还可以用另外一种方式定义  $\delta_T$ : 脉

动温度的均方根达到最大值处到边界的距离<sup>[29,50,49]</sup>. 因此, 本文根据肥皂泡的曲面外形特点, 采取以下方式定义温度边界层厚度: 均方根脉动温度  $T^*$  是  $\theta$  的函数, 当  $T^*$  达到最大值时,  $\theta = \theta_T$ . 纬度  $\theta_T$  距离赤道的大地距离 (即半球面上由赤道到纬度  $\theta_T$  的最短距离: 圆周角为  $\theta_T$  的大圆弧长) 定义为温度边界层厚度  $\delta_T$ . 在无量纲坐标系下, 肥皂泡的半径  $R \equiv 1$ , 所以  $\delta_T$  和  $\theta_T$  之间的关系为  $\theta_T = \delta_T/R = \delta_T$ . 在肥皂泡上, 纬度  $\theta_T$  的物理含义与  $\delta_T$  相同, 代表了流体到边界 (赤道) 的距离, 两者的差别在于量纲.

图 7 的左边给出了  $Ra = 3 \times 10^6$ ,  $Ra = 3 \times 10^7$ ,  $Ra = 3 \times 10^8$  和  $Ra = 3 \times 10^9$  的静止肥皂泡上  $T^*$  随纬度的分布曲线, 并且用虚线标注了  $\theta_T$ , 即边界层的厚度. 图 7 的右边则给出不同罗斯比数下边界层厚度  $\delta_T$  与  $Ra$  的关系. 图 7 中的数据显示,  $\delta_T$  随  $Ra$  变化呈指数标度, 而  $1/Ro$  对温度边界层厚度的影响并不明显.  $\delta_T$  与  $Ra$  之间的标度关系为  $\delta_T \sim Ra^{-0.32}$ . 和 3.2 节讨论的原因一样, 动量方程中科里奥利的的作用项随着纬度的降低而减小, 在赤道处变为 0. 而边界层厚度很薄, 而且随着  $Ra$  的上升而快速下降, 所以边界层厚度受旋转作用的影响非常微弱. 值得一提的是, 在 RB 对流模型的研究文献中, 温度边界层厚度的标度规律  $\delta_T \sim Ra^{-\frac{1}{3}}$  已经多次被研究者发现<sup>[45,49]</sup>. 在肥皂泡模型中,  $\delta_T$  与  $Ra$  的标度关系与 RB 对流非常相似. 并且, 肥皂泡的  $\delta_T$  标度系数与  $Nu$  的标度系数完全相反, 这也符合 RB 对流中的特征. 从几何角度观察, 温度边界层靠近赤道且厚度很薄, 流动尺度很小. 之前的研究也表明, 在边界层中受无滑移边界条件的影响, 流体的运动速度较低且温度的脉动也很微弱<sup>[4,14]</sup>,

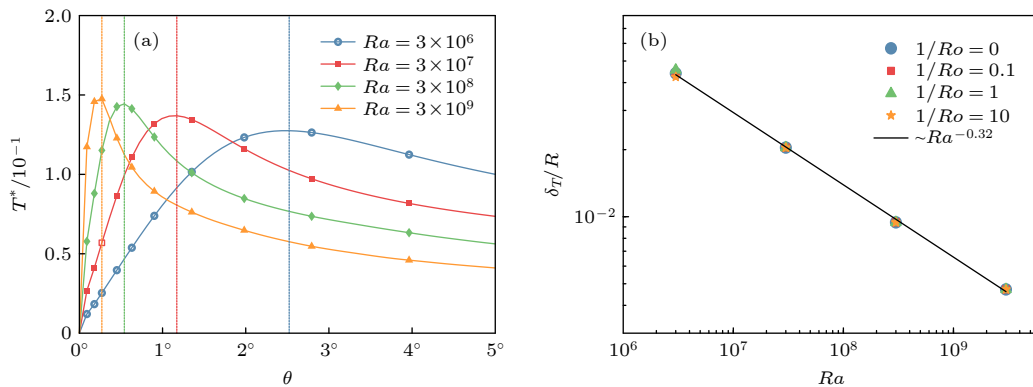


图 7 (a) 均方根温度剖面分布与温度边界层定义示意图; (b) 不同  $1/Ro$  下, 温度边界层厚度随  $Ra$  变化规律  
Fig. 7. (a) The variation of  $T^*$  profile with  $Ra$ ; (b) the thickness of the thermal boundary layers with  $Ra$  and  $1/Ro$ .

于是人工散热与人工摩擦项的作用在边界层中不明显. 同时, 边界层中浮力的投影与重力的夹角可以近似为 $180^\circ$ , 与RB对流中的情况相同, 这就说明了肥皂泡在边界层中热能运输的物理机制与RB对流很相近, 使得 $\delta_T$ 随着 $Ra$ 的变化规律也与RB对流接近. 同时, 由于温度边界层之外, 温度梯度较低; 因而对于这一系统, 温度边界层的厚度也恰好与系统边界层的温度梯度成反比关系, 因而其与 $Nu$ 成反比关系.

图8为将不同算例的 $T^*$ 曲线用 $\delta_T$ 与 $\max(T^*)$ 进行归一化后的结果. 在保持 $1/Ro$ 恒定的条件下, 图8的每个子图中,  $Ra$ 从 $3 \times 10^6$ 增加至 $3 \times 10^9$ , 提升了3个数量级. 结果显示, 当旋转作用较小时( $1/Ro \leq 1$ ), 即使 $Ra$ 增加了3个数量级, 不同 $Ra$ 的 $T^*$ 归一化曲线相互重合得较好, 表现出较强的自相似性. 当旋转作用达到最大时( $1/Ro = 10$ ), 在边界层中与靠近边界层的部分( $(R\theta/\delta_T) \leq 2$ ), 不同 $Ra$ 下的 $T^*$ 归一化曲线依然重合得较好. 产生这种现象的原因在于科里奥利力在赤道附近作用微弱, 如3.2节所讨论. 在离边界层较远的区域

( $2 \leq R\theta/\delta_T \leq 4$ ), 除 $Ra = 3 \times 10^6$ 外, 其他 $Ra$ 下的 $T^*$ 归一化曲线依然展现出较好的自相似性. 在离边界层非常远的区域( $R\theta/\delta_T \geq 4$ ), 只有 $Ra = 3 \times 10^8$ 与 $Ra = 3 \times 10^9$ 的 $T^*$ 归一化曲线重合得较好. 由此可以发现, 在科里奥利力作用明显的条件下, 随着 $Ra$ 上升,  $T^*$ 的归一化曲线的重合度逐渐增加; 而当纬度越靠近赤道,  $T^*$ 曲线的重合度越明显. 在较强的旋转作用下, 图中 $Ra = 3 \times 10^6$ 在高纬度的差异可能是由于随着 $Ra$ 的降低, 其羽流尺度相对更大, 当羽流延展到远离边界层区域时, 科里奥利力作用逐渐增加, 从而造成了羽流结合科里奥利力导致的温度分布变化. 随着 $Ra$ 上升, 热羽流尺寸相对减小, 这一耦合科里奥利力篡改温度分布的能力减弱, 因而曲线的重合度更高. 这些都表明, 科里奥利力项的作用会改变 $T^*$ 的空间分布. 另外, 图8的结果也表明,  $\max(T^*)$ 是一个非常合适的归一化因子.  $\max(T^*)$ 直接描述了温度脉动的强弱, 与 $Ra$ 相关, 于是可以较好地表征 $T^*$ 的自相似特性<sup>[49]</sup>.

图9采用对数坐标轴显示了不同 $Ra$ 下 $T^*$ 在边界层外侧的随 $\theta$ 变化的曲线, 每个子图的结果具

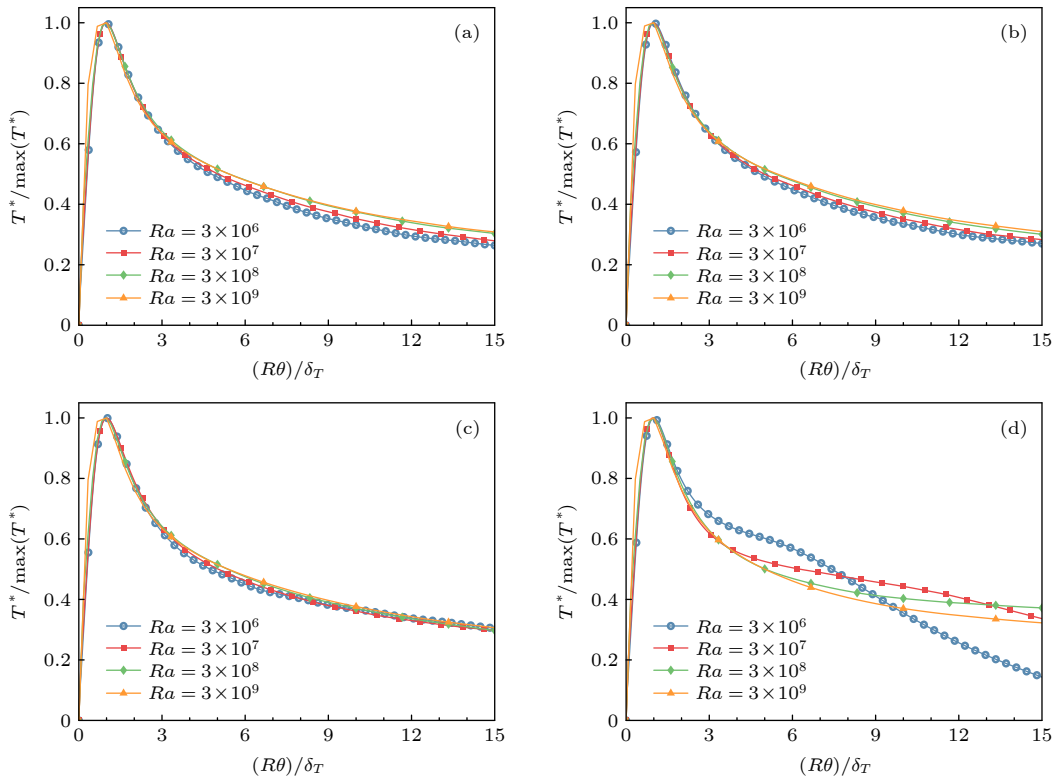


图8 不同 $1/Ro$ 和 $Ra$ 条件下, 使用 $\delta_T$ 与 $\max(T^*)$ 进行归一化之后的 $T^*$ 曲线 (a)  $1/Ro = 0$ ; (b)  $1/Ro = 0.1$ ; (c)  $1/Ro = 1$ ; (d)  $1/Ro = 10$

Fig. 8. The RMS temperature distribution normalized by  $\delta_T$  and  $\max(T^*)$  for the different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a)  $1/Ro = 0$ ; (b)  $1/Ro = 0.1$ ; (c)  $1/Ro = 1$ ; (d)  $1/Ro = 10$ .

有不同的  $1/Ro$  并且使用幂律函数对  $T^*$  进行了拟合, 拟合结果用不同线型的黑线展示. 对比拟合结果与  $T^*$  曲线可以发现, 在本文研究的罗斯比倒数范围内 ( $0 \leq 1/Ro \leq 10$ ), 边界层外的  $T^*(\theta)$  都具有幂律函数的形式. 在  $1/Ro$  保持不变的条件下, 尽管  $Ra$  变化范围达到了 3 个数量级, 但  $T^*$  都在一定纬度范围内近似满足  $T^* \sim \theta^\xi$ . 当肥皂泡旋转作用较弱时 ( $1/Ro \leq 1$ ), 近似满足  $T^* \sim \theta^\xi$  的区间超过了一个数量级, 拟合指数  $\xi$  与  $-\frac{1}{2}$  非常接近. 但当肥皂泡高速旋转时 ( $1/Ro = 10$ ), 近似满足  $T^* \sim \theta^\xi$  的区间长度缩短, 小于一个数量级, 并且  $\xi$  与  $-\frac{1}{2}$  的差距明显增加. 对于所有算例, 在  $\theta \geq 1$  时, 流体非常靠近肥皂泡顶, 脉动温度快速下降<sup>[14]</sup>. 于是  $T^*(\theta)$  不再具有幂律函数的形式. 肥皂泡上的  $T^*$  在边界层外的空间分布与 RB 对流也具有一定的相似性. RB 对流中, 边界层外可以分为对流区 (或混合区) 和对流核心区<sup>[58]</sup>. Adrian<sup>[53]</sup> 由惯性力与黏性力相互平衡的假定, 推导出对流区  $T^*(d)$  具有幂律函数的形式:  $T^* \sim d^{-\frac{1}{2}}$ . 多项 RB 对流的实验研究也发现了  $T^*$  的空间分布曲线具有幂律函数形式. 然而 Adrian 基于惯性力与浮力平衡的假设预测

$T^*(d)$  同样可以具有对数函数的形式  $T^* \sim \ln d$ , 并在实验中得到验证. 最近, 何宇昊与夏克青<sup>[54]</sup> 使用高精度的实验方法测量了 RB 对流槽中剪切主导区与羽流主导区的  $T^*(d)$ . 剪切主导区中, 大尺度环流带来的横向平均速度使流场处于强剪切状态中. 而羽流主导区中, 大量的羽流相互混合聚集并从热边界上升至冷边界. 他们的研究表明, 剪切主导区内  $T^* \sim d^{-\frac{1}{2}}$ , 而羽流主导区内  $T^* \sim \ln d$ . 比较 RB 对流和肥皂泡模型的结果可以发现, 肥皂泡模型与 RB 对流在边界层外具有较大的物理差异. 由于大尺度环流非常微弱, 于是肥皂泡上不存在与剪切主导区中类似的流动状态. 另一方面, 羽流在肥皂泡的赤道上随机生成并不断运动, 羽流的混合随机发生在肥皂泡上不同的区域, 羽流主导区中类似的流动状态也不存在于肥皂泡上. 但是, 肥皂泡上添加了外摩擦项, 引入了较大的外摩擦黏性力; 而随着  $\theta$  的上升, 在肥皂泡纬度方向上重力的投影越来越小. 这些都暗示  $T^* \sim \theta^\xi$  的分布规律可能取决于惯性力与黏性力相互平衡机制, 但是详细物理图像还需要更加深入的研究.

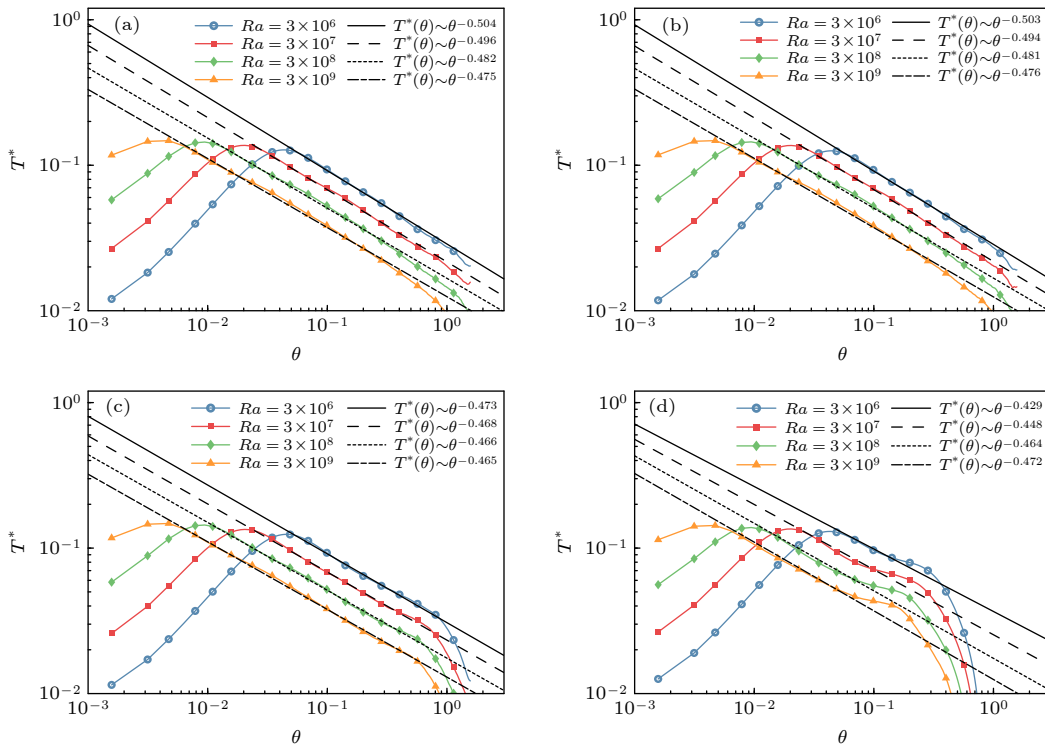


图 9 不同  $1/Ro$  和  $Ra$  条件下,  $T^*$  的剖面曲线 (a)  $1/Ro = 0$ ; (b)  $1/Ro = 0.1$ ; (c)  $1/Ro = 1$ ; (d)  $1/Ro = 10$   
 Fig. 9. The profile of  $T^*$  for the different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a)  $1/Ro = 0$ ; (b)  $1/Ro = 0.1$ ; (c)  $1/Ro = 1$ ; (d)  $1/Ro = 10$ .

### 3.4 纬度脉动速度均方根的空间分布与黏性边界层

图 10 给出了不同  $Ra$  与  $1/Ro$  参数组合下的  $u_\theta^*$  纬度剖面曲线. 图 10 中的结果显示, 当肥皂泡未旋转时,  $u_\theta^*$  随着纬度上升, 先快速线性增加, 达到最大值之后缓慢回落, 形成一个变化较为平坦的区间. 在肥皂泡的顶部附近,  $u_\theta^*$  也不为 0. 当  $1/Ro = 0.1$  时,  $u_\theta^*$  的变化并不明显, 而且随着  $Ra$  的增大,  $u_\theta^*(1/Ro = 0)$  曲线与  $u_\theta^*(1/Ro = 0.1)$  曲线几乎重合. 如果肥皂泡的旋转速度继续增加, 当  $1/Ro = 1$  时,  $u_\theta^*$  曲线出现了较为明显变化:  $u_\theta^*$  的最大值上升.  $u_\theta^*$  的最大值上升的幅度随着  $Ra$  的增加而显著增加:  $Ra = 3 \times 10^6$  时,  $u_\theta^*$  的最大值的上升幅度非常微弱, 而  $Ra = 3 \times 10^9$  时,  $u_\theta^*$  的最大值有明显的上升. 另一方面,  $u_\theta^*$  达到最大值之后就会急剧下降,  $u_\theta^*$  曲线呈现单一峰值, 平坦区间消失. 于是在肥皂泡顶部附近的区域, 相比  $1/Ro = 0$  与  $1/Ro = 0.1$  的情况,  $u_\theta^*$  出现了明显的下降. 当  $1/Ro = 10$  时, 肥皂泡高速旋转, 此时  $u_\theta^*$  的最大值出现了明显的下降, 并且

在  $\theta \geq 45^\circ$  的区域内  $u_\theta^*$  几乎为 0. 这说明, 在肥皂泡的顶部, 纬度方向的速度脉动几乎消失, 而  $\langle u_\theta \rangle = 0$ , 此时几乎没有质量与能量向肥皂泡顶部运输. 肥皂泡顶部流体的湍流在缺乏能量运输与黏性耗散的作用下被极大抑制, 几乎消失.

当肥皂泡上流体的湍流运动得到充分发展之后, 流场的平均速度相比脉动速度非常微弱<sup>[14]</sup>. 之前的章节已经证明, 纬度方向的平均速度  $\langle u_\theta \rangle = 0$ ; 静止肥皂泡上的大尺度环流非常微弱, 其经度方向的平均速度同样非常微弱<sup>[14]</sup>. 因而, 不便于通过平均速度场来定义黏性边界层. 本文参考 RB 对流的相关研究文献<sup>[50,51]</sup>, 基于纬度方向脉动速度的均方根  $u_\theta^* = \sqrt{\langle (u_\theta')^2 \rangle}$  来定义黏性边界层厚度  $\delta_u$ . 图 11 的左侧示例了通过  $u_\theta^*$  曲线来定义黏性边界层厚度的方法. 对于肥皂泡对流模型,  $u_\theta^*$  随  $\theta$  变化的曲线在靠近赤道的部分具有线性特征. 将线性部分做拟合线并延长, 当拟合线达到脉动纬度速度的均方根最大值  $\max(u_\theta^*)$  时, 纬度为  $\theta_u$ .  $\theta_u$  距离赤道的大地距离  $R \times \theta_u$  就是黏性边界层的厚度  $\delta_u$ .

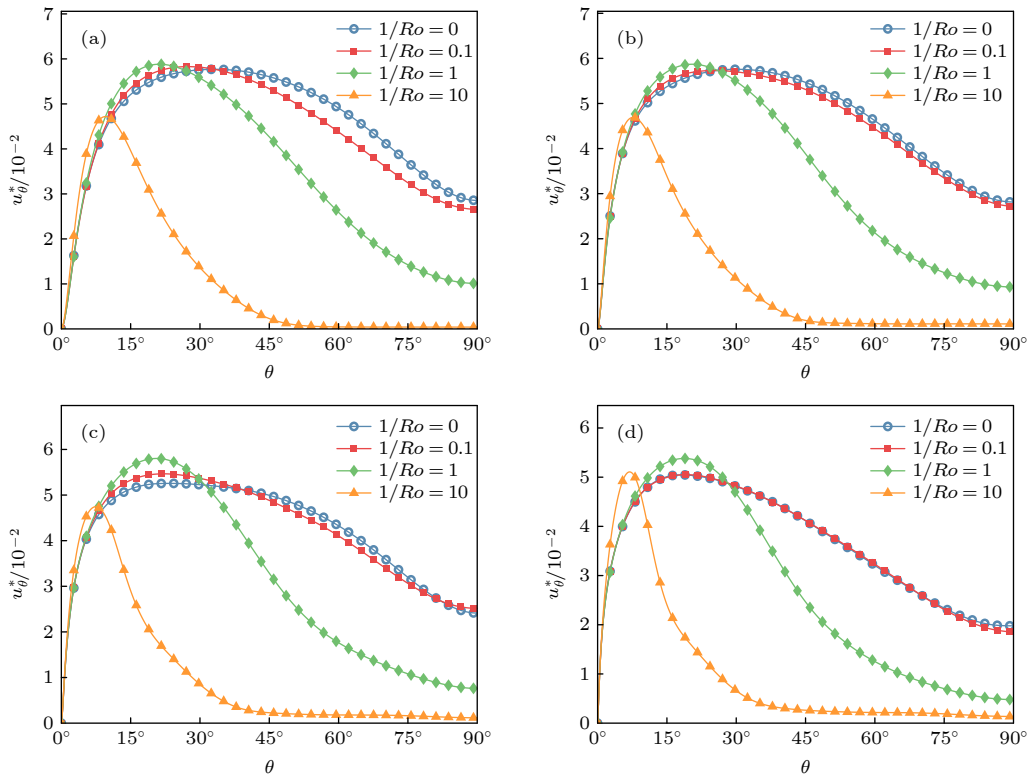


图 10 不同  $Ra$  与  $1/Ro$  条件下, 均方根纬度速度  $u_\theta^*$  纬度剖面曲线 (a)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d)  $Ra = 3 \times 10^9$

Fig. 10. The profile of the RMS velocity in the latitude direction  $u_\theta^*$  for the different  $Ra$  and  $1/Ro$ : (a)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d)  $Ra = 3 \times 10^9$ .

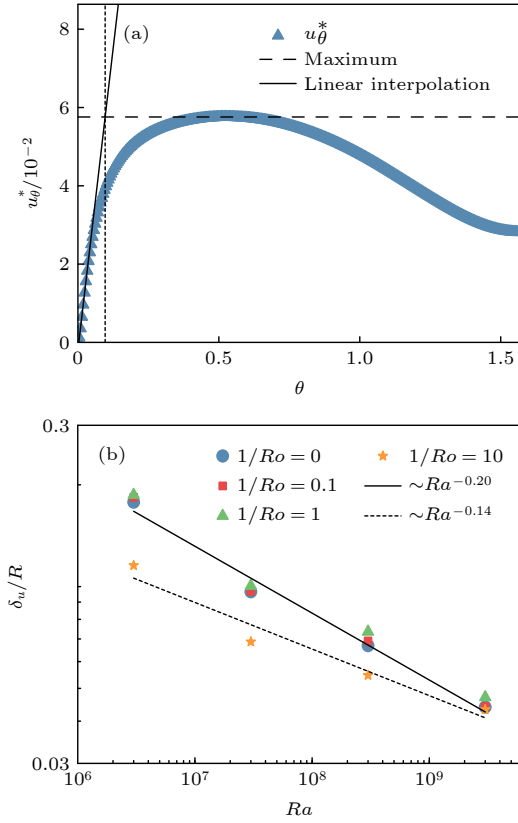


图 11 (a) 黏性边界层厚度  $\delta_u$  的定义方法 (示意算例  $Ra = 3 \times 10^7$ ,  $1/Ro = 0$ ); (b) 不同  $1/Ro$  下  $\delta_u$  随  $Ra$  变化规律

Fig. 11. (a) The definition of the viscous boundary layer thicknesses  $\delta_u$  with the example case of  $Ra = 3 \times 10^7$  and  $1/Ro = 0$ ; (b) the variation of  $\delta_u$  with  $Ra$  for the different  $1/Ro$ .

图 11 的右边给出了  $\delta_u$  随  $Ra$  的变化规律. 对于肥皂泡热对流模型,  $\delta_u$  与  $Ra$  的关系呈现幂律函数的形式. 而随着  $Ra$  增加, 黏性边界层的厚度快速减小. 对于静止肥皂泡,  $1/Ro = 0$ ,  $\delta_u$  近似满足标度率  $\delta_u \sim Ra^{-0.2}$ . 当  $1/Ro \leq 1$  时, 肥皂泡上旋转作用较弱,  $\delta_u$  随  $1/Ro$  的变化可以忽略, 此时  $\delta_u$  随  $Ra$  变化的标度率保持恒定. 当  $1/Ro = 10$  时, 肥皂泡高速旋转,  $Ra$  相对较低时 ( $Ra \leq 3 \times 10^8$ ),  $\delta_u$  明显下降. 但随着  $Ra$  升高到  $3 \times 10^9$ ,  $1/Ro$  对  $\delta_u$  的影响可以忽略. 结果, 当  $1/Ro = 10$  时,  $\delta_u$  随  $Ra$  变化的标度指数从  $-0.2$  变为  $-0.14$ . RB 对流中, 由于大尺度环流的存在, 使用水平脉动速度的均方根曲线来定义  $\delta_u$ . 在早期的文献中, Xin 和 Xia<sup>[59]</sup> 首先在圆柱形对流槽中测量得到  $\delta_u \sim Ra^{-0.25}$ , 而 Qiu 和 Xia<sup>[60]</sup> 测得  $\delta_u \sim Ra^{-0.22}$ . 这与肥皂泡中的结果较为接近. 最近, 孙超等<sup>[50]</sup> 在使用 PIV 方法测量了矩形对流槽的黏性边界层, 并得到  $\delta_u \sim Ra^{-0.37}$ .

### 3.5 拟热能耗散率和动能耗散率

令单位质量流体所包含的拟热能和动能分别为  $E_T = T^2/2$  与  $E_k = u_i^2/2$ . 将能量方程和动量方程两边分别乘以  $T$  或者  $u$ , 就可以得到  $E_T$  与动能  $E_k$  的控制方程:

$$\frac{\partial E_T}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i E_T - \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} T \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) = -\frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_j} \frac{\partial T}{\partial x_j} - ST^2, \quad (38)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_k}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_i} \left( u_i E_k + u_i p - \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} u_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \\ = Tu_3 - \frac{1}{\sqrt{Ra/Pr}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \\ - Fu_i u_i - \frac{1}{Ro} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}, \end{aligned} \quad (39)$$

这里注意到科里奥利力不会产生或者耗散能量, 所以  $-\frac{1}{Ro} (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{u}) \cdot \mathbf{u}$  只起到能量再次分配的作用.

由控制方程可以知道, 拟热能由赤道边界输入, 并被内耗散项率  $\varepsilon_T^0 = \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_i}$  和外耗散率  $\varepsilon_T^1 = ST^2$  所消耗. 当肥皂泡进入统计稳态后, 两个耗散项的平均值  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  与边界上的拟热通量平均值达到平衡. 而在动能方程中, 存在一个源项输入, 即浮力项  $Tu_3$ . 当速度场达到统计稳态后, 浮力项输入流场的动能被动能内耗散率  $\varepsilon_u^0 = \frac{1}{\sqrt{Ra \times Pr}} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \frac{\partial u_i}{\partial x_j}$  和动能外耗散率  $\varepsilon_u^1 = Fu_i u_i$  两项完全消耗. 于是, 浮力项的平均值与两个动能耗散率的平均值  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  保持平衡. 在统计稳态中, 各个项的平均值仅与纬度  $\theta$  有关. 本文借鉴 GL 理论<sup>[24–27]</sup> 的思路, 将耗散率以边界层内外为区别, 进行分开讨论.

$\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  只依赖于  $\theta$ , 两者在肥皂泡上的分布曲线分别如图 12 和图 13 所示. 图 12 和图 13 中黑色虚线标示了温度边界层的厚度, 即  $\delta_T$ . 由于  $\delta_T$  随  $1/Ro$  的变化可以忽略, 图 12 和图 13 统一使用  $\delta_T$  ( $1/Ro = 0$ ) 来标识温度边界层的空间位置. 分析图 12 和图 13 中的数据可知,  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  随  $\theta$  的变化规律一致: 两者的最大值在赤道处, 随着  $\theta$  的增加,  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  快速下降. 在相同的控制参数下,  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  都远大于  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$ . 这表明, 拟热能外耗散在流动中并不起主导作用. 另外, 图 12 和图 13 中的结果

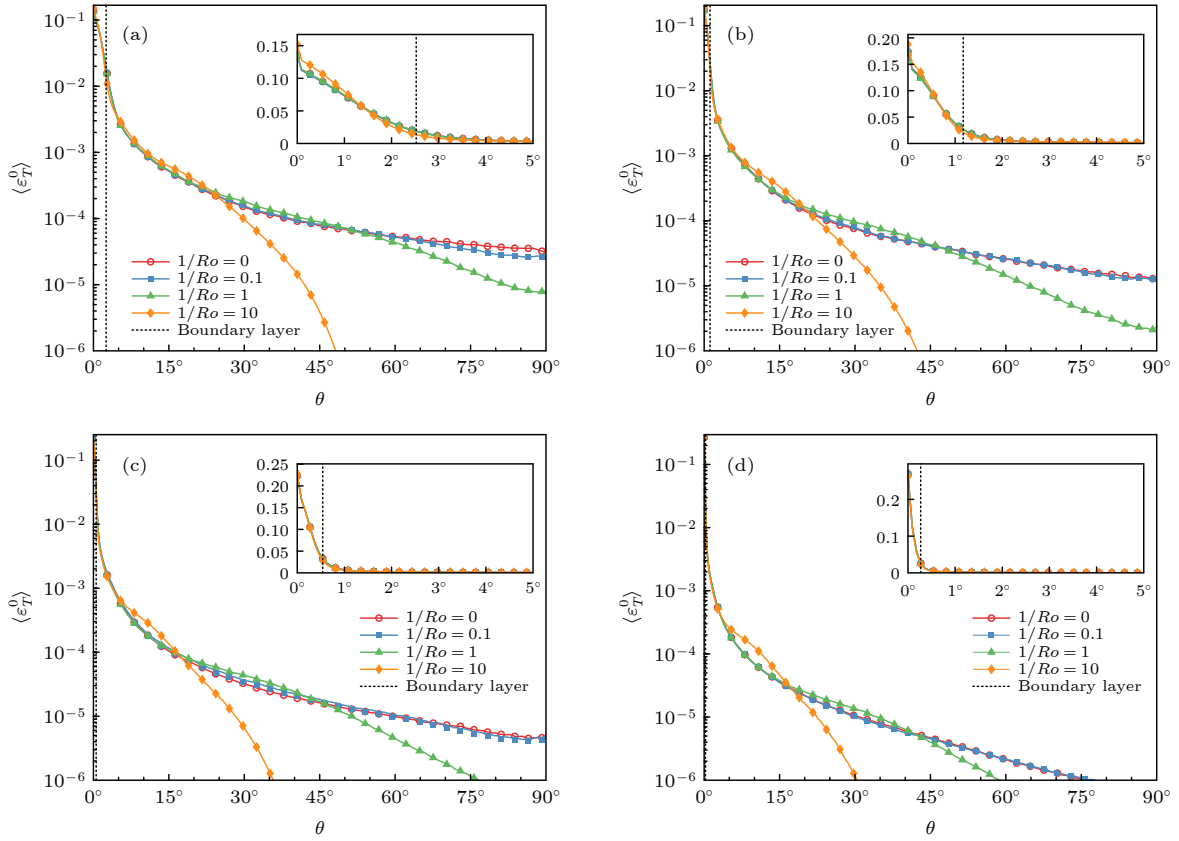


图 12 不同  $Ra$  与  $1/Ro$  条件下, 拟热能内耗散率  $\varepsilon_T^0$  在纬度方向的分布 (a)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d)  $Ra = 3 \times 10^9$ . 子图为边界层附近的放大

Fig. 12. The distribution of the internal thermal energy dissipation rate  $\varepsilon_T^0$  in the latitude direction for the different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d)  $Ra = 3 \times 10^9$ . The insets are the zoom-in for the boundary layers.

还说明, 大部分拟热能耗散发生在温度边界层内. 在边界层内,  $1/Ro$  的上升对  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  的影响均非常小. 只有当  $Ra \leq 3 \times 10^7$  且  $1/Ro = 10$  时,  $\varepsilon_T^0$  在非常接近赤道处有少许增加, 在靠近边界层上端又有非常微弱的减小. 结果为  $\varepsilon_T^0$  的分布曲线在边界层中变得更加陡峭, 拟热能内耗散更加向赤道集中. 而在边界层外,  $\varepsilon_T^0$  和  $\varepsilon_T^1$  随  $1/Ro$  的变化规律相同. 在  $1/Ro = 0.1$  的条件下, 边界层外的  $\varepsilon_T^0$  和  $\varepsilon_T^1$  的曲线均未受到旋转的影响. 但当  $1/Ro \geq 1$  时,  $\varepsilon_T^0$  和  $\varepsilon_T^1$  在靠近边界层的纬度区间内有上升, 其中  $\varepsilon_T^0$  的增加较为微弱, 但是  $\varepsilon_T^1$  却具有较明显的增强. 同时, 两者在靠近肥皂泡顶部的区间中均剧烈下降, 近似为 0. 总体而言,  $\varepsilon_T^0$  和  $\varepsilon_T^1$  在边界层外的值均远小于边界层内的平均值, 所以  $1/Ro$  的作用从全局上看依旧较小.

随着  $Ra$  的上升,  $\delta_T$  快速减小, 温度边界层中  $\langle \varepsilon_T^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_T^1 \rangle$  随  $\theta$  下降得更快. 肥皂泡在边界层中的平均温度梯度最大 [14], 于是拟热能内耗散集中在

温度边界层中, 而在肥皂泡的其他区域, 拟热能内耗散较小. 在边界层中, 科里奥利力项的作用非常小,  $1/Ro$  的上升对拟热能耗散率的影响可以忽略.

图 14 给出了不同  $Ra$  和  $1/Ro$  参数组合下,  $\langle Tu_3 \rangle$ ,  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  和  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  随纬度  $\theta$  变化的曲线, 并且使用黑色和红色虚线表示不同  $1/Ro$  下黏性边界层的厚度  $\delta_u$ . 因为  $1/Ro \leq 1$  的条件下,  $\delta_u$  随  $1/Ro$  的变化可以忽略, 于是图 14 使用黑色虚线标识  $\delta_u(1/Ro = 0)$ , 而使用红色虚线标识  $\delta_u(1/Ro = 10)$ . 可以看出, 随着  $Ra$  数上升,  $\delta_u(1/Ro = 10)$  与  $\delta_u(1/Ro = 0)$  之间的差别不断减小, 最终在  $Ra = 3 \times 10^9$  时相互重合. 从图 14 还可以发现动能外耗散率比内耗散率要小一个量级, 这暗示肥皂泡与外部的相互作用不会给湍流运动产生最本质的影响. 此外,  $\langle Tu_3 \rangle$  在边界层中随纬度快速增长, 达到最大值后缓慢下降, 在肥皂泡顶处为 0. 且随着  $Ra$  的上升, 边界层变薄,  $\langle Tu_3 \rangle$  的峰值越来越靠近赤道. 在  $1/Ro \leq 0.1$  的条件下,  $\langle Tu_3 \rangle$  随  $1/Ro$  并没有变化. 而  $1/Ro = 1$  时,  $\langle Tu_3 \rangle$  在黏性边界层外随  $\theta$  的上升有更明显的下降.

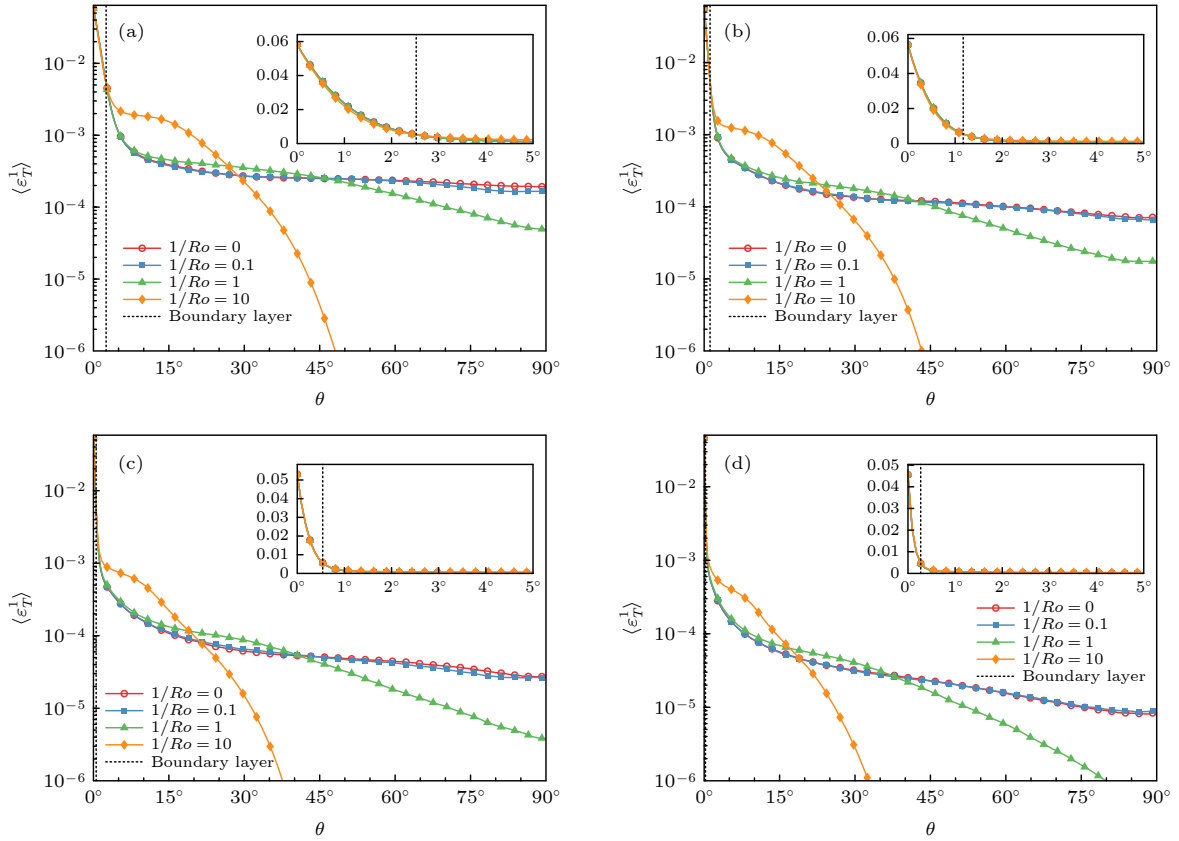


图 13 不同  $Ra$  与  $1/Ro$  条件下, 拟热能内耗散率  $\varepsilon_T^1$  在纬度方向的分布 (a)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d)  $Ra = 3 \times 10^9$ . 内插图为边界层附近的放大

Fig. 13. The distribution of the internal thermal energy dissipation rate  $\varepsilon_T^1$  in the latitude direction for the different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (b)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (c)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (d)  $Ra = 3 \times 10^9$ . The insets are the zoom-in for the boundary layers.

在  $1/Ro = 10$  时,  $\langle Tu_3 \rangle$  在黏性边界层外随  $\theta$  的增加下降非常快, 当  $\theta \geq 45^\circ$  时,  $\langle Tu_3 \rangle$  的值约等于 0. 而在黏性边界层内,  $\langle Tu_3 \rangle$  的变化更加复杂. 在  $Ra = 3 \times 10^6$  或  $Ra = 3 \times 10^7$  的情况下,  $\langle Tu_3 \rangle$  在边界层内的峰值有明显的上升. 但随着  $Ra$  增加到  $3 \times 10^8$  或  $3 \times 10^9$  时,  $\langle Tu_3 \rangle$  峰值不再随  $1/Ro$  变化.

动能内耗散率的平均  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  在边界层中有小幅的增长, 之后随着  $\theta$  的增加快速下降, 在黏性边界层中形成一个尖锐的峰值. 当  $\theta \geq 30^\circ$  时,  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  变得非常接近于 0. 随着  $Ra$  的增加,  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  在黏性边界层中随  $\theta$  上升下降更加剧烈, 峰值变得越发尖锐, 且不断接近赤道. 图 14 中可以观察到低速旋转 ( $1/Ro \leq 1$ ) 对  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  在黏性边界层内外的分布没有明显影响. 但当肥皂泡高速旋转时 ( $1/Ro = 10$ ),  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  在黏性边界层中的峰值内有明显的下降, 但在黏性边界层外又有轻微的增加. 综合图 14 中的结果可以发现,  $\langle \varepsilon_u^0 \rangle$  在黏性边界层中的值远大于边界层之外的值.

另一方面,  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  随着  $\theta$  的上升而缓慢增长, 在达到第一个峰值之后缓慢下降, 并且在黏性边界层之外再次随着  $\theta$  的上升而缓慢上升, 最终在靠近肥皂泡顶部的时候快速下降. 最终  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  的曲线具有两个峰值. 即使  $Ra$  变化范围达到了 3 个数量级,  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  曲线的变化规律保持不变, 始终有两个极大值. 在黏性边界层的内外  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  的值相近,  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  曲线对旋转的影响更为敏感. 当  $1/Ro = 0.1$  时, 肥皂泡旋转的速度非常慢,  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  曲线就已经有轻微的变化. 当  $1/Ro = 1$  时, 肥皂泡顶部的流动变弱, 所以靠近肥皂泡顶部的  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  有明显的下降. 当  $1/Ro = 10$  时, 在肥皂泡边界层外的流动都受到抑制, 整个肥皂泡上的  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  剧烈下降. 由于  $\langle \varepsilon_u^1 \rangle$  直接受到当地平均速度与脉动速度的影响, 肥皂泡上平均速度由于缺乏大尺度环流, 其作用相对较弱, 而脉动速度由于受肥皂泡上的湍流各向异性影响, 其雷诺应力  $\langle u'_\phi u'_\phi \rangle$  占据支配作用<sup>[14]</sup>, 其曲线的双峰值与该雷诺应力的双峰值具有相似的特征.

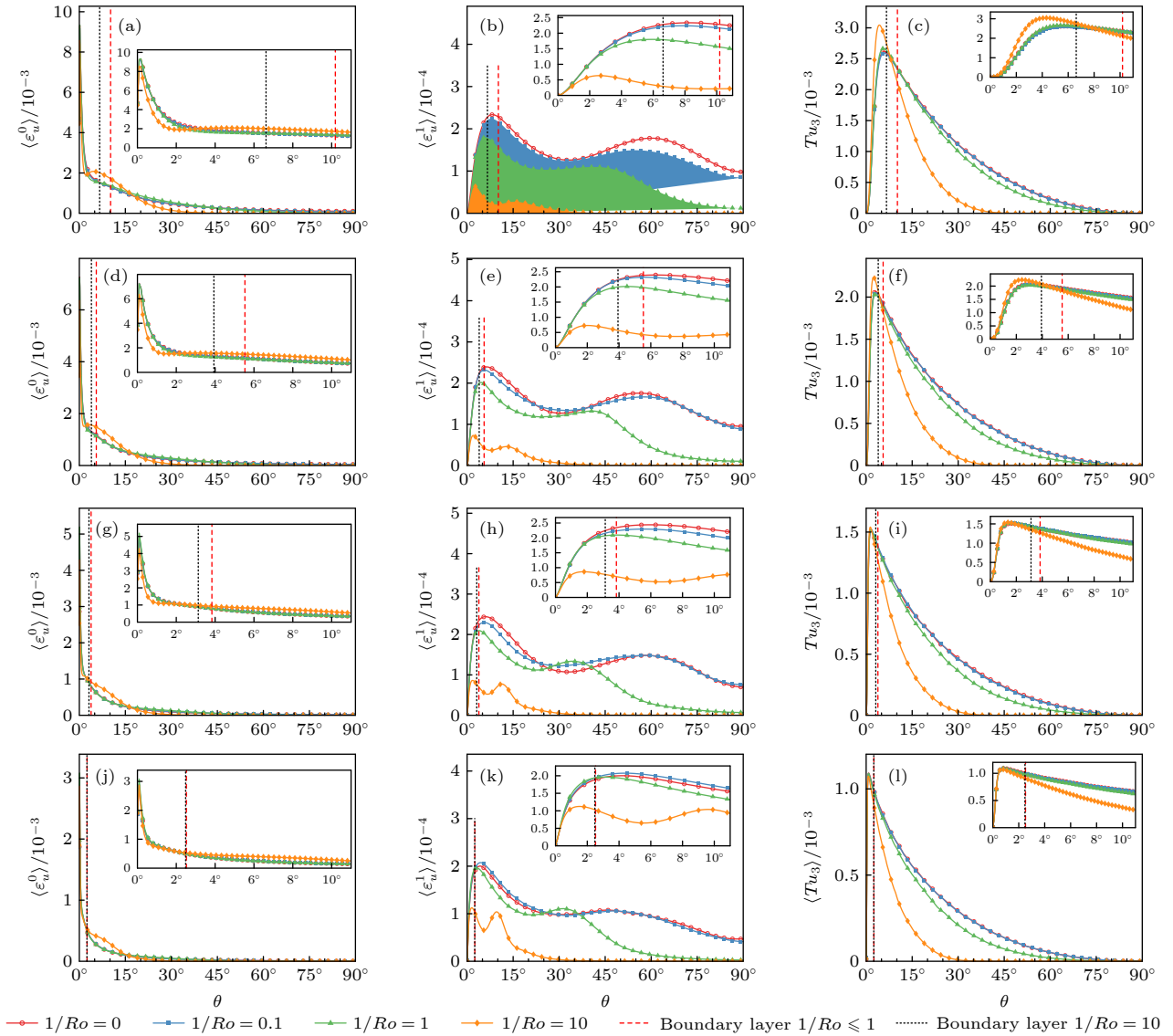


图 14 不同  $Ra$  与  $1/Ro$  条件下, 动能耗散率以及浮力项在纬度方向的分布 (a), (b), (c)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (d), (e), (f)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (g), (h), (i)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (j), (k), (l)  $Ra = 3 \times 10^9$ . 内插图为边界层附近的放大

Fig. 14. The distribution of the kinetic energy dissipation rate and the buoyancy term in the latitude direction for the different  $1/Ro$  and  $Ra$ : (a), (b), (c)  $Ra = 3 \times 10^6$ ; (d), (e), (f)  $Ra = 3 \times 10^7$ ; (g), (h), (i)  $Ra = 3 \times 10^8$ ; (j), (k), (l)  $Ra = 3 \times 10^9$ . The insets are the zoom-in for the boundary layers.

## 4 结 论

通过简单加热肥皂泡可以获得一个新的热对流模型, 该模型具有典型的准二维球面特征, 相比 RB 对流不存在由几何边界奇点形成的角涡, 其浮力作用也随纬度不同而变化. 本文提出了加热肥皂泡的数值模拟方法, 并通过直接数值模拟研究了不同  $Ra$  与  $1/Ro$  下旋转肥皂泡上的边界层特征和能量耗散规律. 结合肥皂泡上的流动特征提出了相应的  $Nu$ ,  $Re$  与温度和黏性边界层厚度的定义. 其中  $\delta_T$  定义为  $\max(T^*)$  所在纬度距离赤道的大地距离,

而  $\delta_u$  是  $u_\theta^*$  曲线近赤道线性部分延长至  $\max(u_\theta^*)$  时所处纬度距离赤道的大地距离. DNS 数值结果表明加热肥皂泡上的湍流热对流具有以下特点.

1) 当肥皂泡无旋转运动时,  $Nu$  与  $Re$  与  $Ra$  的标度关系为  $Nu \sim Ra^{0.30}$  和  $Re \sim Ra^{0.48}$ ; 尽管热对流模型与 RB 对流不同, 但其标度关系与标度指数相近, 这进一步表明这一标度关系对热对流的普适性. 旋转对  $Nu$  的影响可以忽略, 但当旋转作用很强时 ( $1/Ro = 10$ ), 旋转在低  $Ra$  时对  $Re$  有一定的抑制, 使得  $Re$  与  $Ra$  的标度关系变化为  $Re \sim Ra^{0.50}$ .

2) 温度边界层的厚度 $\delta_T$ 随 $Ra$ 的标度关系为 $\delta_T \sim Ra^{-0.32}$ , 且不随罗斯比数的变化而变化. 在温度边界层外侧, 均方根温度的剖面曲线与纬度 $\theta$ 的近似关系为 $T^* \sim \theta^{\frac{1}{2}}$ . 而随着肥皂泡旋转作用的增加, 满足标度关系的纬度区间逐渐缩短.

3) 黏性边界层的厚度 $\delta_u$ 随 $Ra$ 的标度关系为 $\delta_u \sim Ra^{-0.20}$ . 只有当旋转作用足够强 ( $1/Ro = 10$ ), 并且 $Ra$ 相对较小 ( $Ra \leq 3 \times 10^8$ ) 时,  $\delta_u$ 出现明显下降, 使得与 $Ra$ 标度关系变为 $\delta_u \sim Ra^{-0.14}$ .

4) 拟热能耗散率 $\varepsilon_T^0$ 与动能内耗散率 $\varepsilon_u^0$ 主要作用在边界层附近, 远离边界层则耗散作用相对较弱. 旋转对 $\varepsilon_T^0$ 与 $\varepsilon_u^0$ 的影响较为微弱. 而拟热能与动能外耗散率 $\varepsilon_T^1$ 与 $\varepsilon_u^1$ 相比内耗散率分别小一个量级以上, 这表明在肥皂泡准二维热对流中, 肥皂泡上主要流动及当地能量输运由肥皂泡内部流动主导.

## 参考文献

- [1] Ma Y, Mao Z Y, Wang T, Qin J, Ding W J, Meng X Y 2020 *Comput. Electr. Eng.* **87** 106773
- [2] Boffeta G, Ecke R E 2012 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **44** 427
- [3] Meuel T, Xiong Y L, Fischer P, Bruneau C H, Bessafi M, Kellay H 2013 *Sci. Rep.* **3** 3455
- [4] Bruneau C H, Fischer P, Xiong Y L, Kellay H 2018 *Phys. Rev. Fluids* **3** 043502
- [5] Kellay H, Goldburg W I 2002 *Rep. Prog. Phys.* **65** 845
- [6] Wu X L, Martin B, Kellay H, Goldburg W I 1995 *Phys. Rev. Lett.* **75** 236
- [7] Kellay H, Wu X L, Goldburg W I 1995 *Phys. Rev. Lett.* **74** 3975
- [8] Kellay H 2017 *Phys. Fluids* **29** 111113
- [9] Seychelles F, Amarouchene Y, Bessafi M, Kellay H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 144501
- [10] Seychelles F, Ingreneau F, Pradere C, Kellay H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 264502
- [11] Xiong Y L, Fischer P, Bruneau C H 2012 *Proceedings of the 7th International Conference on Computational Fluid Dynamics Hawaii, United States, July 9–13, 2012* p3703
- [12] Meuel T, Prado G, Seychelles F, Bessafi M, Kellay H 2012 *Sci. Rep.* **2** 446
- [13] Meuel T, Coudert M, Fischer P, Bruneau C H, Kellay H 2018 *Sci. Rep.* **8** 16513
- [14] He X Q, Bragg A D, Xiong Y L, Fischer P 2021 *J. Fluid Mech.* **924** A19
- [15] Frisch U, Kolmogorov A N 1995 *Turbulence: The Legacy of A.N. Kolmogorov* (Cambridge: Cambridge University Press) p57
- [16] Pope S B 2000 *Turbulent Flows* (Cambridge: Cambridge University Press) p182
- [17] Kolmogorov A N, Levin V, Hunt J C R, Phillips O M, Williams D 1991 *Proc. R. Soc. London, Ser. A* **434** 9
- [18] Kolmogorov A N 1962 *J. Fluid Mech.* **13** 82
- [19] L'vov V S 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 687
- [20] Lohse D, Xia K Q 2010 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **42** 335
- [21] Siggia E D 1994 *Annu. Rev. Fluid Mech.* **26** 137
- [22] Zhou Q, Xia K Q 2012 *Advances in Mechanics* **42** 231 (in Chinese) [周全, 夏克青 2012 力学进展 **42** 231]
- [23] Xie Y C, Zhang L, Ding G Y, Chen X, Xi H D, Xia K Q 2022 *Advances in Mechanics* (in Chinese) [谢毅超, 张路, 丁广裕, 陈鑫, 郝恒东, 夏克青 2022 力学进展]
- [24] Grossmann S, Lohse D 2000 *J. Fluid Mech.* **407** 27
- [25] Grossmann S, Lohse D 2001 *Phys. Rev. Lett.* **86** 3316
- [26] Grossmann S, Lohse D 2002 *Phys. Rev. E* **66** 016305
- [27] Grossmann S, Lohse D 2004 *Phys. Fluids* **16** 4462
- [28] Stevens R J A M, van der Poel E P, Grossmann S, Lohse D 2013 *J. Fluid Mech.* **730** 295
- [29] Zhang Y, Zhou Q, Sun C 2017 *J. Fluid Mech.* **814** 165
- [30] Xu A, Shi L, Xi H D 2019 *Phys. Fluids* **31** 125101
- [31] He X Z, Tong P E, Xia K Q 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 144501
- [32] He X Z, Tong P E, Xia K Q 2009 *Phys. Rev. E* **79** 026306
- [33] Hertlein A, du Puits R 2021 *Phys. Fluids* **33** 035139
- [34] Shishkina O, Grossmann S, Lohse D 2016 *Geophys. Res. Lett.* **43** 1219
- [35] Yang Y T, Verzicco R, Lohse D 2018 *J. Fluid Mech.* **848** 648
- [36] Wang Q, Lohse D, Shishkina O 2021 *Geophys. Res. Lett.* **48** e2020GL091198
- [37] Zhang L, Ding G Y, Xia K Q 2021 *J. Fluid Mech.* **914** A15
- [38] Stevens R J A M, Clercx H J H, Lohse D 2013 *Eur. J. Mech. B/Fluids* **40** 41
- [39] King E M, Stellmach S, Buffett B 2013 *J. Fluid Mech.* **717** 449
- [40] Zhong J Q, Stevens R J A M, Clercx H J H, Verzicco R, Lohse D, Ahlers G 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 044502
- [41] Zhong J Q, Ahlers G 2010 *J. Fluid Mech.* **665** 300
- [42] Kunnen R P J, Clercx H J H, Geurts B J 2008 *Phys. Rev. E* **82** 036306
- [43] Kunnen R P J, Stevens R J A M, Overkamp J, Sun C, van Heijst G F, Clercx H J H 2011 *J. Fluid Mech.* **688** 422
- [44] Kunnen R P J, Clercx H J H, Geurts B J 2008 *Europhys. Lett.* **84** 1
- [45] Huang M J, Bao Y 2016 *Acta Phys. Sin.* **65** 204702 (in Chinese) [黄茂静, 包芸 2016 物理学报 **65** 204702]
- [46] Bao Y, He J C, Gao Z Y 2019 *Acta Phys. Sin.* **68** 164701 (in Chinese) [包芸, 何建超, 高振源 2019 物理学报 **68** 164701]
- [47] Bao Y, Gao Z Y, Ye M X 2018 *Acta Phys. Sin.* **67** 014701 (in Chinese) [包芸, 高振源, 叶孟翔 2018 物理学报 **67** 014701]
- [48] Wang Y, He X Z, Tong P 2016 *Phys. Rev. Fluids* **1** 082301
- [49] Zhou Q, Xia K Q 2013 *J. Fluid Mech.* **721** 199
- [50] Sun C, Cheng Y H, Xia K Q 2008 *J. Fluid Mech.* **605** 79
- [51] Zhou Q, Stevens R J A M, Sugiyama K, Grossmann S, Lohse D, Xia K Q 2010 *J. Fluid Mech.* **664** 297
- [52] Fang M W, He J C, Bao Y 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 174701 (in Chinese) [方明卫, 何建超, 包芸 2020 物理学报 **69** 174701]
- [53] Adrian R J 1996 *Int. J. Heat Mass Transfer* **39** 11
- [54] He Y H, Xia K Q 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 1
- [55] Ni R, Huang S D, Xia K Q 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 17
- [56] Petschel K, Stellmach S, Wilczek M, L'uff J, Hansen U 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 11
- [57] Bao Y, Ning H, Xu W 2014 *Acta Phys. Sin.* **63** 154703 (in Chinese) [包芸, 宁浩, 徐炜 2014 物理学报 **63** 154703]
- [58] Bernard C, Gemunu G, François H, Leo K, Albert L, Stefan T, Wu X Z, Stéphane Z, Gianluigi Z 1989 *J. Fluid Mech.* **204** 1
- [59] Xin Y B, Xia K Q 1997 *Phys. Rev. E* **56** 3010
- [60] Qiu X L, Xia K Q 1998 *Phys. Rev. E* **58** 5816

# Boundary layers and energy dissipation rates on a half soap bubble heated at the equator\*

He Xiao-Qiu<sup>1)2)</sup> Xiong Yong-Liang<sup>1)2)†</sup> Peng Ze-Rui<sup>1)2)</sup> Xu Shun<sup>1)2)</sup>

1) (*School of Aerospace Engineering, Huazhong University of Science and Technology, Wuhan 430074, China*)

2) (*Hubei Key Laboratory of Engineering Structural Analysis and Safety Assessment, Wuhan 430074, China*)

( Received 14 April 2022; revised manuscript received 20 August 2022 )

## Abstract

The soap bubble heated at the bottom is a novel thermal convection cell, which has the inherent spherical surface and quasi two-dimensional features, so that it can provide an insight into the complex physical mechanism of the planetary or atomspherical flows. This paper analyses the turbulent thermal convection on the soap bubble and addresses the properties including the thermal layer and the viscous boundary layer, the thermal dissipation and the kinetic dissipation by direct numerical simulation (DNS). The thermal dissipation and the kinetic dissipation are mostly occur in the boundary layers. They reveal the great significance of the boundary layers in the process of the energy absorption. By considering the complex characteristics of the heated bubble, this study proposes a new definition to identify the thermal boundary layer and viscous boundary layer. The thermal boundary layer thickness of  $\delta_T$  is defined as the geodetic distance between the equator of the bubble and the latitude at which the the mean square root temperature ( $T^*$ ) reaches a maximum value. On the other hand, the viscous boundary layer thickness  $\delta_u$  is the geodetic distance from the equator at the latitude where the extrapolation for the linear part of the mean square root turbulent latitude velocity ( $u_\theta^*$ ) meets its maximum value. It is found that  $\delta_T$  and  $\delta_u$  both have a power-law dependence on the Rayleigh number. For the bubble, the scaling coefficient of  $\delta_T$  is  $-0.32$  which is consistent with that from the Rayleigh-Bénard convection model. The rotation does not affect the scaling coefficient of  $\delta_T$ . On the other hand, the scaling coefficient of  $\delta_u$  equals  $-0.20$  and is different from that given by the Rayleigh-Bénard convection model. The weak rotation does not change the coefficient while the strong rotation makes it increase to  $-0.14$ . The profile of  $T^*$  satisfies the scaling law of  $T^* \sim \theta^{0.5}$  with the latitude of ( $\theta$ ) on the bubble. The scaling law of the mean square root temperature profile coincides with the theoretical prediction and the results obtained from the Rayleigh-Bénard convection model. However, the strong rotation is capable of shifting the scaling coefficient of the power law away from 0.5 and shortening the interval of satisfying the power law. Finally, it is found that the internal thermal dissipation rate and kinetic dissipation rate  $\varepsilon_T^0$  and  $\varepsilon_u^0$  are one order larger than their peers: the external thermal dissipation and kinetic dissipation rates  $\varepsilon_T^1$  and  $\varepsilon_u^1$  based on a thorough analysis of the energy budget. The major thermal dissipation and kinetic dissipation are accumulated in the boundary layers. With the rotation rate increasing, less energy is transferred from the bottom to the top of the bubble and the influence of the external energy dissipations is less pronounced.

**Keywords:** soap bubble, turbulent thermal convection, energy dissipation rate, boundary layer

**PACS:** 47.11.-j, 47.27.E-

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220693

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 11872187, 12072125).

† Corresponding author. E-mail: [xylcfhd@hust.edu.cn](mailto:xylcfhd@hust.edu.cn)

## 旋转肥皂泡热对流能量耗散与边界层特性的数值模拟

贺啸秋 熊永亮 彭泽瑞 徐顺

### Boundary layers and energy dissipation rates on a half soap bubble heated at the equator

He Xiao-Qiu Xiong Yong-Liang Peng Ze-Rui Xu Shun

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 204701 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220693

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220693>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

#### 压力梯度对壁面局部吹吸边界层感受性的影响研究

Numerical study of effect of pressure gradient on boundary-layer receptivity under localized wall blowing/suction

物理学报. 2019, 68(22): 224701 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190684>

#### 湍流热对流Prandtl数效应的数值研究

Numerical study of Prandtl number effects in turbulent thermal convection

物理学报. 2018, 67(1): 014701 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20171518>

#### 超声速湍流边界层密度脉动小波分析

Wavelet analysis of density fluctuation in supersonic turbulent boundary layer

物理学报. 2020, 69(21): 214702 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200748>

#### 湍流热对流温度剖面双参数拟合及其变化特性

Two-parameter fitting of temperature profile and its characteristics in turbulent convection

物理学报. 2020, 69(17): 174701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200073>

#### 正弦波沟槽对湍流边界层相干结构影响的TR-PIV实验研究

Influence of sinusoidal riblets on the coherent structures in turbulent boundary layer studied by time-resolved particle image velocimetry

物理学报. 2019, 68(7): 074702 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181875>

#### 确定大气边界层顶高度的新方法及数值实验

New method of determining height of atmospheric boundary layer and numerical experiment

物理学报. 2020, 69(9): 090201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191992>