

# 可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学\*

马赞娥 乔鑫 高瑞 梁俊成 张爱霞 薛具奎†

(西北师范大学物理与电子工程学院, 兰州 730070)

(2022年4月14日收到; 2022年6月9日收到修改稿)

研究了在周期驱动拉曼耦合下的可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的能带结构、非线性朗道-齐纳隧穿动力学以及隧穿率. 利用高频近似得到了与时间无关的 Floquet 哈密顿量, 发现周期驱动可以有效地调控自旋-轨道耦合和非线性相互作用. 与两能级模型对比, 解析地得到了能带出现 loop 的临界条件以及 loop 的宽度. 研究发现, 当种内原子间相互作用等于种间原子间相互作用时, 不出现 loop 结构. 而当种内原子间相互作用小于 (大于) 种间原子间相互作用时, loop 出现在下 (上) 能带. 此时, 自旋-轨道耦合和拉曼耦合都会抑制 loop 的出现. 特别地, 通过调节外部驱动能控制能带出现 loop 结构的临界条件. 还研究了可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学. 通过调节周期驱动强度可以调控系统的隧穿动力学, 控制在动量空间发生非线性朗道-齐纳隧穿的位置, 并使系统的自旋组分发生翻转. 最后计算了系统的朗道-齐纳隧穿率, 研究表明周期驱动能够有效调控系统的隧穿率.

**关键词:** 玻色-爱因斯坦凝聚体, 自旋-轨道耦合, 非线性能带结构, 朗道-齐纳隧穿

**PACS:** 03.75.Lm, 67.85.Hj, 05.30.Jp

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220697

## 1 引言

冷原子中合成人工自旋-轨道耦合的实现使得研究高度可控的玻色-爱因斯坦凝聚体中的许多奇异的量子现象成为可能<sup>[1-3]</sup>. 在固态材料中, 电子在晶体的本征电场中的运动产生了自旋-轨道耦合, 而对中性原子来说可以通过控制光与原子的相互作用来实现, 2011年由 NIST 小组<sup>[4]</sup>首次在实验上设计实现. 目前已经展开了很多关于自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的理论研究, 如隧穿动力学、基态相图<sup>[5-8]</sup>、非线性动力学<sup>[9-13]</sup>、非常规集体

偶极振荡<sup>[14]</sup>、晶格中超流到莫特绝缘体的转变<sup>[15]</sup>、条纹相内激发谱中的超固体特征<sup>[16,17]</sup>以及有趣的相对论效应模拟<sup>[18,19]</sup>. 对于双组分自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体, 其能带有两条, 呈双阱结构且随着相互作用的增大能带出现 loop 结构. 这与普通的玻色-爱因斯坦凝聚体完全不同, 极大丰富了系统的基态相变<sup>[5,7,20,21]</sup>和集体动力学<sup>[9,22-24]</sup>. 最近的理论研究表明, 通过施加弱驱动力加速可以导致系统两个能带之间发生朗道-齐纳隧穿, 这在实验和理论上都得到了证实<sup>[25-27]</sup>.

在过去的几年中, 周期驱动量子系统引起了越来越多的关注<sup>[28]</sup>. 实验上通过周期驱动来实现一

\* 国家自然科学基金 (批准号: 12164042, 11764039, 11865014, 11847304)、甘肃省自然科学基金 (批准号: 17JR5RA076, 20JR5RA526)、甘肃省高等学校科研基金 (批准号: 2016A-005)、甘肃省高等学校创新能力提升项目 (批准号: 2020A-146, 2019A-014)、西北师范大学科技创新项目 (批准号: NWNNU-LKQN-18-33) 和甘肃省教育厅优秀研究生创新之星项目 (批准号: 2021CXZX-180) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: xuejk@nwnu.edu.cn

个有效 Floquet 哈密顿量,使得量子系统的物理可被与时间无关的有效 Floquet 哈密顿控制<sup>[29,30]</sup>,从而实现了可调自旋-轨道耦合<sup>[31]</sup>.在自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中,周期驱动也被用于诱导和调控光晶格系统中的自旋-轨道耦合<sup>[32]</sup>,即可以通过快速相干调制拉曼激光强度来调控<sup>[33,34]</sup>.在深光晶格中可调自旋-轨道耦合的玻色-爱因斯坦凝聚体也可产生平带和动力学局域化<sup>[29,35]</sup>.最近发现,自由空间中可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的相变可通过外部驱动调节<sup>[36]</sup>.因此,可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中有着丰富的能带结构和动力学现象,是一个非常意义的研究系统.但是,通过拉曼耦合的周期性驱动如何调控系统的能带结构和隧穿动力学仍不清楚,因此本文深入研究了可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的能带结构和隧穿动力学.

与两能级模型对比,解析地得到了能带出现 loop 的临界条件以及 loop 的宽度.研究发现,当种内原子间相互作用等于种间原子间相互作用时,不出现 loop 结构,而当种内原子间相互作用小于(大于)种间原子间相互作用时,loop 出现在下(上)能带.此时,自旋-轨道耦合和拉曼耦合都会抑制 loop 的出现.有趣的是,出现 loop 的临界条件和 loop 宽度随周期驱动强度呈周期性变化.能带不存在 loop 结构时,周期驱动强度不改变系统的动力学,即原子沿能带平稳的演化发生了自旋交换.当出现 loop 结构时,周期驱动强度的变化使得系统的动力学出现了从非线性朗道-齐纳隧穿到自旋交换动力学的周期性变化,并且使得系统的自旋组分发生了翻转.特别地,周期驱动强度的变化可以精确调控发生非线性朗道-齐纳隧穿动力学的位置.最后计算了系统的隧穿率,研究表明系统的隧穿率可由自旋-轨道耦合、拉曼耦合和周期驱动强度操控.

## 2 理论模型和能带结构

### 2.1 理论模型

考虑由 Rashba 型和 Dresselhaus 型等权叠加的赝自旋为 1/2 的自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体.在平均场近似下,玻色-爱因斯坦凝聚体可由以下无量纲的 Gross-Pitaevskii (G-P) 方程描述<sup>[29]</sup>:

$$i \frac{\partial \Phi}{\partial t} = (\mathbf{H}_0 + \mathbf{H}_I) \Phi, \quad (1)$$

其中,  $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)^T$  是两组分凝聚体波函数,而系统单粒子哈密顿量  $\mathbf{H}_0 = 1/2(p_x - k_0 \hat{\sigma}_z)^2 + \Omega/2 \hat{\sigma}_x + V_{\text{ext}}$ , 其中  $p_x$  是  $x$  方向的动量算符,  $k_0$  是自旋-轨道耦合强度,  $\Omega$  是拉曼耦合,  $V_{\text{ext}}$  是外部囚禁势,  $\hat{\sigma}_i$  是泡利矩阵.  $\mathbf{H}_I$  是系统原子间相互作用哈密顿量.无量纲的两体相互作用可以表示为<sup>[37]</sup>

$$\mathbf{H}_I = \begin{pmatrix} g_{11}|\Phi_1|^2 + g_{12}|\Phi_2|^2 & 0 \\ 0 & g_{22}|\Phi_2|^2 + g_{12}|\Phi_1|^2 \end{pmatrix}, \quad (2)$$

不失一般性,考虑  $g_{11} = g_{22} = g$ .

为了实现可调的自旋-轨道耦合,考虑一个周期性驱动的拉曼耦合,

$$\Omega(t) = \Omega_0 + \Omega_M \cos(\omega t), \quad (3)$$

其中,  $\Omega_0$  是拉曼耦合的常数部分,  $\Omega_M$  是调制振幅,  $\omega$  是调制频率,该方案可以在实验中通过改变拉曼激光强度实现.调制频率  $\omega$  的选择比系统中的其他能量尺度要大得多,在这种高频情况下,可以用高频近似来抵消拉曼耦合中随时间变化的调制项,这已被数值模拟及实验结果证实<sup>[29,30]</sup>.为此,引入么正变换<sup>[34]</sup>:

$$\Psi = U^\dagger \Phi, \quad U = \exp \left[ -\frac{i\Omega_M \sin(\omega t)}{2\omega} \hat{\sigma}_x \right], \quad (4)$$

其中  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$  是变换后的凝聚体波函数.

因此,根据 Floquet 理论<sup>[34]</sup>变换之后的哈密顿量可以表示为

$$\overline{\mathbf{H}}_0 = \frac{1}{2}(p_x^2 + k_0^2) - J_0(\chi)k_0 p_x \hat{\sigma}_z + \frac{\Omega_0}{2} \hat{\sigma}_x + V_{\text{ext}}, \quad (5)$$

其中,  $J_0(\chi)$  是第一类零阶贝塞尔函数,  $\chi = \Omega_M/\omega$  是拉曼耦合的周期性驱动强度.此时两体相互作用的哈密顿量变换为

$$\overline{\mathbf{H}}_I = \begin{pmatrix} g_1|\Psi_1|^2 + g_2|\Psi_2|^2 & g_3(\Psi_1\Psi_2^* - \Psi_2\Psi_1^*) \\ g_3(\Psi_2\Psi_1^* - \Psi_1\Psi_2^*) & g_2|\Psi_1|^2 + g_4|\Psi_2|^2 \end{pmatrix}, \quad (6)$$

其中,

$$\begin{aligned} g_1 &= \frac{1}{4}[g_{12} + 3g + (g - g_{12})J_0(2\chi)], \\ g_2 &= \frac{1}{4}[3g_{12} + g - (g - g_{12})J_0(2\chi)], \\ g_3 &= \frac{1}{4}(g - g_{12})[1 - J_0(2\chi)], \\ g_4 &= \frac{1}{4}[g_{12} + 3g + (g - g_{12})J_0(2\chi)]. \end{aligned} \quad (7)$$

发现经过高频近似后系统在非对角项中出现了新

的相互作用项  $g_3$ , 这是由于相互作用不具有  $SU(2)$  对称性 (即  $g \neq g_{12}$ ) 所导致的. 如果相互作用具有  $SU(2)$  对称性 (即  $g = g_{12}$ ), 则非对角项消失, 此时相互作用与周期调制无关. 从物理上看, 相互作用哈密顿量非对角项出现的原因是  $g \neq g_{12}$  时相互作用哈密顿量和自旋算符  $\hat{\sigma}_x$  不对易, 相互作用哈密

顿量和自旋算符  $\hat{\sigma}_x$  没有共同的本征函数系, 所以进行自旋相关的么正变换以后相互作用哈密顿量就会出现非对角的矩阵元.

假设试探波函数  $\Psi = e^{ik_x} \varphi$  ( $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ ), 不考虑外部囚禁势 ( $V_{\text{ext}} = 0$ ), 将试探波函数代入 G-P 方程可得到如下玻色-爱因斯坦凝聚体的动力学方程:

$$\begin{aligned} i \frac{d\varphi_1(t)}{dt} &= \left[ \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k_0^2 - J_0(\chi)k_0k + g_1|\varphi_1(t)|^2 + g_2|\varphi_2(t)|^2 \right] \varphi_1(t) + \left[ \frac{\Omega_0}{2} + g_3(\varphi_1\varphi_2^* - \varphi_2\varphi_1^*) \right] \varphi_2(t), \\ i \frac{d\varphi_2(t)}{dt} &= \left[ \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k_0^2 + J_0(\chi)k_0k + g_2|\varphi_1(t)|^2 + g_4|\varphi_2(t)|^2 \right] \varphi_2(t) + \left[ \frac{\Omega_0}{2} + g_3(\varphi_2\varphi_1^* - \varphi_1\varphi_2^*) \right] \varphi_1(t), \end{aligned} \quad (8)$$

考虑系统的基态, 假设  $\varphi = e^{-i\mu t} \phi$  ( $\phi = (\phi_1, \phi_2)^T$ ), 可得到系统的能量方程:

$$\begin{aligned} \mu\phi_1 &= \left[ \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k_0^2 - J_0(\chi)k_0k + g_1|\phi_1|^2 + g_2|\phi_2|^2 \right] \phi_1 + \frac{\Omega_0}{2} \phi_2, \\ \mu\phi_2 &= \left[ \frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k_0^2 + J_0(\chi)k_0k + g_2|\phi_2|^2 + g_4|\phi_2|^2 \right] \phi_2 + \frac{\Omega_0}{2} \phi_1, \end{aligned} \quad (9)$$

数值求解方程 (9) 可得到系统在不同相互作用关系下的能带结构. 对于双组分的自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体, 系统能带有两条. 从方程 (9) 可以看出, 周期驱动拉曼耦合修正了系统的自旋-轨道耦合项和非线性相互作用项. 因此可以通过周期驱动拉曼耦合调控系统的基态能量  $\mu$  进一步改变系统的基态能带结构.

## 2.2 能带结构

图 1 是在不同系统参数下的能带. 显然, 系统的能带结构可以由周期驱动强度  $\chi$  调控. 从图 1 可以发现, 能带在  $k = 0$  处出现了 loop 结构, 且随着相互作用关系的变化, loop 可出现在上能带或下能带. 当种内原子间相互作用小于种间原子间相互作用时 ( $g < g_{12}$ ) loop 出现在下能带, 且随着周期驱动强度  $\chi$  的增加 loop 宽度逐渐减小出现尖点, 见图 1(a1) 和图 1(a2). 而当种内原子间相互作用大于种间原子间相互作用时 ( $g > g_{12}$ ), loop 出现在上能带, 此时增加周期驱动强度  $\chi$  也使得能带的 loop 宽度减小并且出现尖点, 直至能带光滑, 见图 1(c1) 和图 1(c2). 特别地, 当两者相等时 ( $g = g_{12}$ ), 不出现 loop 结构. 此时虽然增大了周期驱动强度  $\chi$ , 但是能带中仍然不出现 loop 结构, 仅改变了能带的形状, 见图 1(b1) 和图 1(b2). 如图 1 的第一列和第三列所示, 自旋-轨道耦合和拉曼耦合增大可以有效减小 loop 的宽度. 因此系统 loop 结构的存在

由自旋-轨道耦合、拉曼耦合和周期驱动强度的耦合效应所决定, 实验中可以通过改变周期驱动的驱动强度有效操控 loop 的出现.

为了详细研究图 1 中所展示的各参数对能带结构的影响, 下面将其映射到非线性两能级模型中, 研究能带出现 loop 结构的临界条件. 通过使用归一化条件  $|\phi_1|^2 + |\phi_2|^2 = 1$ , 可以将方程 (9) 写成  $\mu_{\text{ntl}}\phi = H_{\text{ntl}}\phi$ , 其中

$$\begin{aligned} \mu_{\text{ntl}} &= \mu \mp (g_{12} - g)/2 - k^2/2 - k_0^2/2, \\ g_2 - g_1 &= -(g_4 - g_2) = \frac{g_{12} - g}{2}(1 + J_0(2\chi)). \end{aligned}$$

则非线性两能级哈密顿量可写为如下形式:

$$\begin{aligned} H_{\text{ntl}} &= [-J_0(\chi)k_0k]\sigma_z + \frac{g_{12} - g}{4}[1 + J_0(2\chi)](|\phi_2|^2 \\ &\quad - |\phi_1|^2)\sigma_z + \frac{\Omega_0}{2}\sigma_x, \end{aligned} \quad (10)$$

其中  $\sigma_i$  是泡利矩阵. (10) 式中第一项是等效自旋-轨道耦合能, 第二项是等效非线性相互作用能, 第三项是拉曼耦合能. 拉曼耦合使上下能带发生耦合, 并使能带免交叉, 且在  $k = 0$  处产生间距为  $\Omega_0$  的带隙. 而能带在  $k = 0$  处出现 loop 结构主要是拉曼耦合能和等效相互作用能之间竞争的结果. 只有当等效非线性相互作用能占优, 即等效非线性相互作用能大于拉曼耦合能 ( $\frac{|g_{12} - g|}{2}(1 + J_0(2\chi)) > \Omega_0$ ) 时能带才会出现 loop 结构. 当种内原子间相互作

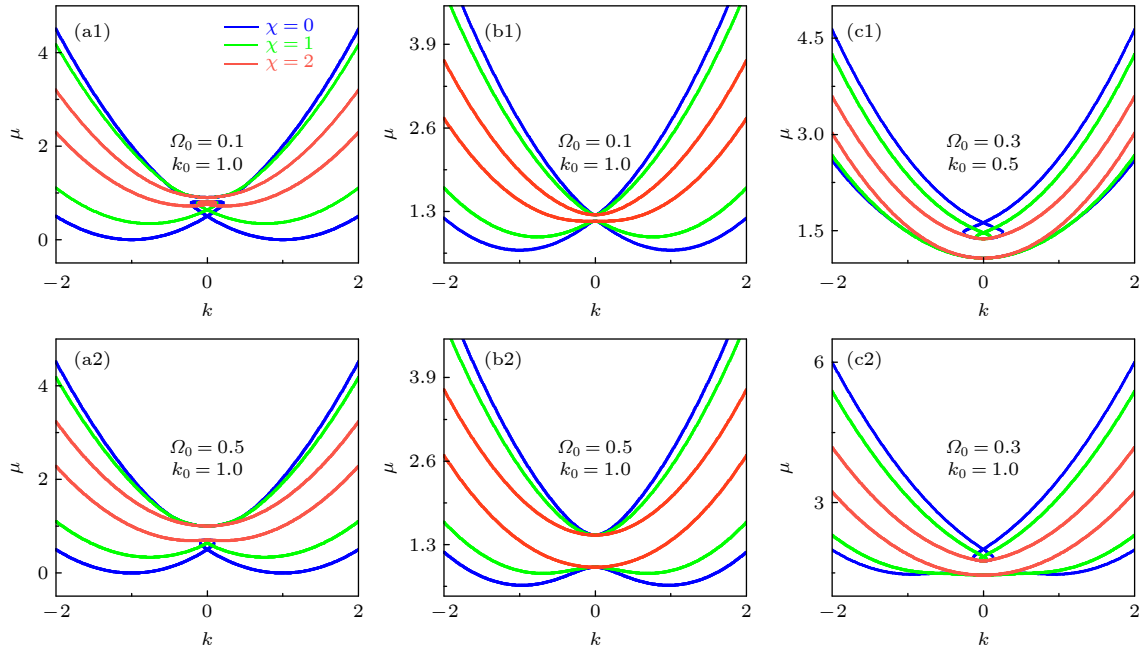


图 1 动量空间中不同相互作用关系下的能带结构 (a1), (a2)  $g = 0.0 < g_{12} = 0.7$ ; (b1), (b2)  $g = g_{12} = 0.7$ ; (c1), (c2)  $g = 1.5 > g_{12} = 0.7$

Fig. 1. Energy band structure in momentum space under different interactions: (a1), (a2)  $g = 0.0 < g_{12} = 0.7$ ; (b1), (b2)  $g = g_{12} = 0.7$ ; (c1), (c2)  $g = 1.5 > g_{12} = 0.7$ .

用与种间原子间相互作用相等时 ( $g_{12} = g$ ), 等效相互作用能为 0, 此时能带无法出现 loop 结构. 则可以得到出现 loop 结构的临界条件为  $\frac{|g_{12} - g|}{2} [1 + J_0(2\chi)] = \Omega_0$ . loop 结构出现在上能带还是下能带是由等效非线性相互作用是吸引还是排斥决定的. 当种间原子相互作用占优时 (即  $g < g_{12}$ ),  $\frac{g_{12} - g}{2} [1 + J_0(2\chi)] > 0$ , 等效非线性相互作用能为排斥的, loop 结构出现在下能带, 而当种内原子间相互作用占优时 (即  $g > g_{12}$ ),  $\frac{g_{12} - g}{2} [1 + J_0(2\chi)] < 0$ , 等效非线性相互作用能为吸引的, loop 出现在上能带. 为了更为直接地展示不同参数对出现 loop 结构的影响, 在图 2 中给出了不同种内原子间相互作用下, 出现 loop 结构的临界拉曼耦合  $\Omega_0$  的变化图. 可以看出,  $g$ - $\Omega_0$  平面对于固定的种内原子间相互作用  $g$ , 存在一个临界拉曼耦合  $\Omega_c$ , 只有  $\Omega_0 < \Omega_c$  能带才能出现 loop 结构, 而且临界拉曼耦合随着周期驱动强度  $\chi$  的增大先减小后增大. 当  $g < g_{12}$  时, 等效非线性相互作用是排斥的, 下能带出现 loop 结构. 而  $g > g_{12}$  时, 等效非线性相互作用是吸引的, 上能带出现 loop 结构, 并且  $\Omega_c$  随着  $|g_{12} - g|$  的增大而增大.

从图 2 可以看出, 周期驱动强度对能带出现 loop 结构有着非常显著的影响. 为了更直观地展示

周期驱动强度对于出现 loop 结构的临界条件的影响, 图 3(a) 和图 3(b) 分别给出了  $g < g_{12}$  和  $g > g_{12}$  情况下随周期驱动强度  $\chi$  变化的出现 loop 结构的临界拉曼耦合图. 可以看出, 与图 2 类似, 在  $\chi$ - $\Omega_0$  平面内对于一个确定的驱动强度  $\chi$ , 存在一个临界拉曼耦合  $\Omega_c$ , 且  $\Omega_c$  随着种内原子间相互作用  $g$  的

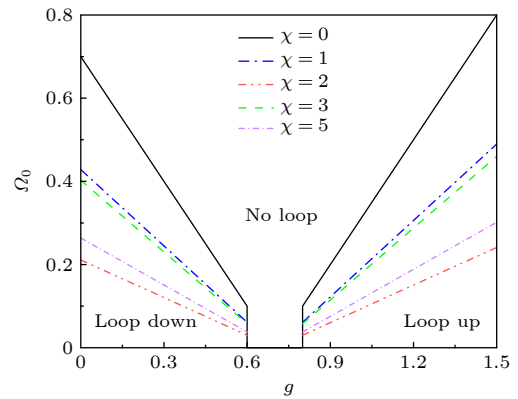


图 2 不同周期驱动强度下能带出现 loop 结构的临界拉曼耦合  $\Omega_0$  随种内原子间相互作用的变化规律.  $g_{12} = 0.7$ . 图中“Loop down”表示 loop 出现在下能带, “Loop up”表示 loop 出现在上能带

Fig. 2. Critical Raman coupling  $\Omega_0$  as a function of intra-species atomic interaction for different periodic driving strength with  $g_{12} = 0.7$ . “Loop down” means that the loop appears in lower band, while “Loop up” means that the loop appears in upper band.

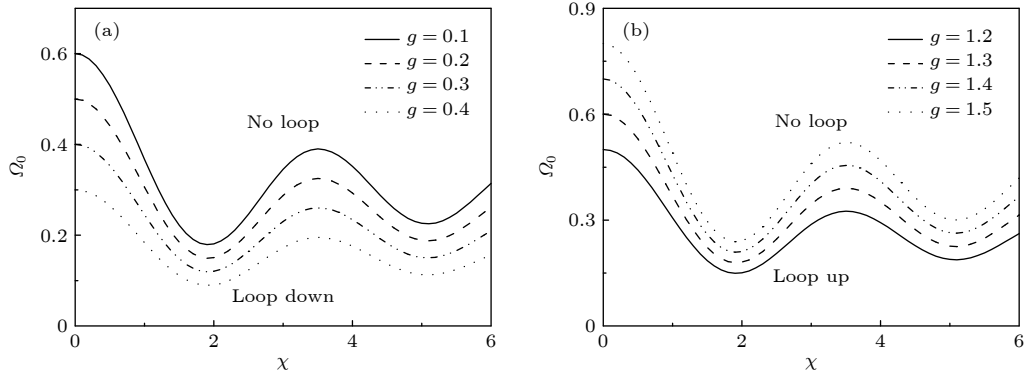


图 3 不同种内原子间相互作用下出现 loop 的临界拉曼耦合  $\Omega_0$  随周期驱动强度  $\chi$  的变化规律 (a)  $g < g_{12}$ ; (b)  $g > g_{12}$ .  $g_{12} = 0.7$ . 图中“Loop down”表示 loop 出现在下能带, “Loop up”表示 loop 出现在上能带

Fig. 3. Critical Raman coupling  $\Omega_0$  as a function of periodic driving strength for different intraspecies atomic interaction: (a)  $g < g_{12}$ ; (b)  $g > g_{12}$ . The other parameters are  $g_{12} = 0.7$ . “Loop down” means that the loop appears in lower band, while “Loop up” means that the loop appears in upper band.

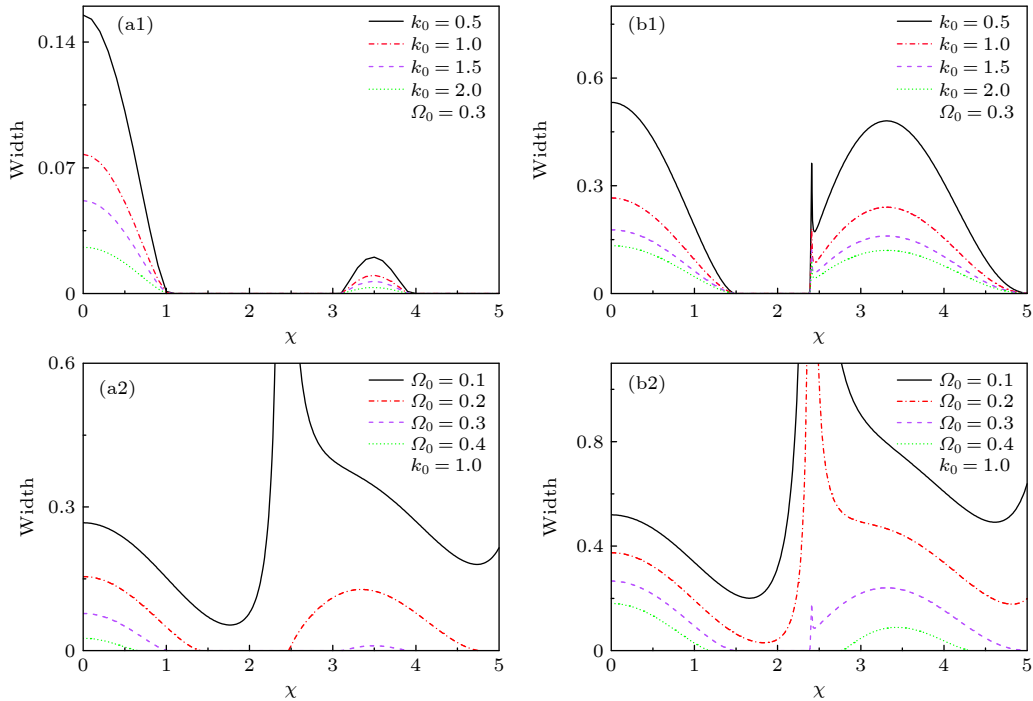


图 4 (a1), (a2)  $g < g_{12}$  ( $g = 0.2 < g_{12} = 0.7$ ) 时不同自旋-轨道耦合强度  $k_0$  下 loop 宽度随  $\chi$  的变化规律 ( $\Omega_0 = 0.3$ ); (b1), (b2)  $g > g_{12}$  ( $g = 1.5 > g_{12} = 0.7$ ) 时不同拉曼耦合  $\Omega_0$  下 loop 宽度随  $\chi$  的变化规律 ( $k_0 = 1$ )

Fig. 4. (a1), (a2) Loop width as a function of  $\chi$  for various spin-orbit coupled strength  $k_0$  when  $g < g_{12}$  ( $g = 0.2 < g_{12} = 0.7$ ) with  $\Omega_0 = 0.3$ ; (b1), (b2) loop width as a function of  $\chi$  for various Raman coupling  $\Omega_0$  when  $g > g_{12}$  ( $g = 1.5 > g_{12} = 0.7$ ) with  $k_0 = 1$ .

变化而变化. 当种内原子间相互作用  $g$  一定时, 临界拉曼耦合  $\Omega_c$  的值随着周期驱动强度  $\chi$  的增大先减小后增大之后又减小, 呈周期性变化. 总的来说, 能带中出现 loop 的临界拉曼耦合  $\Omega_c$  随着周期驱动  $\chi$  的变化呈贝塞尔函数型变化. 周期驱动通过调控自旋-轨道耦合能和等效非线性相互作用能的大小, 进而改变能带出现 loop 的临界条件和 loop 结构的大小. 但改变周期驱动强度并不能改变等效非线性

相互作用能的符号, 因此仅改变 loop 结构的大小.

能带中出现 loop 后, 其在动量空间存在的区域为  $-k_c \leq k \leq k_c$ , 其中

$$k_c = \frac{\left[ \frac{1}{2}(g_{12} - g)(1 + J_0(2\chi)) \right]^{\frac{2}{3}} - \Omega_0^{\frac{3}{2}}}{2k_0 J_0(\chi)} \quad [38,39],$$

因此 loop 的宽度为  $2k_c$ . 图 4 详细展示了自旋-轨

道耦合强度  $k_0$ 、拉曼耦合  $\Omega_0$  和周期驱动强度  $\chi$  在  $g < g_{12}$  (图 4(a1) 和图 4(a2)) 和  $g > g_{12}$  (图 4(b1) 和图 4(b2)) 的情况下对 loop 宽度的耦合效应. 当  $g < g_{12}$  且  $\Omega_0$  一定时, loop 宽度随着周期驱动强度  $\chi$  的增加先减小至 0 后又增加, 继续增大  $\chi$ , loop 宽度又减小 (图 4(a1)). 同样可以发现,  $g > g_{12}$  且  $\Omega_0$  一定时, 周期驱动强度对 loop 宽度的影响与  $g < g_{12}$  时相同 (图 4(a2)). 从图 4 也可以看出, 当周期驱动强度  $\chi$  一定时, 在不同相互作用关系下, 随着自旋-轨道耦合强度  $k_0$  和拉曼耦合  $\Omega_0$  的增大, loop 的宽度都减小, 也就是抑制了 loop 结构的出现. 总的来说, 发现自旋-轨道耦合强度  $k_0$ 、拉曼耦合  $\Omega_0$  和周期驱动强度  $\chi$  对 loop 宽度存在耦合效应. 尤其是周期驱动强度  $\chi$  的变化使得能带中 loop 宽度的变化呈现复杂的周期性, 这是可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中特有的现象.

### 3 隧穿动力学

由于原子间非线性相互作用存在, 使得能带出现 loop 结构. 从第 2 节可以发现, 周期驱动可以有效地调控系统的能带结构. 而 loop 结构的出现使得系统的动力学受到了显著的影响, 即系统的布洛赫振荡被破坏, 发生了非线性朗道-齐纳隧穿. 因此, 可以通过 loop 结构的周期变化来研究周期驱动强度对系统隧穿动力学的调控. 通过向系统施加非常弱的加速力 [25–27], 驱动系统的准动量定向移动. 假设系统初始状态处于下或上能带 (图 5(a1)), 通过弱加速力缓慢地改变系统的准动量  $k$ , 使原子发生定向移动. 当原子沿上能带运动到 loop 边缘时, 由于能带的突然中断, 原子只能向上或向下跳, 即发生了非线性的朗道-齐纳隧穿. 因此, 本节研究不同周期驱动强度  $\chi$  下能带的结构和对应的系统动力学. 通过对方程 (8) 进行数值计算模拟系统的隧穿动力学. 在动量空间中, 加速力  $F$  改变准动量,  $k = k_{\text{ini}} + \alpha t$ , 其中  $k_{\text{ini}}$  是初始准动量,  $\alpha$  是加速度.

图 5(a1)—(e1) 表示不同周期驱动强度  $\chi$  下的系统能带. 图 5(a2)—(e2) 和图 5(a3)—(e3) 分别表示粒子数  $|\varphi_1|^2$  (图中红色细线) 和  $|\varphi_2|^2$  (图中蓝色细线) 在不同初始状态下随时间的演化. 玻色-爱因斯坦凝聚体最初制备在系统的下 (上) 能带由圆 (正方形) 标记, 原子沿箭头所示的方向移动 (图 5(a1)—(e1)). 从图 5 可以看出, 粒子处于不同的初始状态所对应的动力学是完全不相同的. 当周期驱动强度

$\chi = 0$  且 loop 出现在上能带时 (图 5(a1)), 如果粒子初始位于上能带, 粒子数初始沿着能带平稳演化, 运动到一定的位置, 即 loop 的边缘时 (见图中垂直蓝线), 粒子数发生剧烈的振荡 (图 5(a2)), 这证明系统发生了非线性朗道-齐纳隧穿. 这可以用于测量 loop 的宽度. 图 5(a2) 中两条垂直蓝线的距离正好对应于能带结构中  $k = 0$  到 loop 边缘的距离. 随着周期驱动强度  $\chi$  的增加, loop 的宽度开始减小, 系统发生非线性朗道-齐纳隧穿的位置发生改变, 即图中粒子数发生剧烈振荡的位置发生变化 (图 5(b2) 中垂直蓝线). 周期驱动强度  $\chi$  的进一步增加使得能带中不出现 loop 结构, 此时原子沿上能带平稳地演化, 发生了自旋交换 (图 5(c1) 和图 5(c2)). 继续增加周期驱动强度  $\chi$ , 图 5(d1) 和图 5(e1) 中的上能带又出现 loop 结构, 原子沿上能带运动时又发生非线性朗道-齐纳隧穿, 并且发生振荡的位置也发生了改变. 下能带中不存在 loop 结构, 原子沿着能带平稳地演化, 在一定的时间内变得自旋无极化 (见图中垂直蓝线), 且随着时间的变化, 粒子数发生了自旋交换, 结果如图 5(a3)—(e3) 所示. 此时虽然改变了周期驱动强度  $\chi$ , 但是发生自旋交换的位置并不发生改变, 仍然位于  $k = 0$  处. 而且, 周期驱动强度  $\chi$  的增加使得自旋组分发生了翻转. 当原子初始位于上能带,  $\chi = 0$  时  $|\varphi_1|^2$  的粒子数接近于 1, 而随着  $\chi$  的增大自旋组分发生了翻转, 粒子数  $|\varphi_2|^2$  接近于 1 (见图 5(a2) 和图 5(e2)). 由此可以看出, 由于周期驱动强度对 loop 结构的调控, 使得初始态位于上能带的系统动力学发生了从非线性朗道-齐纳隧穿到自旋交换再到非线性朗道-齐纳隧穿的交替变化. 总的来说, 周期驱动强度  $\chi$  的变化不改变自旋交换的位置, 但可以精确调控发生非线性朗道-齐纳隧穿的位置. 此外, 由于两个能带之间的能量差随着准动量而变化, 所以振荡周期也发生变化.

### 4 隧穿率

朗道-齐纳隧穿是量子动力学中的一个基本现象, 它描述了在不同的物理系统中靠近免交叉位置处可能发生的非绝热跃迁. 而隧穿率与非线性能带结构的变化密切相关, 本节通过理论和数值模拟两方面研究可调自旋-轨道耦合系统能带间隧穿率的变化情况.

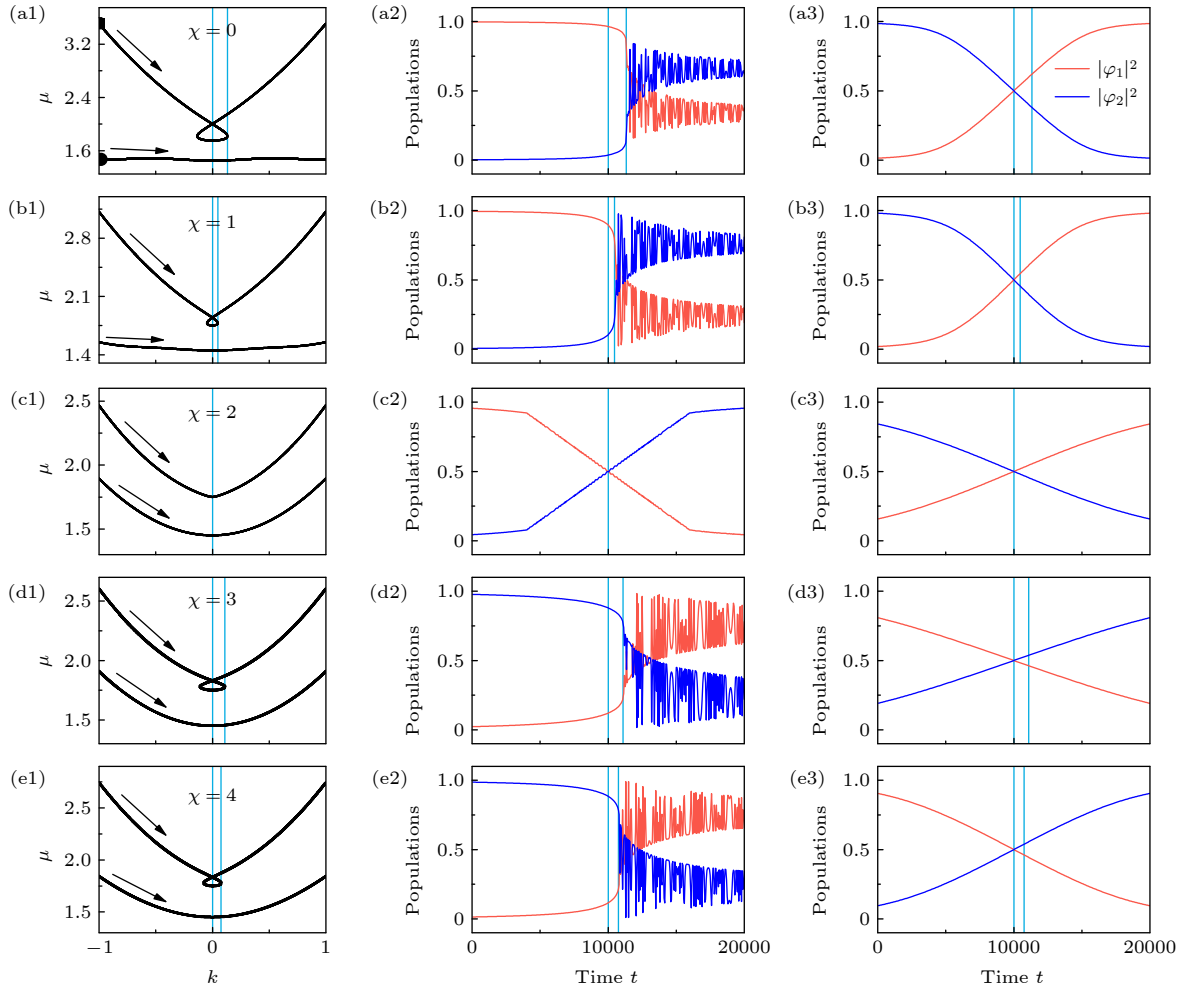


图 5 (a1)–(e1) 存在 loop 结构时的能带结构, 原子最初制备在系统的上(下)能带用正方形(圆)标记; (a2)–(e2) 原子最初制备在上能带中时对应的非线性朗道-齐纳隧穿动力学; (a3)–(e3) 原子最初制备在下能带中时对应的非线性朗道-齐纳隧穿动力学. 第一行至第四行分别取  $\chi = 0, 1, 2, 3, 4$ .  $k_0 = 1, \Omega_0 = 0.3, g = 1.5, g_{12} = 0.7, \alpha = 0.0001$

Fig. 5. (a1)–(e1) Energy band structure. The Bose-Einstein condensates are initially prepared in the lower (upper) band of the system labeled by the square (circle). (a2)–(e2) The corresponding nonlinear Landau-Zener tunneling dynamics when the atoms are initially prepared in the upper band. (a3)–(e3) The corresponding nonlinear Landau-Zener tunneling dynamics when the atoms are initially prepared in the lower band. From the first row to the fourth row:  $\chi = 0, 1, 2, 3, 4$ , respectively. The other parameters are  $k_0 = 1, \Omega_0 = 0.3, g = 1.5, g_{12} = 0.7, \alpha = 0.0001$ .

当  $g_{12} = g$  时, 也就是不存在等效非线性时  $\left(\frac{|g_{12} - g|}{2}(1 + J_0(2\chi))/\Omega_0 = 0\right)$ , 可以用朗道-齐纳模型来描述控制系统量子态在两个绝热本征能级之间的跃迁<sup>[25]</sup>:

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} E_1(x) & \Omega_0/2 \\ \Omega_0/2 & E_2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

式中,  $E_{1,2}$  是  $\phi_{1,2}$  所对应的能量,  $\Omega_0$  是两个能级之间的耦合参数. 此时, 隧穿率可以定义为  $P_{LZ} = \exp[-2\pi(\Omega_0/2)^2/(\hbar\alpha\beta)]$ . 其中,  $\alpha$  是加速度,  $\beta = |\partial E_1/\partial x - \partial E_2/\partial x|_{x=x_c}$  是能带在  $x_c$  处的斜率差. 根

据方程 (10) 将  $E_{1,2}$  代入可得  $\beta = 2k_0J_0(\chi)$ , 因此可以计算得出隧穿率为

$$P_{LZ} = \exp[-2\pi(\Omega_0/2)^2/(2\alpha k_0J_0(\chi))], \quad (12)$$

其中,  $k_0$  是自旋-轨道耦合强度,  $\chi$  是周期驱动强度. 当系统处于强相互作用时  $\left(\frac{|g_{12} - g|(1 + J_0(2\chi))}{2\Omega_0} \gg 1\right)$ , 可以用稳相近似<sup>[40]</sup> 法推导隧穿率的解析表达式为

$$\begin{aligned} P_{NLZ} &= 1 - |\phi_2|_{-\infty}^2 \\ &= 1 - \left(\frac{\Omega_0}{2}\right)^2 \left| \int_{-\infty}^{+\infty} dt \exp\left[-\frac{i}{2}\bar{\alpha}(t-t_0)^2\right] \right|^2 \\ &= 1 - \frac{\pi\Omega_0^2}{2\bar{\alpha}}, \end{aligned} \quad (13)$$

其中  $\bar{\alpha} = \alpha + 2|g_{12} - g|(1 + J_0(2\chi))(\Omega_0^2/2)^2 \sqrt{\pi/\bar{\alpha}}$ . 将  $P_{\text{NLZ}}$  代入  $\bar{\alpha}$  的封闭方程. 可得到关于  $P_{\text{NLZ}}$  的封闭方程:

$$\frac{1}{p} + \frac{\sqrt{2}}{\pi} \frac{|g_{12} - g|(1 + J_0(2\chi))}{\Omega_0} \sqrt{1 - P_{\text{NLZ}}} = \frac{1}{1 - P_{\text{NLZ}}}, \quad (14)$$

其中  $p = 2\pi(\Omega_0/2)^2/(2\alpha k_0 J_0(\chi))$ .

还可以数值求解系统的隧穿率. 假设凝聚体的初始状态为  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)^T$ , 经过概率为  $P_{\text{NLZ}}$  隧穿之后, 凝聚体的状态可表示为<sup>[33]</sup>

$$|\varphi'_1|^2 = (1 - P_{\text{NLZ}})|\varphi_1|^2 + P_{\text{NLZ}}|\varphi_2|^2. \quad (15)$$

而凝聚体隧穿前后的状态可通过数值模拟方程 (8) 求得, 从而可以数值求出系统的隧穿率, 并与理论结果相比较.

当  $\frac{|g_{12} - g|}{2}(1 + J_0(2\chi))/\Omega_0 = 0$  时, 发现系统隧穿率由加速度  $\alpha$  和能带带隙所决定, 而自旋-轨道耦合强度  $k_0$  和周期驱动强度  $\chi$  可以通过等效改变加速度而改变隧穿率. 图 6 给出了此时系统隧穿率随参数的变化规律. 自旋-轨道耦合强度  $k_0$  一定时, 随着拉曼耦合  $\Omega_0$  的增大带隙增大, 隧穿率减小 (图 6(b)). 而拉曼耦合  $\Omega_0$  一定时, 随着自旋-轨道耦合强度  $k_0$  的增大隧穿率增大 (图 6(a)), 这是因为自旋-轨道耦合强度增大等效于增大了加速度. 对于固定的自旋-轨道耦合强度  $k_0$  (拉曼耦合  $\Omega_0$ ), 周期驱动强度  $\chi$  的增大使得加速度先减小后增大, 因此隧穿率也先减小后增大 (图 6). 还发现由两种方法得到的隧穿率符合得很好 (方程 (15) 和方程 (12)).

当存在原子间相互作用时 ( $\frac{|g_{12} - g|}{2}(1 + J_0(2\chi))/\Omega_0 \gg 1$ ), 能带出现 loop 结构, 系统发生了非线性朗道-齐纳隧穿. 随着相互作用强度的增加, 隧穿率对加速度  $\alpha$  的依赖性增强<sup>[41]</sup>, 因此计算中选取了稍大的加速度, 即  $\alpha = 0.005$ . 种内原子相互作用和种间原子相互作用的关系仅影响 loop 结构出现在上能带或者下能带, 但对隧穿率的影响是一致的, 因此下面只考虑  $g > g_{12}$  的情况. 为了研究周期驱动强度  $\chi$  与非线性隧穿率之间的关系, 图 7 总结了不同周期驱动强度  $\chi$  下非线性隧穿率随拉曼耦合  $\Omega_0$  (图 7(a)) 和自旋-轨道耦合强度  $k_0$  (图 7(b)) 的变化规律. 可以看出, 对于固定的  $\chi$  和  $k_0$ , 非线性隧穿率随着拉曼耦合  $\Omega_0$  的增大而减小, 这是因为  $\Omega_0$  增大时隧穿点处的带隙增大了. 当周期驱动强度  $\chi$  和拉曼耦合  $\Omega_0$  一定时, 自旋-轨道耦合强度  $k_0$  的增加使得隧穿点处的带隙减小, 因此非线性隧穿率增大 (图 7(b)). 但随着周期驱动强度  $\chi$  的增大非线性隧穿率先减小 ( $\chi = 1, 1.5, 2$ ) 后增大 ( $\chi = 3$ ), 因为周期驱动强度  $\chi$  可以调控系统的 loop 结构的大小, 改变能带间的能量差, 从而改变 loop 边缘处的带隙. 而且经过理论与数值的对比, 发现当系统处于强非线性时 ( $\frac{|g_{12} - g|}{2}(1 + J_0(2\chi))/\Omega_0 \gg 1$ ), 理论与数值符合得非常好, 如图 7(a) 中  $\chi = 0$ , 拉曼耦合  $\Omega_0 < 0.2$ . 而周期驱动强度  $\chi$  的变化使得非线性比值也先减小后增大, 因此不同的  $\chi$  下, 理论结果与数值结果的符合程度不一样.

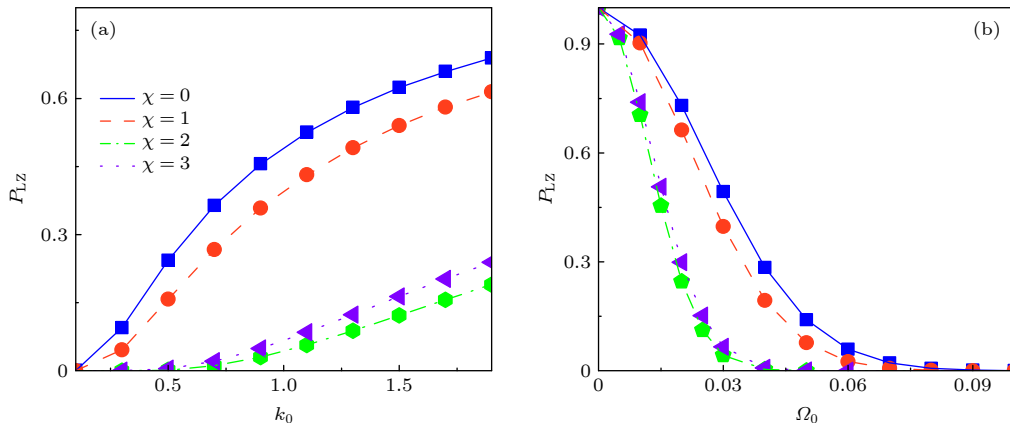


图 6 不同周期驱动强度  $\chi$  下朗道-齐纳隧穿率随 (a) 自旋-轨道耦合强度  $k_0$  和 (b) 拉曼耦合  $\Omega_0$  的变化规律 (a)  $\Omega_0 = 0.03$ ; (b)  $k_0 = 1.0$ . 不同形状的符号代表方程 (12) 给出的理论值, 不同的线条代表从方程 (8) 得到的数值解.  $g = g_{12} = 0.02$ ,  $\alpha = 0.001$

Fig. 6. The Landau-Zener tunneling probabilities as a function of (a) the spin-orbit coupling strength  $k_0$  and (b) Raman coupling  $\Omega_0$  for various periodic driving strength  $\chi$ : (a)  $\Omega_0 = 0.03$ ; (b)  $k_0 = 1.0$ . The different symbols represent the theoretical values given by Eq. (12) and different lines represent the results obtained by Eq. (8). The other parameters are  $g = g_{12} = 0.02$ ,  $\alpha = 0.001$ .

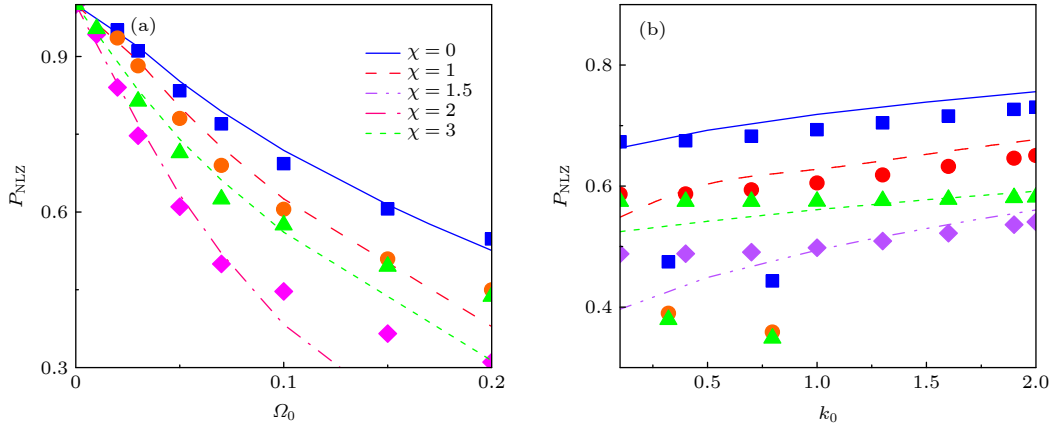


图 7 不同周期驱动强度下非线性朗道-齐纳隧穿率随 (a) 拉曼耦合  $\Omega_0$  和 (b) 自旋-轨道耦合强度  $k_0$  的变化规律 (a)  $k_0 = 1$ ; (b)  $\Omega_0 = 0.1$ . 不同形状的符号代表方程 (14) 给出的理论值, 不同的线条代表从方程 (8) 得到的数值解.  $g = 1.5 > g_{12} = 0.7$ ,  $\alpha = 0.005$

Fig. 7. The nonlinear Landau-Zener tunneling probabilities as a function of (a) Raman coupling  $\Omega_0$  and (b) the spin-orbit coupling strength  $k_0$  for various periodic driving strength  $\chi$ . (a)  $k_0 = 1$ , (b)  $\Omega_0 = 0.1$ . The different symbols represent the theoretical values given by Eq. (14) and different lines represent the results obtained by Eq. (8). The other parameters are  $g = 1.5 > g_{12} = 0.7$ ,  $\alpha = 0.005$ .

## 5 结 论

综上所述, 本文研究了可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的能带结构、隧穿动力学和隧穿率. 通过周期驱动的拉曼耦合, 利用高频近似得到了与时间无关的 Floquet 哈密顿量. 与非线性两能级模型对比, 解析地得到了出现 loop 的临界条件和 loop 宽度. 结果表明, 能带中出现 loop 结构的临界条件可通过改变周期性驱动强度来控制. 当种内原子相互作用小于 (大于) 种间原子相互作用时, loop 结构出现在下能带 (上能带). 而当两者相等时, 不出现 loop 结构, 能带呈双阱结构. 由于 loop 结构的存在, 系统发生了非线性朗道-齐纳隧穿. 而周期驱动强度的这种调控作用可以操控系统的隧穿动力学, 并且使系统的自旋组分发生了翻转. 最后计算了系统的隧穿率.

## 参考文献

- [1] Goldman N, Juzeliunas G, Öhberg P, Spielman I B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 126401
- [2] Zhai H 2015 *Rep. Prog. Phys.* **78** 026001
- [3] Zhang S, Jo G B 2019 *J. Phys. Chem. Solids* **128** 75
- [4] Lin Y J, Jiménez-García K, Spielman I B 2011 *Nature* **471** 83
- [5] Wang C, Gao C, Jian C M, Zhai H 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 160403
- [6] Li Y, Pitaevskii L P, Stringari S 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 225301
- [7] Ho T L, Zhang S 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 150403
- [8] Jian C M, Zhai H 2011 *Phys. Rev. B* **84** 060508
- [9] Zhou X F, Zhou J, Wu C 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063624
- [10] Xu Y, Mao L, Wu B, Zhang C 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 130404
- [11] Xu X Q, Han J H 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 200401
- [12] Radic J, Sedrakyan T A, Spielman I B, Galitski V 2011 *Phys. Rev. A* **84** 063604
- [13] Xu P, Yi S, Zhang W 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 073001
- [14] van der Bijl E, Duine R A 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 195302
- [15] Grass T, Saha K, Sengupta K, Lewenstein M 2011 *Phys. Rev. A* **84** 053632
- [16] Li Y, Martone G I, Pitaevskii L P, Stringari S 2013 *Phys. Rev. Lett.* **110** 235302
- [17] Li S, Wang H, Li F, Cui X, Liu B 2020 *Phys. Rev. A* **102** 033328
- [18] Zhang Y, Mao L, Zhang C 2012 *Phys. Rev. Lett.* **108** 035302
- [19] Zhang D W, Xue Z Y, Yan H, Wang Z D, Zhu S L 2012 *Phys. Rev. A* **85** 013628
- [20] Wu C J, Mondragon-Shem I, Zhou X F 2011 *Chin. Phys. Lett.* **28** 097102
- [21] Sinha S, Nath R, Santos L 2011 *Phys. Rev. Lett.* **107** 270401
- [22] Zhang J Y, Ji S C, Chen Z, Zhang L, Du Z D, Yan B, Pan G S, Zhao B, Deng Y J, Zhai H, Chen S, Pan J W 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 115301
- [23] Zheng W, Yu Z Q, Cui X, Zhai H 2013 *J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys.* **46** 134007
- [24] Ji S C, Zhang L, Xu X T, Wu Z, Deng Y, Chen S, Pan J W 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 105301
- [25] Olson A J, Wang S J, Niffenegger R J, Li C H, Greene C H, Chen Y P 2014 *Phys. Rev. A* **90** 013616
- [26] Xiong B, Zheng J H, Wang D W 2015 *Phys. Rev. A* **91** 063602
- [27] Llorente J M G, Plata J 2016 *Phys. Rev. A* **94** 053605
- [28] Wu H, Wang B Q, An J H 2021 *Phys. Rev. B* **103** L041115
- [29] Jiménez-García K, LeBlanc L J, Williams R A, Beeler M C, Qu C, Gong M, Zhang C, Spielman I B 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 125301
- [30] Zhang Y, Chen G, Zhang C 2013 *Sci. Rep.* **3** 1937
- [31] Li J R, Lee J, Huang W, Burchesky S, Shteynas B, Top F C, Jamison A O, Ketterle W 2017 *Nature* **543** 91

- [32] Yao J, Zhang S 2014 *Phys. Rev. A* **90** 023608  
 [33] Olson A J, Blasing D B, Qu C, Li C H, Niffenegger R J, Zhang C, Chen Y P 2017 *Phys. Rev. A* **95** 043623  
 [34] Gomez Llorente J M, Plata J 2016 *Phys. Rev. A* **93** 063633  
 [35] Abdullaev F Kh, Salerno M 2018 *Phys. Rev. A* **98** 053606  
 [36] Liang J C, Zhang Y C, Jiao C, Zhang A X, Xue J K 2021 *Phys. Rev. E* **103** 022204  
 [37] Zhang Y, Mossman M E, Busch T, Engels P, Zhang C 2016 *Front. Phys.* **11** 118103  
 [38] Liu J, Fu L, Ou B Y, Chen S G, Choi D I, Wu B, Niu Q 2002 *Phys. Rev. A* **66** 023404  
 [39] Zhang Y, Gui Z, Chen Y 2019 *Phys. Rev. A* **99** 023616  
 [40] Liu J 2009 *Dynamics of Bose-Einstein Condensates: Nonlinear Tunneling, Coherence, and Instability* (Beijing: Science Press) pp40–50 (in Chinese) [刘杰 2009 玻色-爱因斯坦凝聚体动力学: 非线性隧穿、相干及不稳定性 (北京: 科学出版社) 第40—50页]  
 [41] Wu B, Qian N 2003 *New J. Phys.* **5** 104

# Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates<sup>\*</sup>

Ma Yun-E    Qiao Xin    Gao Rui    Liang Jun-Cheng  
 Zhang Ai-Xia    Xue Ju-Kui<sup>†</sup>

(College of Physics and Electronic Engineering, Northwest Normal University, Lanzhou 730070, China)

(Received 14 April 2022; revised manuscript received 9 June 2022)

## Abstract

We theoretically study the band structure, tunneling dynamics, and tunneling probability of tunable spin-orbit-coupled Bose-Einstein condensates under the periodic driving of Raman coupling. The time-independent Floquet Hamiltonian is obtained in the high-frequency approximation. It is found that the periodic driving can effectively tune spin-orbit coupling and nonlinear interaction. The system is mapped to a standard nonlinear two-level model, and the critical condition for the appearance of the loop in energy band structure and the width of the loop are obtained analytically. When the interspecies atomic interaction is equal to the intraspecies atomic interaction, there is no loop. However, when the intraspecies atomic interaction is smaller (larger) than the interspecies atomic interaction, the loop appears in the lower (upper) energy band. In this case, both spin-orbit coupling and Raman coupling will suppress the appearance of loop. In particular, the critical condition for the appearance of loop structure can be controlled by adjusting external driving. We also study the tunneling dynamics of Bose-Einstein condensate with tunable spin-orbit coupling. More importantly, by tuning the periodic driving, the tunneling dynamics of the system and the location of nonlinear Landau-Zener tunneling can be controlled. We also find that the spin components of the system can be reversed. Finally, the Landau-Zener tunneling probability of the system is calculated. The research shows that the periodic driving can effectively change the tunneling probability of the system.

**Keywords:** Bose-Einstein condensates, tunable spin-orbit coupling, nonlinear band structure, Landau-Zener tunneling

**PACS:** 03.75.Lm, 67.85.Hj, 05.30.Jp

**DOI:** 10.7498/aps.71.20220697

<sup>\*</sup> Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 12164042, 11764039, 11865014, 11847304), the Natural Science Foundation of Gansu Province, China (Grant Nos. 17JR5RA076, 20JR5RA526), the Scientific Research Project of Gansu Higher Education, China (Grant No. 2016A-005), the Innovation Capability Enhancement Project of Gansu Higher Education, China (Grant Nos. 2020A-146, 2019A-014), the Creation of Science and Technology of Northwest Normal University, China (Grant No. NWNNU-LKQN-18-33), and the Excellent Graduate Innovation Star Project of Education Department of Gansu Province, China (Grant No. 2021CXZX-180).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: xuejk@nwnu.edu.cn



## 可调自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的隧穿动力学

马贇娥 乔鑫 高瑞 梁俊成 张爱霞 薛具奎

### Tunneling dynamics of tunable spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

Ma Yun-E Qiao Xin Gao Rui Liang Jun-Cheng Zhang Ai-Xia Xue Ju-Kui

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 210302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220697

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220697>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

光晶格中自旋轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体的非线性能谱特性

Nonlinear energy band structure of spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates in optical lattice

物理学报. 2021, 70(20): 200302 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210705>

环形势阱中自旋-轨道耦合旋转玻色-爱因斯坦凝聚体的基态

Ground state of spin-orbit coupled rotating ferromagnetic Bose-Einstein condensate in toroidal trap

物理学报. 2020, 69(14): 140301 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200372>

线性塞曼劈裂对自旋-轨道耦合玻色-爱因斯坦凝聚体中亮孤子动力学的影响

Effects of linear Zeeman splitting on the dynamics of bright solitons in spin-orbit coupled Bose-Einstein condensates

物理学报. 2019, 68(8): 080301 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182013>

梯度磁场中自旋-轨道耦合旋转两分量玻色-爱因斯坦凝聚体的基态研究

Ground state of spin-orbit coupled rotating two-component Bose-Einstein condensate in gradient magnetic field

物理学报. 2018, 67(11): 110302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180539>

玻色-爱因斯坦凝聚中的环状暗孤子动力学

Dynamics of ring dark solitons in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010302 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191424>

旋量玻色-爱因斯坦凝聚体拓扑性质的研究进展

The research progress of topological properties in spinor Bose-Einstein condensates

物理学报. 2020, 69(1): 010303 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191648>