

# 适用于一维精细结构电磁目标模拟的通用 HIE-FDTD 方法及程序实现\*

牟春晖<sup>1)</sup> 陈娟<sup>1)2)†</sup> 范凯航<sup>1)</sup> 鲁艺<sup>1)</sup>

1) (西安交通大学信息与通信工程学院, 西安 710049)

2) (西安交通大学深圳研究院, 深圳 518057)

(2022年4月14日收到; 2022年5月30日收到修改稿)

混合显-隐式时域有限差分方法的时间步长只由空间两个方向上的网格大小决定, 因而该方法被广泛应用于沿一个方向具有精细结构的电磁目标的模拟. 本文通过对传统时域有限差分方法基本公式进行近似, 给出适用于线性、非色散空间, 一维精细结构电磁目标模拟的通用混合显-隐式时域有限差分方法. 在通用混合显-隐式时域有限差分方法中, 通过媒质编号索引和迭代系数空间定位实现三对角矩阵的自动构建, 引入等效参数方法解决麦克斯韦方程微分形式在不同介质分界面失效的问题, 引入卷积完全匹配层边界条件对计算区域进行截断. 此外, 本文提出了一种缩减三对角矩阵数量的方法, 该方法可有效降低程序运行所需内存, 提高程序运行效率. 应用通用混合显-隐式时域有限差分方法仿真了平面波照射介质板和双频微带倒F天线两个模型, 数值计算结果与传统时域有限差分方法和 CST 软件的计算结果一致, 但与传统时域有限差分方法相比, 通用混合显-隐式时域有限差分方法的计算效率大大提高.

**关键词:** 电磁目标, 混合显-隐式时域有限差分, 等效参数, 卷积完全匹配层

**PACS:** 41.20.Jb, 47.11.Bc, 02.70.-c

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220695

## 1 引言

时域有限差分 (finite-difference time-domain, FDTD) 方法<sup>[1,2]</sup>自提出以来已被广泛应用于电磁学研究的众多领域<sup>[3-9]</sup>. 传统 FDTD 方法因采用显式差分算法而必须满足 Courant-Friedrich-Levy 时间稳定性条件<sup>[2]</sup>. 因此, 传统 FDTD 方法的时间步长受制于计算空间网格的最小值. 当模拟目标在一个方向上具有精细结构时, 为了保证计算精度, 在目标精细结构所在的方向需要采用精细网格, 依据时间稳定性条件, 模拟此类问题时, 时间步长需要取得很小, 这就使得总的计算步数剧增. 混合显-隐式 FDTD (hybrid implicit-explicit FDTD, HIE-

FDTD) 方法<sup>[10-12]</sup>通过对精细网格所在方向的空间求导项采用混合显-隐式差分算法, 从而使使得时间步长不再受限于精细网格大小. HIE-FDTD 方法自提出以来已被广泛应用于模拟在一个方向具有精细结构的问题, 如基于石墨烯的各种电磁器件<sup>[13-16]</sup>、微带电路和天线<sup>[17,18]</sup>、线性/非线性集总网络<sup>[19,20]</sup>等.

在使用 FDTD 方法计算空间任意一个网格上的电场和磁场时, 需要用到该网格处介质的相关参数. 因此在 FDTD 方法的基本公式中, 所有的迭代系数均需要标记空间位置. 此外, 由于微分形式的麦克斯韦方程在介质参数突变面失效, 因此在编写 FDTD 程序时需要引入等效参数<sup>[21,22]</sup>概念. 然而, 现有的关于 HIE-FDTD 方法的文献和专著中

\* 国家重点研发计划 (批准号: 2020YFA0709800) 和国家自然科学基金 (批准号: 61971340) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: chen.juan.0201@mail.xjtu.edu.cn

所给出的 HIE-FDTD 基本公式, 大多数没有对迭代系数进行空间位置标记. 依据这些公式编写的 HIE-FDTD 程序, 在仿真不同的电磁目标时, 需根据目标介质分布情况手动构建三对角矩阵, 这就导致 HIE-FDTD 程序不具备通用性. 少数文献在 HIE-FDTD 迭代系数中增加了空间位置标记, 但没有考虑介质分界面处微分形式麦克斯韦方程失效问题, 在计算过程中也没有设置吸收边界, 因此在模拟复杂目标时, 计算精度难以保证, 且不能计算开放区域问题<sup>[19, 20]</sup>.

本文提出了一种适用于线性、非色散空间, 一维精细结构电磁目标模拟的通用 HIE-FDTD 程序实现方法. 在 HIE-FDTD 基本公式中, 对所有迭代系数进行空间位置标记, 并对模拟空间中的所有媒质进行编号. 在介质分界面引入等效参数概念. 同时, 引入卷积完全匹配层 (convolutional perfectly matched layer, CPML) 边界条件来截断计算区域.

依据通用 HIE-FDTD 方法编写的程序可根据目标介质分布情况自动构建三对角矩阵, 且既可以模拟封闭区域问题, 又可以模拟开放区域问题. 此外, 提出了一种缩减三对角矩阵数量的方法, 该方法可有效降低程序运行所需内存, 提高程序运行效率. 本文应用通用 HIE-FDTD 程序分别计算了平面波照射介质板时的透射场和反射场以及双频微带倒 F 天线  $S$  参数和辐射方向图, 仿真结果与传统 FDTD 仿真结果以及 CST 仿真结果相符合, 且通用 HIE-FDTD 方法的计算效率远高于传统 FDTD 方法. 数值计算结果表明了该程序的通用性和有效性.

## 2 理论与程序实现

### 2.1 通用 HIE-FDTD 基本公式

将线性、非色散空间传统 FDTD 基本公式<sup>[21]</sup>写成矩阵形式:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 & 0 \\ C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 0 \\ -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ E_y^{n+1} \\ E_z^{n+1} \\ H_x^{n+1} \\ H_y^{n+1} \\ H_z^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & C_1 & 0 & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & C_1 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \\ H_x^n \\ H_y^n \\ H_z^n \end{bmatrix}, \quad (1)$$

其中,  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $C_3$  和  $C_4$  为 FDTD 中电场和磁场时间推进公式中的迭代系数. 若令

$$\mathbf{A}_{x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{y1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{z1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_{x1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{y1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{z1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}_{x2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{y2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A}_{z2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \\
 \mathbf{B}_{x2} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{y2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{B}_{z2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

则 (1) 式可以重写为

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{x1} + \mathbf{A}_{x1} + \mathbf{A}_{y1} + \mathbf{A}_{y1} + \mathbf{A}_{z1} + \mathbf{A}_{z1}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{y1} + \mathbf{B}_{y1} + \mathbf{B}_{z1} + \mathbf{B}_{z1}) \right] \mathbf{U}^{n+1} \\
 &= \left[ \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{x2} + \mathbf{A}_{x2} + \mathbf{A}_{y2} + \mathbf{A}_{y2} + \mathbf{A}_{z2} + \mathbf{A}_{z2}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{x2} + \mathbf{B}_{x2} + \mathbf{B}_{y2} + \mathbf{B}_{y2} + \mathbf{B}_{z2} + \mathbf{B}_{z2}) \right] \mathbf{U}^n, \quad (2)
 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{U}^{n+1} = [E_x^{n+1} \ E_y^{n+1} \ E_z^{n+1} \ H_x^{n+1} \ H_y^{n+1} \ H_z^{n+1}]'$ ,  $\mathbf{U}^n = [E_x^n \ E_y^n \ E_z^n \ H_x^n \ H_y^n \ H_z^n]'$ ,

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix}.$$

假设目标精细结构位于  $z$  方向, 则对空间求导项  $\partial/\partial z$  采用混合显-隐式差分. 将 (2) 式进行如下变形:

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{x1} + \mathbf{A}_{x1} + \mathbf{A}_{y1} + \mathbf{A}_{y1} + \mathbf{A}_{z1} + \mathbf{A}_{z2}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{y1} + \mathbf{B}_{y1} + \mathbf{B}_{z1} + \mathbf{B}_{z2}) \right] \mathbf{U}^{n+1} \\
 &= \left[ \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{x2} + \mathbf{A}_{x2} + \mathbf{A}_{y2} + \mathbf{A}_{y2} + \mathbf{A}_{z2} + \mathbf{A}_{z1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{x2} + \mathbf{B}_{x2} + \mathbf{B}_{y2} + \mathbf{B}_{y2} + \mathbf{B}_{z2} + \mathbf{B}_{z1}) \right] \mathbf{U}^n \\
 & \quad + \frac{1}{2} \mathbf{E}_1 (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n), \quad (3)
 \end{aligned}$$

其中,  $\mathbf{E}_1 = (\mathbf{A}_{z1} - \mathbf{A}_{z2} + \mathbf{B}_{z1} - \mathbf{B}_{z2})$ . 忽略 (3) 式的末尾项, 得到

$$\begin{aligned}
 & \left[ \mathbf{I} - \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{x1} + \mathbf{A}_{x1} + \mathbf{A}_{y1} + \mathbf{A}_{y1} + \mathbf{A}_{z1} + \mathbf{A}_{z2}) - \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{x1} + \mathbf{B}_{y1} + \mathbf{B}_{y1} + \mathbf{B}_{z1} + \mathbf{B}_{z2}) \right] \mathbf{U}^{n+1} \\
 &= \left[ \mathbf{M} + \frac{1}{2} (\mathbf{A}_{x2} + \mathbf{A}_{x2} + \mathbf{A}_{y2} + \mathbf{A}_{y2} + \mathbf{A}_{z2} + \mathbf{A}_{z1}) + \frac{1}{2} (\mathbf{B}_{x2} + \mathbf{B}_{x2} + \mathbf{B}_{y2} + \mathbf{B}_{y2} + \mathbf{B}_{z2} + \mathbf{B}_{z1}) \right] \mathbf{U}^n. \quad (4)
 \end{aligned}$$

(4) 式相对于 (3) 式的误差为  $\frac{1}{2} \mathbf{E}_1 (\mathbf{U}^{n+1} - \mathbf{U}^n)$ . 将相应的  $\mathbf{A}$  和  $\mathbf{B}$  矩阵代入 (4) 式得到

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{C_2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{C_2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{C_4}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & 1 & 0 & 0 \\ \frac{C_4}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 1 & 0 \\ -C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & C_4 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^{n+1} \\ E_y^{n+1} \\ E_z^{n+1} \\ H_x^{n+1} \\ H_y^{n+1} \\ H_z^{n+1} \end{bmatrix} \\
 = \begin{bmatrix} C_1 & 0 & 0 & 0 & -\frac{C_2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} \\ 0 & C_1 & 0 & \frac{C_2}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} \\ 0 & 0 & C_1 & -C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} & C_2 \cdot \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{C_4}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & C_3 & 0 & 0 \\ -\frac{C_4}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial z} & 0 & 0 & 0 & C_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E_x^n \\ E_y^n \\ E_z^n \\ H_x^n \\ H_y^n \\ H_z^n \end{bmatrix}. \quad (5)$$

采用与传统 FDTD 方法相同的 Yee 元胞, 并引入等效参数概念, 将 (5) 式中的空间求导项采用二阶中心差分近似, 便可得到电场和磁场各个场分量的迭代公式. 为避免公式表述过于冗长, 这里只给出了  $E_x^{n+1}$  和  $H_y^{n+1}$  两个场分量的迭代公式, 其余 4 个场分量的迭代公式可以参照这两个公式给出.

$$\begin{aligned}
 E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) &= D_1 \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \cdot E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \\
 &+ \frac{D_2 \left( i + 1/2, j, k \right)}{\Delta y} \cdot \left[ H_z^n \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z^n \left( i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \right) \right] \\
 &- \frac{D_2 \left( i + 1/2, j, k \right)}{2\Delta z} \cdot \left[ H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &- \frac{D_2 \left( i + 1/2, j, k \right)}{2\Delta z} \cdot \left[ H_y^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (6a)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 H_y^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) &= D_3 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \cdot H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \\
 &+ \frac{D_4 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right)}{\Delta x} \cdot \left[ E_z^{n+1} \left( i + 1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^{n+1} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right) \right] \\
 &- \frac{D_4 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right)}{2\Delta z} \cdot \left[ E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) - E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \right] \\
 &- \frac{D_4 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right)}{2\Delta z} \cdot \left[ E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) - E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \right], \quad (6b)
 \end{aligned}$$

式中,  $\Delta x$ ,  $\Delta y$ ,  $\Delta z$  分别为沿  $x$ ,  $y$ ,  $z$  方向的空间网格大小;  $i$ ,  $j$ ,  $k$  为空间位置标记;  $n$  为时刻标记;  $\Delta t$  为时间步长. (6) 式中的迭代系数分别为

$$D_1(i+1/2, j, k) = \frac{2\varepsilon_{x\text{平均}}(i+1/2, j, k) - \sigma_{x\text{平均}}(i+1/2, j, k) \Delta t}{2\varepsilon_{x\text{平均}}(i+1/2, j, k) + \sigma_{x\text{平均}}(i+1/2, j, k) \Delta t}, \quad (7a)$$

$$D_2\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) = \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_{x\text{平均}}(i+1/2, j, k) + \sigma_{x\text{平均}}(i+1/2, j, k) \Delta t}, \quad (7b)$$

$$D_3\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\mu_{y\text{平均}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \sigma_{my\text{平均}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \Delta t}{2\mu_{y\text{平均}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) + \sigma_{my\text{平均}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \Delta t}, \quad (7c)$$

$$D_4\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) = \frac{2\Delta t}{2\mu_{y\text{平均}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) + \sigma_{my\text{平均}}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \Delta t}, \quad (7d)$$

其中,  $\varepsilon_{x\text{平均}}$  为等效介电系数,  $\sigma_{x\text{平均}}$  为等效电导率,  $\mu_{y\text{平均}}$  为等效磁导系数,  $\sigma_{my\text{平均}}$  为等效磁导率. 等效参数的计算方法与传统 FDTD 等效参数的计算方法相同 [21,22].

使用 FDTD 方法模拟开域电磁问题时, 需要在计算区域的截断边界引入吸收边界条件. 同理, 使用 HIE-FDTD 方法模拟开域问题, 也需要引入吸收边界. 由于采用 CPML 作为吸收边界, 电场和磁场分量均不需要分裂, 计算公式较为简单, 因此在通用 HIE-FDTD 方法中仍采用 CPML 边界条件作为吸收边界条件. 在考虑 CPML 吸收边界后,  $E_x^{n+1}$  和  $H_y^{n+1}$  的计算公式变为

$$\begin{aligned} E_x^{n+1}(i+1/2, j, k) &= D_1(i+1/2, j, k) \cdot E_x^n(i+1/2, j, k) \\ &+ \frac{D_2\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{k_y(j) \Delta y} \cdot \left[ H_z^n\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - H_z^n\left(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k\right) \right] \\ &- \frac{D_2\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{2k_z(k) \Delta z} \cdot \left[ H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &- \frac{D_2\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right)}{2k_z(k) \Delta z} \cdot \left[ H_y^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - H_y^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2}\right) \right] \\ &+ D_2\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) \cdot \left[ \Psi_{pxy}^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) - \Psi_{pxy}^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) \right], \end{aligned} \quad (8a)$$

$$\begin{aligned} H_y^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) &= D_3\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \cdot H_y^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \\ &+ \frac{D_4\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{k_x\left(i + \frac{1}{2}\right) \Delta x} \cdot \left[ E_z^{n+1}\left(i + 1, j, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right) \right] \\ &- \frac{D_4\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{2k_z\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta z} \cdot \left[ E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right) - E_x^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) \right] \\ &- \frac{D_4\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right)}{2k_z\left(k + \frac{1}{2}\right) \Delta z} \cdot \left[ E_x^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + 1\right) - E_x^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k\right) \right] \\ &- D_4\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \cdot \left[ \Psi_{myz}^{n+1}\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) - \Psi_{myz}^n\left(i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2}\right) \right], \end{aligned} \quad (8b)$$

其中,

$$\Psi_{pxy}^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) = b_y(j) \Psi_{pxy}^{n-1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) + a_y(j) \frac{H_z^n \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z^n \left( i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \right)}{\Delta y}, \quad (9a)$$

$$\begin{aligned} \Psi_{pxz}^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) &= b_z(k) \Psi_{pxz}^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) + \frac{a_z(k)}{2\Delta z} \left[ H_y^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \right. \\ &\quad \left. - H_y^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) + H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) \right], \quad (9b) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{myx}^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) &= b_x \left( i + \frac{1}{2} \right) \Psi_{myx}^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) \\ &\quad + a_x \left( i + \frac{1}{2} \right) \frac{E_z^{n+1} \left( i + 1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^{n+1} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right)}{\Delta x}, \quad (9c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Psi_{myz}^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) &= b_z \left( k + \frac{1}{2} \right) \Psi_{myz}^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) + \frac{a_z(k+1/2)}{2\Delta z} \left[ E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) \right. \\ &\quad \left. - E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) + E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) - E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) \right]. \quad (9d) \end{aligned}$$

(8) 式和 (9) 式中,  $\Psi$  为 HIE-FDTD 中电场和磁场时间推进公式中卷积项的离散循环卷积形式, 且 CPML 吸收边界各参数的取值与其在传统 FDTD 方法中的取值一致. 在非 CPML 区域,  $k_v$  的取值恒为 1,  $a_v$  和  $b_v$  的取值恒为 0 ( $v = x, y, z$ ), 此时 (8) 式退化为 (6) 式. 引入 CPML 后, 电磁场其余场分量的迭代公式可参照 (8) 式给出 [23–25].

显然, 如 (8) 式所示, 在计算  $n+1$  时刻的  $E_x$  时需要用到同一时刻的  $H_y$  分量. 将 (8b) 式代入 (8a) 式中, 整理得到

$$\begin{aligned} &(1 + \tau_1 + \tau_2) \cdot E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) - \tau_1 \cdot E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) - \tau_2 \cdot E_x^{n+1} \left( i + \frac{1}{2}, j, k - 1 \right) \\ &= \left[ D_1 \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) - \tau_1 - \tau_2 \right] \cdot E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right) + \tau_1 \cdot E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + 1 \right) + \tau_2 \cdot E_x^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k - 1 \right) \\ &\quad + \chi_1 \cdot \left[ H_z^n \left( i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k \right) - H_z^n \left( i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2}, k \right) \right] \\ &\quad - \chi_2 \cdot \left\{ \left[ D_3 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \cdot H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right) - \left[ D_3 \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) + 1 \right] \cdot H_y^n \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right) \right\} \\ &\quad - \chi_3 \cdot \left[ E_z^{n+1} \left( i + 1, j, k + \frac{1}{2} \right) - E_z^{n+1} \left( i, j, k + \frac{1}{2} \right) \right] + \chi_4 \cdot \left[ E_z^{n+1} \left( i + 1, j, k - \frac{1}{2} \right) - E_z^{n+1} \left( i, j, k - \frac{1}{2} \right) \right] + \beta_1, \quad (10) \end{aligned}$$

其中,

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \frac{D_2 \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right)}{2\Delta z} \left( \frac{1}{k_z(k)} + a_z(k) \right) \frac{D_4 \left( i + \frac{1}{2}, j, k + \frac{1}{2} \right)}{2\Delta z} \left[ \frac{1}{k_z(k+1/2)} + a_z \left( k + \frac{1}{2} \right) \right], \\ \tau_2 &= \frac{D_2 \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right)}{2\Delta z} \left( \frac{1}{k_z(k)} + a_z(k) \right) \frac{D_4 \left( i + \frac{1}{2}, j, k - \frac{1}{2} \right)}{2\Delta z} \left[ \frac{1}{k_z(k-1/2)} + a_z \left( k - \frac{1}{2} \right) \right], \\ \chi_1 &= \frac{D_2 \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right)}{k_y(j) \Delta y}, \chi_2 = \frac{D_2 \left( i + \frac{1}{2}, j, k \right)}{2\Delta z} \left[ \frac{1}{k_z(k)} + a_z(k) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\chi_3 &= \frac{D_2\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{2\Delta z} \left(\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right) \frac{D_4\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \left[\frac{1}{k_x(i+1/2)} + a_x\left(i+\frac{1}{2}\right)\right], \\ \chi_4 &= \frac{D_2\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)}{2\Delta z} \left(\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right) \frac{D_4\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)}{\Delta x} \left[\frac{1}{k_x(i+1/2)} + a_x\left(i+\frac{1}{2}\right)\right], \\ \beta_1 &= \chi_2 \cdot D_4\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) \cdot \left[b_z\left(k+\frac{1}{2}\right) \Psi_{myz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right) - b_x\left(i+\frac{1}{2}\right) \Psi_{myx}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k+\frac{1}{2}\right)\right] \\ &\quad - \chi_2 \cdot D_4\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right) \cdot \left[b_z\left(k-\frac{1}{2}\right) \Psi_{myz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right) - b_x\left(i+\frac{1}{2}\right) \Psi_{myx}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k-\frac{1}{2}\right)\right] \\ &\quad + D_2\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) \left[\Psi_{pxy}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right) - b_z(k) \Psi_{pxz}^n\left(i+\frac{1}{2}, j, k\right)\right].\end{aligned}$$

同理, 在计算  $n+1$  时刻的  $E_y$  时需要用到同一时刻的  $H_x$  分量. 采用与  $E_x$  相同的处理方法, 得到  $E_y$  的计算公式如下:

$$\begin{aligned}& (1 + \tau_3 + \tau_4) \cdot E_y^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) - \tau_3 \cdot E_y^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) - \tau_4 \cdot E_y^{n+1}\left(i, j + \frac{1}{2}, k - 1\right) \\ &= \left[D_5\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) - \tau_3 - \tau_4\right] \cdot E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right) + \tau_3 \cdot E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + 1\right) + \tau_4 \cdot E_y^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k - 1\right) \\ &\quad - \chi_5 \cdot \left[H_z^n\left(i + \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right) - H_z^n\left(i - \frac{1}{2}, j + \frac{1}{2}, k\right)\right] \\ &\quad + \chi_6 \cdot \left\{\left[D_7\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) + 1\right] \cdot H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right) - \left[D_7\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right) + 1\right] \cdot H_x^n\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)\right\} \\ &\quad - \chi_7 \cdot \left[E_z^{n+1}\left(i, j + 1, k + \frac{1}{2}\right) - E_z^{n+1}\left(i, j, k + \frac{1}{2}\right)\right] + \chi_8 \cdot \left[E_z^{n+1}\left(i, j + 1, k - \frac{1}{2}\right) - E_z^{n+1}\left(i, j, k - \frac{1}{2}\right)\right] + \beta_2,\end{aligned}\tag{11}$$

其中,

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \frac{D_6\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{2\Delta z} \left(\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right) \frac{D_8\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{2\Delta z} \left[\frac{1}{k_z(k+1/2)} + a_z\left(k + \frac{1}{2}\right)\right], \\ \tau_4 &= \frac{D_6\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{2\Delta z} \left(\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right) \frac{D_8\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}{2\Delta z} \left[\frac{1}{k_z(k-1/2)} + a_z\left(k - \frac{1}{2}\right)\right], \\ \chi_5 &= \frac{D_6(i, j + 1/2, k)}{k_x(i) \Delta x}, \quad \chi_6 = \frac{D_6(i, j + 1/2, k)}{2\Delta z} \left[\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right], \\ \chi_7 &= \frac{D_6\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{2\Delta z} \left(\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right) \frac{D_8\left(i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \left[\frac{1}{k_y(j+1/2)} + a_y\left(j + \frac{1}{2}\right)\right], \\ \chi_8 &= \frac{D_6\left(i, j + \frac{1}{2}, k\right)}{2\Delta z} \left(\frac{1}{k_z(k)} + a_z(k)\right) \frac{D_8\left(i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2}\right)}{\Delta y} \left[\frac{1}{k_y(j+1/2)} + a_y\left(j + \frac{1}{2}\right)\right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \beta_2 = & -\chi_6 \cdot D_8 \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ b_y \left( j + \frac{1}{2} \right) \Psi_{mxy}^n \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) - b_z \left( k + \frac{1}{2} \right) \Psi_{mxz}^n \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \right] \\
 & + \chi_6 \cdot D_8 \left( i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right) \cdot \left[ b_y \left( j + \frac{1}{2} \right) \Psi_{mxy}^n \left( i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right) - b_z \left( k - \frac{1}{2} \right) \Psi_{mxz}^n \left( i, j + \frac{1}{2}, k - \frac{1}{2} \right) \right] \\
 & + D_6 \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \left[ b_z(k) \Psi_{pyz}^n \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) - \Psi_{pyx}^n \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \right], \\
 D_5 \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) = & \frac{2\varepsilon_{y\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) - \sigma_{y\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \Delta t}{2\varepsilon_{y\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) + \sigma_{y\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \Delta t}, \\
 D_6 \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) = & \frac{2\Delta t}{2\varepsilon_{y\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) + \sigma_{y\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k \right) \Delta t}, \\
 D_7 \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) = & \frac{2\mu_{x\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) - \sigma_{mx\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \Delta t}{2\mu_{x\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) + \sigma_{mx\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \Delta t}, \\
 D_8 \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) = & \frac{2\Delta t}{2\mu_{x\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) + \sigma_{mx\text{平均}} \left( i, j + \frac{1}{2}, k + \frac{1}{2} \right) \Delta t}.
 \end{aligned}$$

综上所述, 通用 HIE-FDTD 方法的求解可通过如下方式完成: 首先, 通过显式迭代方程计算  $E_z^{n+1}$ ; 再利用 (10) 式和 (11) 式, 通过解三对角矩阵方程求解  $E_x^{n+1}$  和  $E_y^{n+1}$ ; 在此基础上, 再通过显式迭代方程求解  $H_z^{n+1}$ ,  $H_x^{n+1}$  和  $H_y^{n+1}$ . 完成一次时间步迭代, 通用 HIE-FDTD 方法共需要求解 4 个显式迭代方程和 2 个三对角矩阵方程.

## 2.2 程序实现

HIE-FDTD 方法与传统 FDTD 方法在程序实现时最主要的差异在于, HIE-FDTD 需要构建三对角矩阵并求解其逆矩阵. 以 (10) 式为例, 在求解  $E_x^{n+1}$  时, 需要沿  $z$  方向以列为单位对其进行求解, 且求解每一列时均需要构建一个三对角矩阵. 假设计算区域沿  $x$  方向的网格数为  $N_x$ , 沿  $y$  方向的网格数为  $N_y$ , 沿  $z$  方向的网格数为  $N_z$ , 且  $N_z = 7$ , 则求解每一列  $E_x^{n+1}$  所需要构建的三对角矩阵方程为

$$\begin{bmatrix}
 1 + \tau_{12} + \tau_{22} & -\tau_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 -\tau_{23} & 1 + \tau_{13} + \tau_{23} & -\tau_{13} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & -\tau_{24} & 1 + \tau_{14} + \tau_{24} & -\tau_{14} & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & -\tau_{25} & 1 + \tau_{15} + \tau_{25} & -\tau_{15} & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & -\tau_{26} & 1 + \tau_{16} + \tau_{26} & -\tau_{16} & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 0 & -\tau_{27} & 1 + \tau_{17} + \tau_{27} & 0
 \end{bmatrix}
 \begin{bmatrix}
 E_{x2} \\
 E_{x3} \\
 E_{x4} \\
 E_{x5} \\
 E_{x6} \\
 E_{x7}
 \end{bmatrix}
 =
 \begin{bmatrix}
 r_2 \\
 r_3 \\
 r_4 \\
 r_5 \\
 r_6 \\
 r_7
 \end{bmatrix}, \quad (12)$$

其中,  $\tau_{1k}$  和  $\tau_{2k}$  分别为  $k$  取不同值时所对应的  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的值,  $E_{xk}$  为沿  $z$  方向第  $k$  个待求电场量,  $r_k$  为  $k$  取不同值时 (10) 式等号右侧的已知量. 显然, 完成所有  $E_x^{n+1}$  求解需要构建  $N_x \times N_y$  个三对角矩阵, 每个三对角矩阵的维度为  $(N_z - 1) \times (N_z - 1)$ , 并执行  $N_x \times N_y$  次的矩阵求逆计算. 当计算区域较大

时, 执行程序将会耗费大量的内存和时间. 为解决这一问题, 本文提出了一种缩减三对角矩阵数量的方法.

以图 1 所示模型为例, 对通用 HIE-FDTD 方法中三对角矩阵构建以及三对角矩阵数量缩减方法进行说明. 如图 1 所示, 模型由目标和空气两部

分组成, 其中, 目标由耶路撒冷十字金属层和长方体介质层组成. 模型沿  $x$  和  $y$  方向的网格数均为 18, 沿  $z$  方向的网格数为 10. 由于本节只介绍三对角矩阵构建以及三对角矩阵数量缩减方法, 因此这里只给出模型的网格尺寸, 且整个模型用均匀网格线进行剖分, 空间网格线如图 1 中虚线所示.

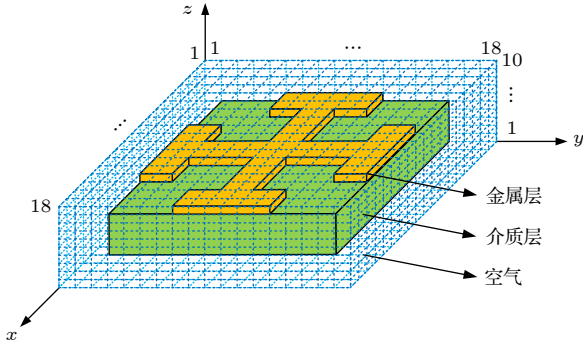


图 1 模型结构及网格分布

Fig. 1. Structure and grid distribution of the model.

对模型中的媒质进行编号, 将空气标记为 1, 金属标记为 2, 介质标记为 3. 图 2 为模型在  $x = 4$  这一截面的介质分布矩阵.

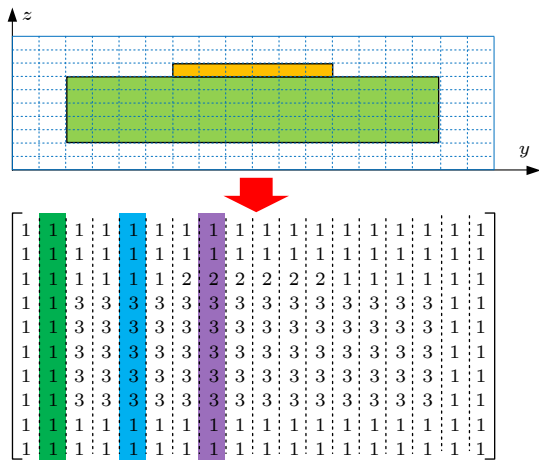


图 2 模型在  $x = 4$  截面的介质分布矩阵

Fig. 2. Media distribution matrix of  $x = 4$ .

由图 2 可见, 当计算  $x = 4$  这一截面的  $E_x^{n+1}$  时, 共需要构建 18 个三对角矩阵, 每个三对角矩阵的维度为  $9 \times 9$ .

当 HIE-FDTD 方法中不引入等效参数概念时, 三对角矩阵的值可由沿  $z$  方向每一列的介质组合决定. 相同的介质组合对应的三对角矩阵是相同的. 因此可以找出模型中不同的介质组合, 求出这些不同介质组合对应的三对角矩阵即可. 如图 2 所

示, 虽然在  $x = 4$  这一截面有 18 组介质组合, 但多数介质组合是重复的, 不重复的介质组合只有 3 种, 如图 2 中阴影部分所示.

当 HIE-FDTD 方法中引入等效参数概念时, 参照传统 FDTD 等效参数计算方法,  $D_1, D_2$  中的  $\epsilon_{x\text{平均}}$  和  $\sigma_{x\text{平均}}$  是由  $(i, j, k), (i, j - 1, k), (i, j, k - 1)$  和  $(i, j - 1, k - 1)$  4 个网格的  $\epsilon$  和  $\sigma$  分别求平均得到, 而  $D_3, D_4$  中的  $\mu_{y\text{平均}}$  和  $\sigma_{my\text{平均}}$  则是由  $(i, j, k)$  和  $(i, j - 1, k)$  两个网格的  $\mu$  和  $\sigma_m$  分别求平均得到. 因此, 对于相同的介质组合, 其对应的三对角矩阵也不一定相同. 如图 2 中的  $y = 3$  和  $y = 4$  两列的介质组合相同, 但其对应的三对角矩阵的值却不同. 因此, 当在 HIE-FDTD 方法中引入等效参数概念时, 不可以再按照介质组合是否重复来缩减三对角矩阵数量.

由于三对角矩阵是基于  $\tau_1$  和  $\tau_2$  构建的, 因此可以从  $\tau_1$  和  $\tau_2$  入手寻求减少三对角矩阵数量的方法. 观察  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的计算公式可以发现,  $\tau_1$  和  $\tau_2$  的值是随空间位置变化的. 因此可以先计算出空间所有网格点的  $\tau_1$  和  $\tau_2$ , 然后将其按列 (沿  $z$  方向) 分别存储到二维矩阵  $T_1$  和  $T_2$  中. 在此基础上, 令  $T = \begin{bmatrix} T_1 \\ T_2 \end{bmatrix}$ , 则  $T$  矩阵中的每一列对应  $E_x^{n+1}$  求解时所需要构建的一个三对角矩阵.  $T_1$  矩阵、 $T_2$  矩阵和  $T$  矩阵的结构如图 3 所示, 其中,  $\tau_{1-i, j, k}$  表示空间位置  $(i, j, k)$  处的  $\tau_1$  值,  $\tau_{2-i, j, k}$  表示空间位置为  $(i, j, k)$  处的  $\tau_2$  值,  $N_z$  为计算区域沿  $z$  方向的网格数.

根据电磁目标的结构特征, 可以预见,  $T$  矩阵中可能存在一些相同的列, 基于这些相同的列所构建的三对角矩阵是完全相同的. 因此可以在构建三对角矩阵之前, 先剔除  $T$  矩阵中的重复列, 这样便可以有效减少三对角矩阵的数量. 在每一个时间步中计算  $E_x^{n+1}$  时, 只需要根据空间位置标记索引到对应的三对角矩阵进行求解即可.

图 1 所示模型结构简单, 网格规模较小. 实际中的模型往往结构复杂, 尺寸较大<sup>[26]</sup>. 为说明三对角矩阵缩减方法的有效性, 以图 1 模型中的目标部分为基础, 分别构建了  $5 \times 5$  和  $10 \times 10$  的目标阵列, 并在目标阵列外围各设置 2 层空气.  $5 \times 5$  目标阵列的网格规模为  $74 \times 74 \times 10$ ,  $10 \times 10$  目标阵列的网格规模为  $144 \times 144 \times 10$ . 分别采用直接法和缩减法对单目标模型和阵列目标模型进行

三对角矩阵构建及其逆矩阵计算. 两种方法需要构建的三对角矩阵数量、程序运行时间以及程序所需内存如表 1 所列. 由表 1 可见, 采用缩减法可以有效减少三对角矩阵数量, 有效降低程序运行所需内存, 有效缩短程序运行时间.

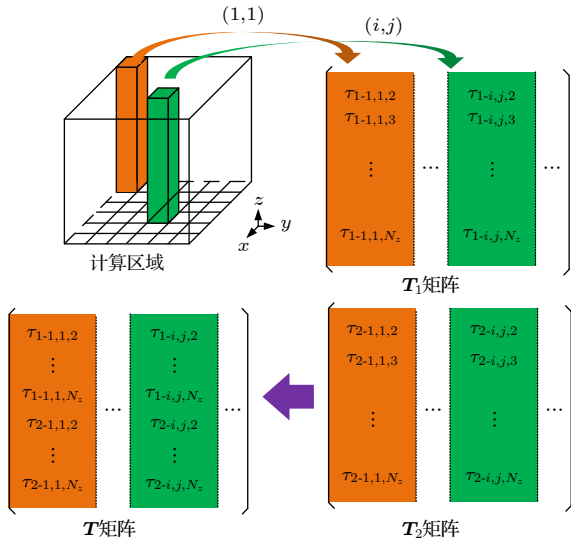


图 3  $T_1$  矩阵、 $T_2$  矩阵和  $T$  矩阵结构图

Fig. 3. Structure of  $T_1$ ,  $T_2$  and  $T$ .

表 1 直接法和缩减法对比结果

Table 1. Comparison results of the direct method and the reduction method.

计算方法	直接法			缩减法		
	1×1	5×5	10×10	1×1	5×5	10×10
三对角矩阵数量	684	11100	41760	12	12	12
程序运行时间/s	0.35	84.78	1299.4	0.02	0.20	0.51
程序所需内存/ MB	1.40	24.14	90.80	0.98	15.77	59.27

### 3 数值结果

为验证本文所提出的通用 HIE-FDTD 程序实现方法的有效性, 依据该方法编写了 Matlab 程序, 并用程序计算了两个数值算例, 分别为平面波照射介质板和双频微带倒 F 天线. 在这两个例子中, 目标的精细结构均位于  $z$  方向, 因此对于空间求导项  $\partial/\partial z$  采用混合显-隐式差分算法.

#### 3.1 平面波照射介质板模型

介质板由介质基板和金属表面涂层两部分组

成. 介质基板的介质参数为  $\epsilon_r = 2.2$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 0.04$ ,  $\sigma_m = 0$ . 介质基板沿  $x$  和  $y$  方向的长度均为 210 mm, 沿  $z$  方向的厚度为 0.2 mm. 金属涂层由  $5 \times 5$  个耶路撒冷十字组成, 厚度为 0.2 mm. 介质板结构及耶路撒冷十字尺寸如图 4 所示. 整个计算空间网格数为  $120 \times 120 \times 56$ . 网格大小分别为: 在空气中,  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = 5$  mm; 在介质基板和金属涂层中,  $\Delta x = \Delta y = 3$  mm,  $\Delta z = 0.1$  mm.

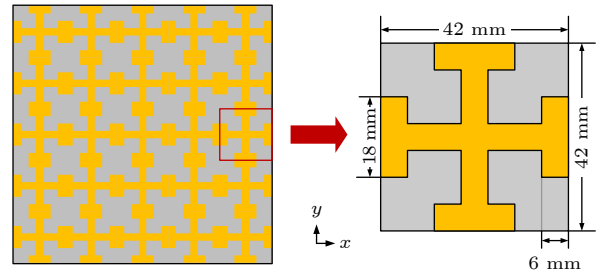


图 4 介质板结构及尺寸

Fig. 4. Structure and dimensions of the dielectric plate.

假设平面波从金属涂层一侧照射到介质板上, 在介质板中轴线上设置两个观察点, 计算观察点处电场的时域波形. 观察点 1 位于介质板有金属涂层一侧, 且距金属涂层的距离为 10.2 mm. 观察点 2 位于介质板无金属涂层一侧, 且距无金属涂层的距离为 10.2 mm. 平面波的激励源为高斯脉冲, 其时域表达式为

$$g(t) = \exp\left[-\frac{4\pi(t-t_0)^2}{\tau^2}\right], \quad (13)$$

其中,  $\tau = 3.5 \times 10^{-10}$ ,  $t_0 = 0.8\tau$ .

观察点 1 处  $E_x$  的时域波形如图 5(a) 所示, 观察点 2 处  $E_x$  的时域波形如图 5(b) 所示. 从图 5 可以看到, 通用 HIE-FDTD 程序的计算结果与传统 FDTD 程序的计算结果相符合. 从仿真时间上来看, 传统 FDTD 方法的仿真时间为 300 min, 而通用 HIE-FDTD 方法的仿真时间仅需 32 min, 约为传统 FDTD 方法仿真时间的 1/10. 此外, 采用直接法的 HIE-FDTD 程序的仿真时间为 45 min, 与通用 HIE-FDTD 程序仿真时间的差异主要是因为需构建更多三对角矩阵及其逆矩阵造成的. 可以预见, 当模型网格规模更大时, 采用直接法的 HIE-FDTD 程序的计算时间将会进一步增加.

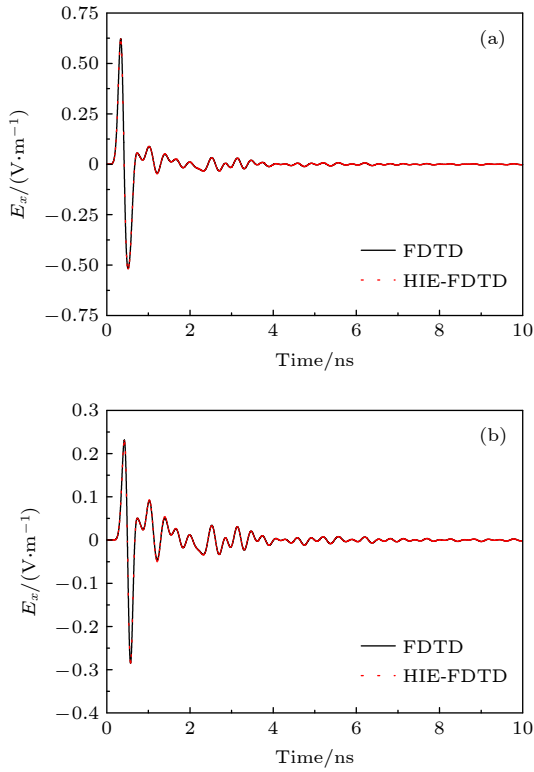


图 5 观察点处  $E_x$  的时域波形 (a) 观察点 1; (b) 观察点 2  
Fig. 5. Time domain waveforms of  $E_x$  at the observation point: (a) Observation point one; (b) observation point two.

### 3.2 双频微带倒 F 天线模型

双频微带倒 F 天线的结构如图 6 所示. 金属地板和倒 F 结构分别刻蚀在介质板的两侧. 介质基板的介质参数为  $\epsilon_r = 2.2$ ,  $\mu_r = 1$ ,  $\sigma = 0$ ,  $\sigma_m = 0$ . 介质基板沿  $x$  和  $y$  方向的长度分别为 38.4 和 39 mm, 沿  $z$  方向的厚度为 0.8 mm. 整个计算空间网格数为  $56 \times 54 \times 46$ , 且沿  $x$  和  $y$  方向的最小网格值为 2.4 mm, 沿  $z$  方向的最小网格值为 0.2 mm.

双频微带倒 F 天线的  $S_{11}$  仿真结果如图 7 所示. 可以看出, 倒 F 天线的工作频率为 2.43 和 4.97 GHz.

图 7 同时给出了传统 FDTD, HIE-FDTD 和 CST 仿真结果, 三条  $S_{11}$  曲线符合度较好. 图 8 给出了天线在 2.43 GHz 的辐射方向图, 图 9 给出了天线在 4.96 GHz 的辐射方向图. 从图 8 和图 9 可以看出 HIE-FDTD 的仿真结果与 CST 仿真结果基本一致. 从仿真时间上来看, 传统 FDTD 方法的仿真

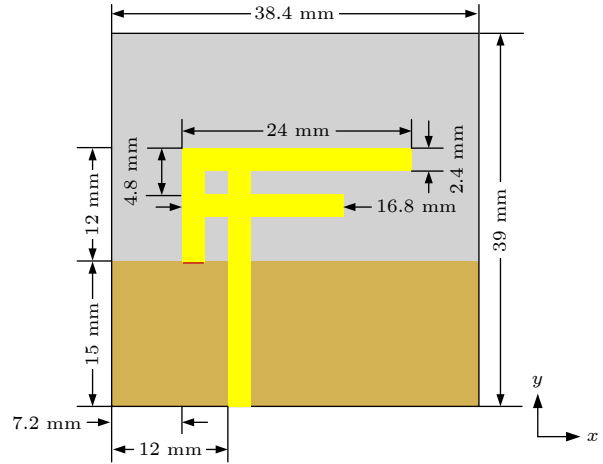


图 6 双频微带倒 F 天线结构图

Fig. 6. Structure of the dual-frequency microstrip inverted-F antenna.

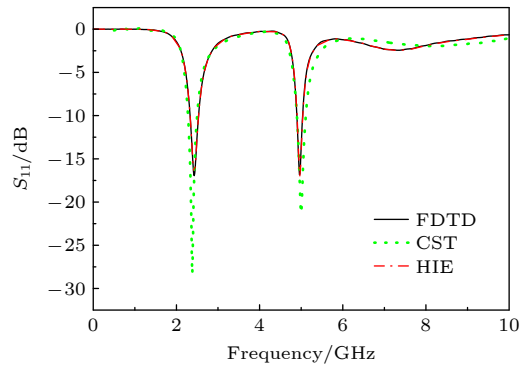


图 7 倒 F 天线  $S_{11}$

Fig. 7.  $S_{11}$  of the inverted-F antenna.

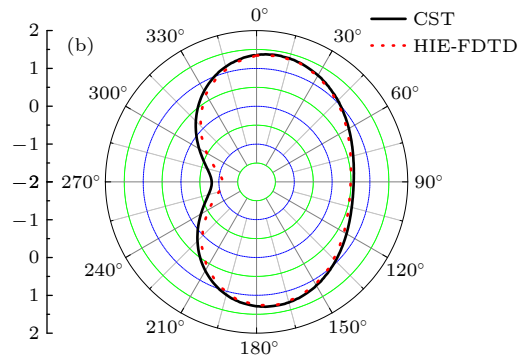
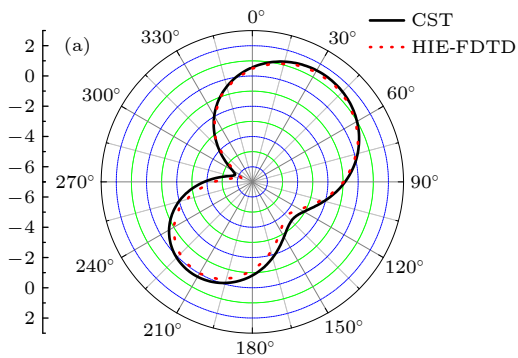


图 8 天线在 2.43 GHz 的辐射方向图 (a) XOY 面; (b) XOZ 面

Fig. 8. Radiation patterns of the inverted-F antenna at 2.43 GHz: (a) XOY plane; (b) XOZ plane.

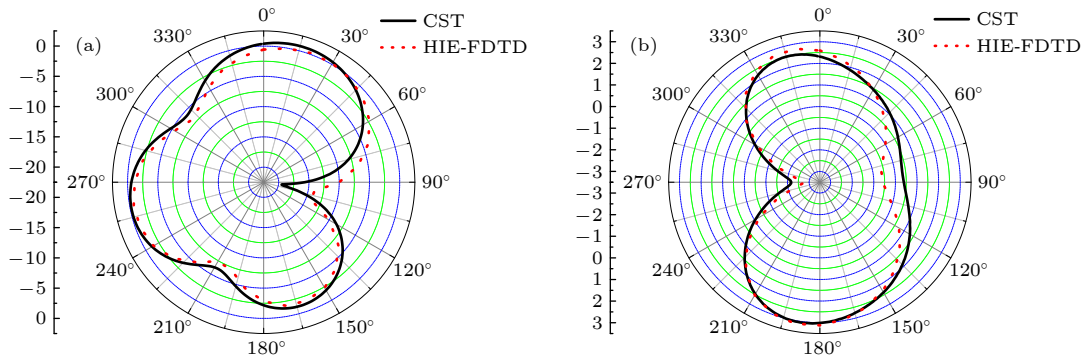


图9 天线在4.96 GHz的辐射方向图 (a) XOY面; (b) XOZ面

Fig. 9. Radiation patterns of the inverted-F antenna at 4.96 GHz: (a) XOY plane; (b) XOZ plane.

时间为420 s, 通用HIE-FDTD方法的仿真时间为90 s, 约为传统FDTD方法仿真时间的1/5. 此外, 采用直接法的HIE-FDTD程序的仿真时间为113 s. 可见当模型网格规模较小时, 缩减三对角矩阵数量方法对于总仿真时间的减少作用并不明显. 此时, 仿真时间主要由时间步长和仿真步数决定.

## 4 总结

本文提出了一种通用HIE-FDTD方法, 并依据该方法编写了一套通用HIE-FDTD程序. 使用该套程序可以实现对线性、非色散空间中, 在一维方向具有精细结构的任意电磁目标的仿真. 通用HIE-FDTD程序可实现三对角矩阵的自动构建, 并对三对角矩阵数量进行自动缩减, 使用一套程序即可实现对任意目标的模拟, 而不是像现有HIE-FDTD程序那样仿真一个模型便需要修改一次程序. 另外, 在通用HIE-FDTD方法中, 计算迭代系数时考虑了微分形式麦克斯韦方程在介质分界面失效的问题, 并引入等效参数方法解决这一问题. 在以往的HIE-FDTD文献和专著中均没有提到等效参数方法这一概念. 在通用HIE-FDTD基本公式中, 加入CPML吸收边界项, 使得通用HIE-FDTD程序不仅可以模拟封闭区域问题, 也能模拟开放区域问题. 使用通用HIE-FDTD程序仿真了平面波照射介质板模型以及双频微带倒F天线模型, 仿真结果与传统FDTD仿真结果以及CST软件仿真结果相符合, 且通用HIE-FDTD程序的仿真时间远少于传统FDTD的仿真时间. 本文提出的通用HIE-FDTD方法只适用于非色散空间, 后续研究中可结合辅助方程等方法将其扩展到色散空间, 使其应用范围更加广泛.

## 参考文献

- [1] Yee K S 1966 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **14** 302
- [2] Taflov A, Hagness S C 2005 *Computational Electrodynamics: The Finite-Difference Time-Domain Method* (3rd Ed.) (Norwood: Artech House) pp107-167
- [3] Kim Y H, Choi H, Cho J, Jung K Y 2020 *J. Electr. Eng. Technol.* **15** 1281
- [4] Zhang Y X, Feng N X, Wang L X, Guan Z, Liu Q H 2020 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **68** 366
- [5] Li B H, Du Y P, Chen M L, Li Z 2021 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **63** 762
- [6] Kim Y J, Jung K Y 2021 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **69** 6600
- [7] Yang L X, Liu C, Li Q L, Yan Y B 2022 *Acta Phys. Sin.* **71** 064101 (in Chinese) [杨利霞, 刘超, 李清亮, 闫玉波 2022 物理学报 **71** 064101]
- [8] Ye Z H, Zhang J, Zhou J J, Gou D 2020 *Acta Phys. Sin.* **69** 060701 (in Chinese) [叶志红, 张杰, 周健健, 苟丹 2020 物理学报 **69** 060701]
- [9] Fang Y 2020 *Ph. D. Dissertation* (Xi'an: Xi'an University of Technology) (in Chinese) [方云 2020 博士学位论文 (西安: 西安理工大学)]
- [10] Huang B K, Wang G, Jiang Y S, Wang W B 2003 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **39** 97
- [11] Chen J, Wang J G 2006 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **48** 2291
- [12] Chen J, Wang J G 2007 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **49** 1001
- [13] Chen J, Xu N, Zhang A X, Guo J Y 2016 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **64** 3011
- [14] Zhai M L, Peng H L, Li D M, Wang D W, Xie H, Yin W Y 2017 *Int. J. Numer. Modell.* **30** e2250
- [15] Xu N, Chen J, Wang J G, Qin X J, Shi J P 2017 *IET Microwaves Antennas Propag.* **11** 92
- [16] Chen J, Guo J Y, Tian C M 2018 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **60** 362
- [17] Zhang K L, Wang L, Wang M J, Zheng H X, Li E 2020 *Int. J. RF Microwave Comput. Aided Eng.* **30** e22151
- [18] Chen J, Wang J G 2007 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **55** 3603
- [19] Cui Y L, Chen B, Xiong R, Mao Y F 2013 *J. Electromagn. Waves Appl.* **27** 529
- [20] Unno M, Asai H 2011 *IEEE Microwave Wireless Compon. Lett.* **21** 453
- [21] Ge D B, Yan Y B 2005 *Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetic Waves* (3rd Ed.) (Xian: Xidian

- University Press) pp9–27 (in Chinese) [葛德彪, 闫玉波 2005 电磁波时域有限差分方法 (第三版) (西安: 西安电子科技大学出版社) 第9–27页]
- [22] Atef Z, Elsherbeni, Demir V 2015 *The Finite-Difference Time-Domain Method for Electromagnetics with MATLAB Simulations* (2nd Ed.) (Scotland: SciTech Publishing) pp43–48
- [23] Chen J, Wang J G, Xu N 2016 *Weakly Conditionally Stable Finite-Difference Time-Domain Method* (Beijing: Science Press) pp63–69 (in Chinese) [陈娟, 王建国, 许宁 2016 弱条件稳定时域有限差分方法 (北京: 科学出版社) 第63–69页]
- [24] Chen J, Wang J G 2013 *Appl. Comput. Electromagnet.* **28** 680
- [25] Roden J A, Gedney S D 2000 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **27** 334
- [26] Wang X Z, Gao J S, Xu N X 2013 *Acta Phys. Sin.* **62** 237302 (in Chinese) [王秀芝, 高劲松, 徐念喜 2013 物理学报 **62** 237302]

## Universal HIE-FDTD method and program implementation for one-dimensional fine structure electromagnetic target simulation\*

Mou Chun-Hui<sup>1)</sup> Chen Juan<sup>1)2)†</sup> Fan Kai-Hang<sup>1)</sup> Lu Yi<sup>1)</sup>

1) (*School of Information and Communications Engineering, Xi'an Jiaotong University, Xi'an, 710049, China*)

2) (*Shenzhen Research School, Xi'an Jiaotong University, Shenzhen 518057, China*)

( Received 14 April 2022; revised manuscript received 30 May 2022 )

### Abstract

The hybrid implicit-explicit finite-difference time-domain (HIE-FDTD) method is a weakly conditionally stable finite-difference time-domain (FDTD) method. The time step size of the HIE-FDTD method is only confined by the two coarse spatial cell sizes, so it is widely used in the simulation of electromagnetic targets with fine structures along one direction. In this work, the basic iterative formulations of the HIE-FDTD method are proposed by approximating the formulations of the FDTD method. In these formulations, the iterative coefficients are marked with spatial grid numbers. Therefore, the coefficients can be calculated automatically according to the medium parameters of the spatial cells by indexing the grid numbers. Since the triangular matrix which is used to calculate the electric field is based on the iterative coefficients, the triangular matrix can also be updated automatically. In addition, a method to reduce the number of tridiagonal matrices is proposed in this work, which can effectively reduce the calculation memory and improve the calculation efficiency. In the proposed HIE-FDTD method, equivalent parameters are employed at the interfaces of different media and the convolution perfectly matched layer boundary condition is used to truncate the computational region. Based on the proposed HIE-FDTD method, a series of programs are implemented, which can simulate arbitrary electromagnetic targets with fine structure in one dimension in linear and non-dispersive space. A dielectric plate irradiated by planar wave and a dual-frequency microstrip inverted F antenna are simulated by using these programs. The numerical results are in good agreement with those from the traditional FDTD method and CST software, and the computational efficiency of the proposed HIE-FDTD method is greatly improved in comparison with that of the traditional FDTD method. This study provides a reliable simulation tool for the wide application of the HIE-FDTD method.

**Keywords:** electromagnetic target, hybrid implicit-explicit finite-difference time-domain, equivalent parameter, convolution perfectly matched layer

**PACS:** 41.20.Jb, 47.11.Bc, 02.70.–c

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220695

\* Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2020YFA0709800) and the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 61971340).

† Corresponding author. E-mail: [chen.juan.0201@mail.xjtu.edu.cn](mailto:chen.juan.0201@mail.xjtu.edu.cn)



适用于一维精细结构电磁目标模拟的通用HIE-FDTD方法及程序实现

牟春晖 陈娟 范凯航 鲁艺

**Universal HIE-FDTD method and program implementation for one-dimensional fine structure electromagnetic target simulation**

Mou Chun-Hui Chen Juan Fan Kai-Hang Lu Yi

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 184101 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220695

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220695>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

基于时域有限差分法的核壳双金属纳米颗粒光吸收率反转行为

Reversal behavior of optical absorption rate of bimetallic core-shell nanoparticles based on finite-difference time-domain method  
物理学报. 2021, 70(20): 207801 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210602>

非水平海底情况下海底地震波时域有限差分数值模拟

Seabed seismic wave simulation by finite difference time domain scheme in marine environment with complex seafloor topography  
物理学报. 2021, 70(22): 224303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210634>

有耗介质层上多导体传输线的电磁耦合时域分析方法

Time domain hybrid method for coupling analysis of multi-conductor transmission lines on the lossy dielectric layer excited by ambient wave  
物理学报. 2020, 69(6): 060701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191214>

完美吸收体、电磁“黑洞”以及内置完美匹配层的吸收特性

Absorption characteristics of perfect absorber, electromagnetic “black hole” and inner perfectly matched layer  
物理学报. 2020, 69(15): 154201 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200110>

一种新的基于频域有限差分方法的小周期有机太阳能电池的光电特性

Optical and electrical properties of short-pitch solar cells with finite-difference frequency-domain method  
物理学报. 2018, 67(17): 178102 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180821>

海洋可控源三维电磁响应显式灵敏度矩阵的快速算法

An efficient algorithm of three-dimensional explicit electromagnetic sensitivity matrix in marine controlled source electromagnetic measurements  
物理学报. 2021, 70(6): 069101 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20201282>