



## 非厄米镶嵌型二聚化晶格

侯博 曾琦波

### Non-Hermitian mosaic dimerized lattices

Hou Bo Zeng Qi-Bo

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 130302 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20220890

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

三聚化非厄密晶格中具有趋肤效应的拓扑边缘态

Topological edge states with skin effect in a trimerized non-Hermitian lattice

物理学报. 2019, 68(10): 104206 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190112>

广义布里渊区与非厄米能带理论

Generalized Brillouin zone and non-Hermitian band theory

物理学报. 2021, 70(23): 230307 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211908>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

纳米机械谐振器耦合量子比特非厄米哈密顿量诱导的声子阻塞

Phonon blockade induced by a non-Hermitian Hamiltonian in a nanomechanical resonator coupled with a qubit

物理学报. 2019, 68(11): 114203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20182263>

周期驱动的二能级系统中的准宇称-时间对称动力学

Quasi-parity-time symmetric dynamics in periodically driven two-level non-Hermitian system

物理学报. 2022, 71(7): 074207 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20220270>

专题: 非厄米物理前沿

## 非厄米镶嵌型二聚化晶格\*

侯博 曾琦波†

(首都师范大学物理系, 北京 100048)

(2022年5月6日收到; 2022年5月30日收到修改稿)

非厄米系统近年来受到了物理学相关领域研究人员的大量关注. 非厄米因素的存在往往会带来许多在厄米系统中不存在的新奇效应. 本文引入一类新的非厄米晶格系统——非厄米镶嵌型二聚化晶格. 在这一模型中, 交替变化的非对称跃迁被等间距地施加在某些相邻格点的跃迁项中. 研究表明, 随着非对称跃迁强度的增大, 系统在开边界条件下的能谱会从实数变为复数. 此外, 系统中的非厄米趋肤效应和不同边界条件下的能谱性质会受到镶嵌型调制周期的影响. 当这一调制周期为奇数时, 系统中不存在非厄米趋肤效应, 且其能谱在开放和周期边界条件下是一样的(拓扑边界态除外); 而当镶嵌型调制周期为偶数时, 系统中存在非厄米趋肤效应, 且其能谱在不同的边界条件下具有完全不同的结构. 本文进一步研究了这类系统中的拓扑零能边界态, 并计算了 Berry 相位对其进行表征. 本研究揭示了镶嵌型非对称跃迁对系统性质的影响, 拓展了非厄米系统这一领域的相关研究.

**关键词:** 非厄米系统, 镶嵌型非对称跃迁, 非厄米趋肤效应, 拓扑零能边界态**PACS:** 03.65.Vf, 03.65.Yz, 68.65.Cd, 71.23.An**DOI:** 10.7498/aps.71.20220890

## 1 引言

非厄米系统在过去二三十年中引起了研究人员的广泛关注<sup>[1–5]</sup>. 在所研究的系统中, 如果要进一步考虑系统与外部环境的相互作用或者影响, 可以在系统的哈密顿量中引入非厄米项, 如物理增益或者损耗等. 非厄米哈密顿量在光学、冷原子系统等经典和量子系统中均有广泛应用<sup>[6–25]</sup>. 不同于传统的厄米系统中系统能量始终为实数, 非厄米系统的能量往往是复数. 复数能谱在复能量平面中能表现出更为丰富的能带结构特征, 如点能隙 (point gap) 和线能隙 (line gap)<sup>[26]</sup>、环状能隙 (loop gap)<sup>[27,28]</sup> 等. 如果系统哈密顿量具有 PT 对称性<sup>[29–31]</sup> 或者赝厄米性<sup>[32–35]</sup>, 其能谱也可以为实数.

近年来, 具有非对称跃迁的非厄米系统掀起了

新一轮的研究热潮<sup>[36–38]</sup>. 在格点模型中, 非对称跃迁是指相同的两个格点之间的跃迁在不同方向具有不同的强度. 例如, 在一维 Hanato-Nelson (HN) 模型中<sup>[39]</sup>, 粒子向前跃迁与向后跃迁的跃迁振幅不同, 从而导致系统的哈密顿量不再是厄米的. 具有非对称跃迁的系统中往往存在非厄米趋肤效应 (non-Hermitian skin effect), 即在开边界条件下, 系统的本征态不再分布于整个系统中, 而是被局域在系统的边界上<sup>[40,41]</sup>. 由于非厄米趋肤效应的存在, 这类系统的能谱对于边界条件的变化十分敏感<sup>[42]</sup>, 从而为设计新型的传感器件提供了新的思路和灵感<sup>[43–45]</sup>. 此外, 非厄米趋肤效应对拓扑态也有重要影响, 会破坏传统的厄米拓扑系统中的体-边界对应原理<sup>[40,41]</sup>, 这一效应也使得非厄米拓扑系统在最近几年中得到了深入的研究<sup>[45–52]</sup>. 近期的研究表明, 非厄米趋肤的拓扑起源为系统在周期边界条件

\* 北京市教育委员会科学研究计划项目 (批准号: KM202210028017), 低维量子物理国家重点实验室开放研究基金 (批准号: KF202109) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: zengqibo@cnu.edu.cn

下存在的点状能谱<sup>[53,54]</sup>. 另一方面, 非对称跃迁对无序或准周期系统中的安德森局域化现象 (Anderson localization) 也有重要影响<sup>[39,55]</sup>, 其存在往往会引起退局域化效应 (delocalization effect)<sup>[26,56–59]</sup>.

目前为止, 有关非对称跃迁的系统研究主要集中在将非对称跃迁施加在所有的跃迁项上. 最近, 研究人员提出了镶嵌型晶格模型, 发现在将周期调制等间距地施加在某些格点上, 系统中会出现迁移率边等有趣的现象<sup>[60]</sup>. 类似地, 当调制项等间距地施加到跃迁项中时, 系统的拓扑态和局域化等也会受到影响<sup>[61,62]</sup>.

本文研究一维非厄米镶嵌型二聚化晶格模型. 在这类系统中, 交替变化的非对称跃迁被等间距地施加在跃迁项中. 计算结果表明, 在跃迁项均为实数的情形下, 系统的能谱可以在一定的参数范围内保持为实数. 随着非对称跃迁强度的增大, 系统在开边界条件下的能谱会从实数变为复数. 此外, 系统的能谱性质和非厄米趋肤效应会受到镶嵌型调制周期的影响. 本文进一步研究了这类系统中的拓扑零能边界态并在非布洛赫能带理论的基础上, 计算了贝里相位对其进行表征. 本研究工作引入了一类新型的非厄米格点模型, 进一步揭示了非厄米系统的新奇特性.

## 2 非厄米镶嵌型二聚化晶格模型

### 2.1 模型哈密顿量

考虑具有最近邻跃迁的一维格点模型, 其中非对称跃迁被等距离的施加在某些相邻格点的跃迁项中, 如图 1 所示. 系统的哈密顿量如下:

$$H = \sum_j [tc_j^\dagger c_{j+1} + tc_{j+1}^\dagger c_j] + \sum_{j=s\kappa} [(-1)^j \lambda c_j^\dagger c_{j+1} - (-1)^j \lambda c_{j+1}^\dagger c_j], \quad (1)$$

其中,  $c_j^\dagger (c_j)$  为格点  $j$  处的粒子产生 (湮灭) 算符.  $t$  为相邻格点间的跃迁振幅,  $\lambda$  为格点间的非对称跃迁强度. 本文取  $t = 1$  作为能量单位且所有参数均为实数.  $\kappa$  为正整数, 代表了镶嵌型调制的周期;  $s$  的取值也为正整数, 表明非对称跃迁每隔  $\kappa$  个格点施加在跃迁振幅中. 由于非对称跃迁是正负交替变化的, 这一模型具有二聚化晶格的特征.

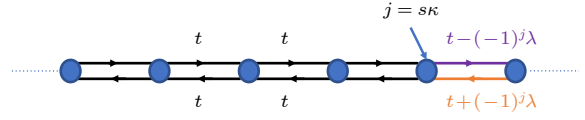


图 1 具有镶嵌型非对称跃迁的一维非厄米二聚化晶格示意图. 第  $s\kappa$  个格点和第  $s\kappa+1$  格点之间的跃迁振幅是不对称的, 为  $t \pm (-1)^j \lambda$

Fig. 1. Schematic of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattice with asymmetric hopping. The backward and forward hopping amplitudes between the  $s\kappa$ -th and  $s\kappa+1$ -th sites are  $t \pm (-1)^j \lambda$ , which are asymmetric.

### 2.2 有向性 IPR(directional, IPR)

由于模型中存在非对称跃迁, 可以预期系统中将存在非厄米趋肤效应. 在这一效应的影响下, 系统在开边界条件下的体态都会被局域在一维格点系统的两端. 系统本征态的局域性质可以通过计算其 IPR(inversion participation ratio) 来进行判断. IPR 的定义为

$$\text{IPR}(\Psi_n^R) = \sum_{j=1}^L \frac{|\Psi_{n,j}^R|^4}{(\langle \Psi_n^R | \Psi_n^R \rangle)^2}, \quad (2)$$

其中,  $\Psi_n^R$  为系统的右本征矢且满足薛定谔方程  $H\Psi_n^R = E_n\Psi_n^R$ .  $L$  为系统的格点数. 当  $\Psi_n^R$  为扩展态时, 其 IPR 值趋于 0; 而如果  $\Psi_n^R$  为局域态, 则其 IPR 为一接近 1 的有限值. 为了区分不同参数条件下, 系统本征态被局域在不同边界处的趋肤效应, 在 IPR 的基础上引入有向性 IPR, 即 dIPR<sup>[36]</sup>. 其定义为

$$\text{dIPR}(\Psi_n^R) = P(\Psi_n^R) \sum_{j=1}^L \frac{|\Psi_{n,j}^R|^4}{(\langle \Psi_n^R | \Psi_n^R \rangle)^2}, \quad (3)$$

式中的  $P(\Psi_n^R)$  的定义为

$$P(\Psi_n^R) = \text{sgn} \left[ \sum_{j=1}^L \left( j - \frac{L}{2} - \delta \right) |\Psi_{n,j}^R|^2 \right], \quad (4)$$

$\text{sgn}(x)$  给出了变量  $x$  的符号: 当  $x > 0$  时为正, 当  $x < 0$  则为负.  $\delta$  为正数且取值为  $0 < \delta < 0.5$ .  $P(\Psi_n^R)$  给出了本征态  $\Psi_n^R$  分布在系统的左半部分还是右半部分的信息, 因而可以反映在非厄米趋肤效应下, 本征态是被局域在一维格点系统的左端还是右端. 当  $\text{dIPR} > 0$  时, 说明该本征态局域在系统的右端; 而如果  $\text{dIPR} < 0$ , 则意味着该本征态局域在系统的左端. 由此可见, 可以用 dIPR 来有效地对一维格点系统中的非厄米趋肤效应进行区分.

### 3 本征能谱、非厄米趋肤效应和拓扑零能态

#### 3.1 本征能谱

首先考察一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在不同边界条件下的本征能谱. 图 2 给出了在开边界条件下, 具有不同周期 (即  $\kappa$ ) 的镶嵌型非对称跃迁的二聚化晶格的本征能谱作为非对称跃迁强度  $\lambda$  的函数图像. 从能谱的虚部 (图 2 下半部分) 可以看出, 当非对称跃迁强度  $|\lambda| < t$  时, 系统的本征能量为实数, 因而系统在这一参数区域内具有纯实数能谱. 随着  $|\lambda|$  的增大, 系统的能谱不再保持为实数. 当  $\kappa = 1$  时, 非对称跃迁被施加在所有的跃迁项上, 可以发现系统的能量在  $|\lambda| > t$  变为纯虚数, 因此系统的能谱在  $|\lambda| = t$  处经历了实数能谱到虚数能谱的变化. 而对于镶嵌型调制的情况而言 ( $\kappa > 1$ ), 系统的能谱在  $|\lambda| > t$  时变为复数. 因此, 在开边界条件下, 随着非对称跃迁的增强, 系统的能谱会从实数变为虚数或复数, 且发生这一变化的临界点为  $|\lambda| = t$ .

接下来讨论系统在周期边界条件下的能谱性质, 数值计算结果如图 3 所示. 通过与图 2 中开边界条件下的能谱进行比较可知, 当  $\kappa = 1$  和 3 时, 系统的能谱在不同边界条件下具有相同的结构 (边界

态除外), 且能谱在  $|\lambda| < t$  的参数范围内均为实数. 而当  $\kappa = 2$  和 4 时, 系统在周期边界条件和开边界条件下的能谱结构则完全不同, 且在周期边界条件下, 系统能谱在  $\lambda \neq 0$  时即变成复数. 通过进一步计算其他镶嵌调制周期  $\kappa$  下的能谱, 发现当  $\kappa$  为奇数时, 系统在开边界和周期边界条件下的能谱是相同的 (除边界态外, 见后文讨论); 而如果  $\kappa$  是偶数, 则系统在不同边界条件下的能谱具有十分不同的结构, 与常规的具有非对称跃迁的晶格模型的能谱特征类似.

#### 3.2 非厄米趋肤效应

下面研究一维非厄米镶嵌型二聚化晶格系统中的非厄米趋肤效应. 图 2 中, 数据点的颜色代表各个能量本征值所对应本征态的 dIPR 值. 由 dIPR 的定义 ((2) 式) 可知, 当  $\text{dIPR} < 0$  时, 对应的本征态被局域在晶格的左端; 而如果  $\text{dIPR} > 0$ , 则该本征态局域在晶格的右端. 从图 4 中可以发现, 在  $\kappa$  为奇数时, 所有体态的 dIPR 值都趋于 0, 意味着这些体态均为扩展态, 系统中没有趋肤效应. 当  $\kappa$  为偶数时, 体态的 dIPR 在  $\lambda < 0$  的区域为正, 而在  $\lambda > 0$  的区域为负. 此时, 对应的本征态分别局域在一维晶格的右端和左端, 如图 4(a) 所示.  $\lambda = 0$  时, 系统中不存在非对称跃迁, 因而没有趋肤效应. 为了更直观表征趋肤效应在不同镶嵌型调制

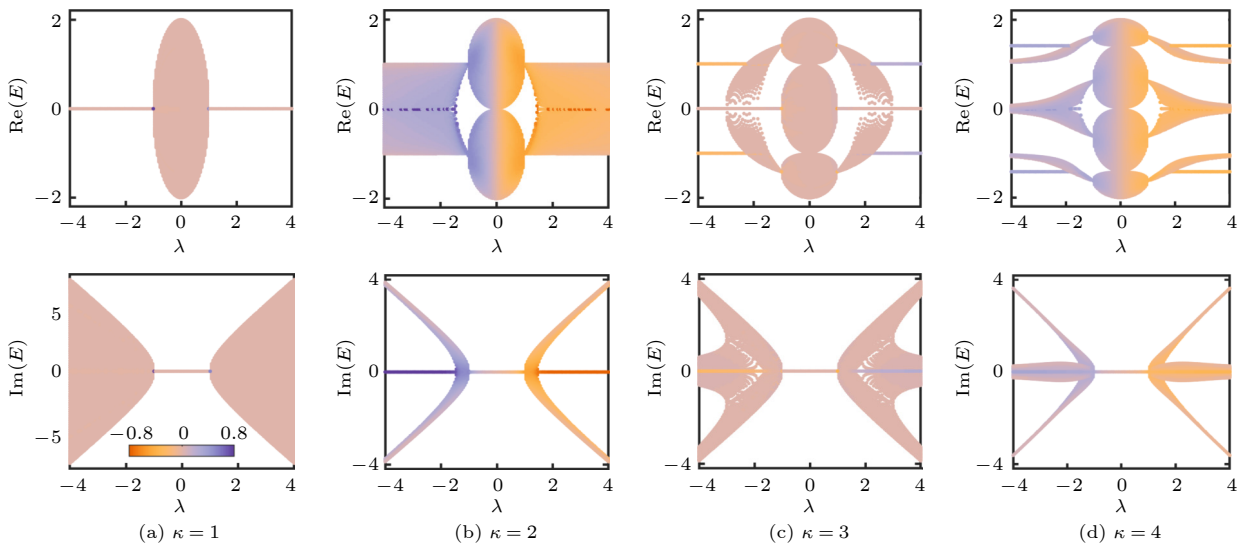


图 2 具有不同镶嵌型调制的一维非厄米二聚化晶格模型在开边界条件下的本征能谱. 上半部分为能谱实部, 下半部分为能谱虚部; 图中的颜色代表该能量对应的本征态的 dIPR 值; 系统大小为  $L = 120$

Fig. 2. The eigenenergy spectra of the 1D non-Hermitian dimerized lattices with different mosaic modulations. The upper panel shows the real parts of the spectra while the lower panel shows the imaginary parts, the colorbar indicates the dIPR value of the eigenstate, the lattice size is  $L = 120$ .

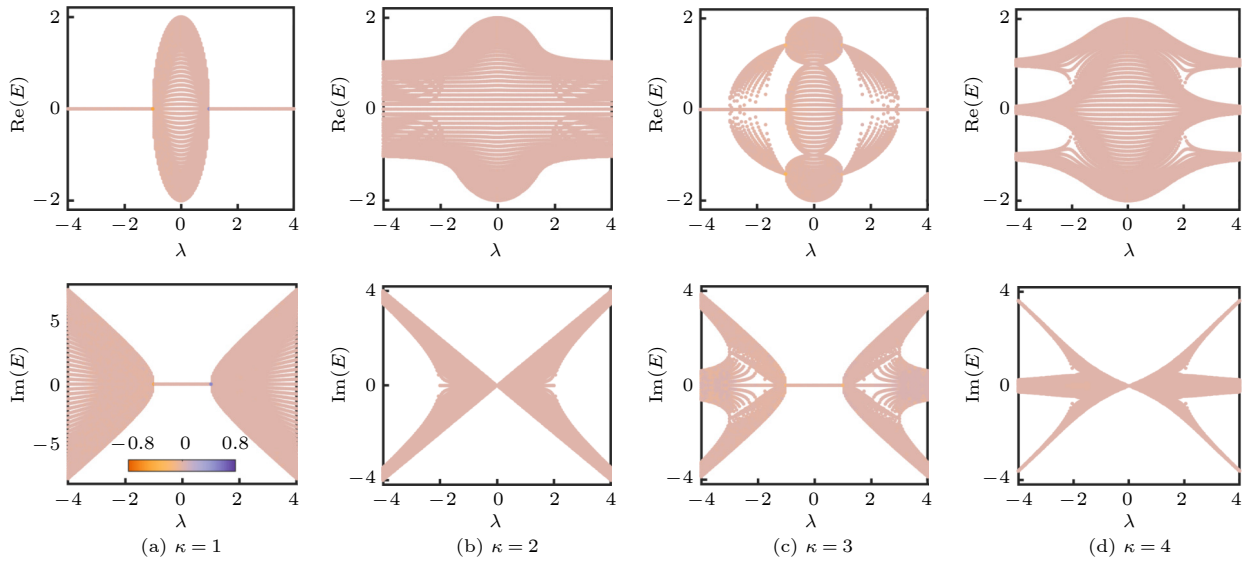


图 3 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在周期性边界条件下的本征能谱

Fig. 3. The eigenenergy spectra of the 1D non-Hermitian mosaic dimerized lattices under periodic boundary conditions.

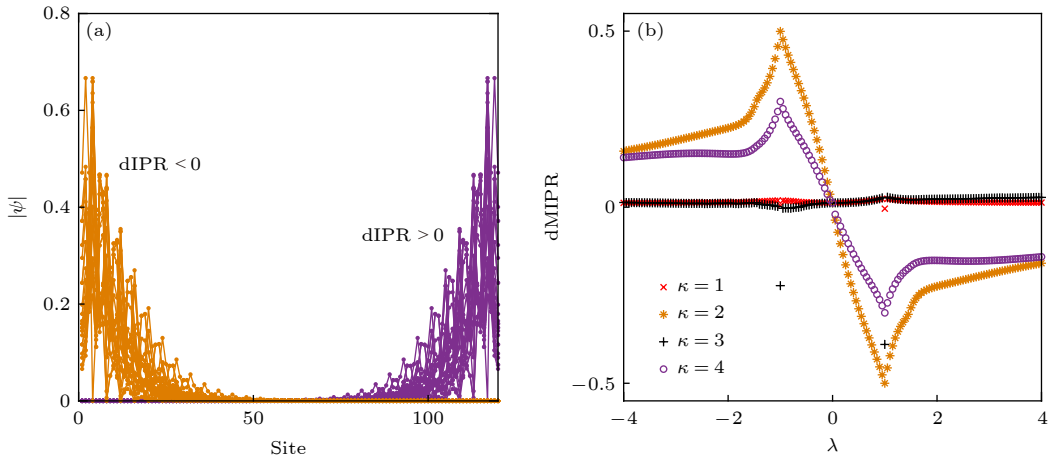

 图 4 具有非对称跃迁的一维镶嵌型二聚化晶格中的非厄米趋肤效应 (a) 在开边界条件下, 当本征态的  $dIPR > 0$  ( $dIPR < 0$ ) 时, 体态将局域在一维系统的右端 (左端); (b) 系统的  $dMIPR$  值在不同的镶嵌型调制周期下的变化

 Fig. 4. The non-Hermitian skin effect in the 1D mosaic dimerized lattices with asymmetric hopping: (a) Under open boundary conditions, the bulk eigenstates with  $dIPR > 0$  ( $dIPR < 0$ ) will be localized at the right (left) end of the lattice; (b) the variations of  $dMIPR$  for the systems with different mosaic modulation.

周期下的表现, 可以计算  $dIPR$  的平均值, 即  $dMIPR$ , 其定义为

$$dMIPR = \frac{1}{L} \sum_{n=1}^L dIPR(\Psi_n). \quad (5)$$

图 4(b) 给出了  $dMIPR$  作为  $\lambda$  的函数图像. 从图中可以看到, 在  $\kappa$  为奇数时,  $dMIPR$  始终在 0 附近, 表明系统中不存在趋肤效应; 而当  $\kappa$  是偶数时,  $dMIPR$  则为有限值, 且在  $\lambda = 0$  处由正值变为负值, 对应于非厄米趋肤效应发生方向的改变.

非厄米趋肤效应在不同镶嵌型调制周期下的

不同表现也可以在能谱中反映出来 (见图 2 和 3). 之前的研究已表明, 非厄米趋肤效应与系统在周期性边界条件下能谱中的点能隙有关<sup>[53,54]</sup>. 图 5 也给出了系统在  $\lambda = 1.5$  时的能谱. 可以看到, 在没有趋肤效应的系统中 (即  $\kappa = 1, 3$ ), 不同边界条件下本征能量在复平面的分布是基本重合的, 且周期性边界条件下的能谱没有环状结构, 即不存在点能隙. 但在  $\kappa = 2, 4$  的系统中, 其周期性边界下的能谱形成环状结构, 存在点能隙, 对应开边界下具有趋肤效应这一特征.

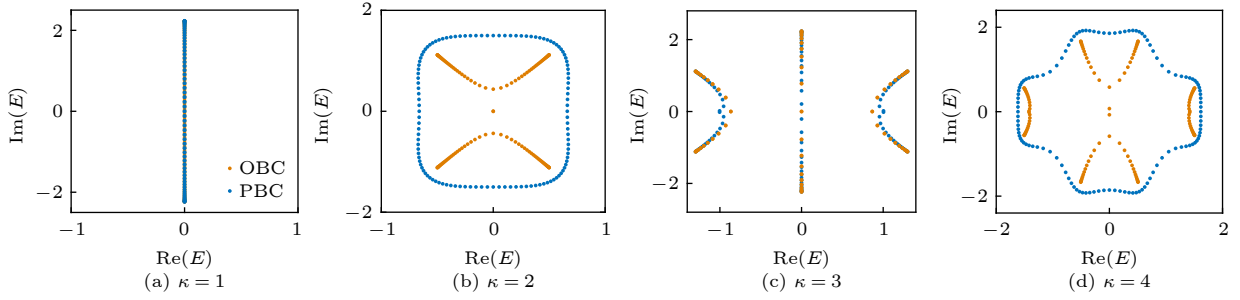


图5 在  $\lambda = 1.5$  时, 系统在不同边界条件下的能谱. 棕色代表开边界条件 (OBC) 下的能谱, 蓝色代表周期边界条件 (PBC) 下的能谱

Fig. 5. The energy spectra under different boundary conditions of the system with  $\lambda = 1.5$ . The brown dots represent the spectra under OBC and the blue dots represent the spectra under PBC.

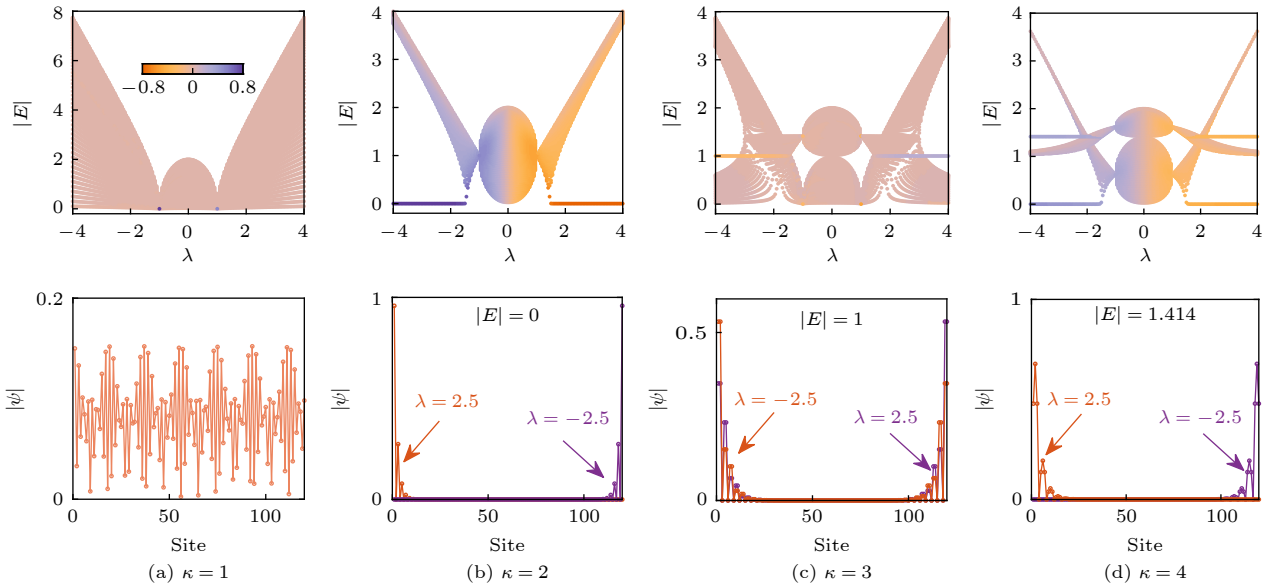


图6 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在开边界条件下能谱的绝对值 (上图), 图中的颜色代表该能量对应的本征态的 dIPR 值, 系统的大小为  $L = 120$ ; 不同  $\kappa$  值下, 系统的本征态的空间分布 (下图),  $\kappa = 1$  时, 系统的本征态都为扩展态;  $\kappa = 2$  和 4 时, 系统中存在局域在边界上的零能拓扑态. 此外, 在  $\kappa = 3$  和 4 时, 系统中分别存在能量为  $|E| = 1$  和  $|E| = 1.414$  的边界态

Fig. 6. The absolute values of the eigenenergies of the non-Hermitian mosaic dimerized lattices (upper), the colorbar indicates the dIPR value of the eigenstates, the lattice size is  $L = 120$ ; the distribution of eigenstates for systems with different  $\kappa$  values (lower), when  $\kappa = 1$ , the eigenstates are extended. When  $\kappa = 2$  and 4, there are topological zero-energy edge modes in the system. In addition, in the systems with  $\kappa = 3$  and 4, there are also edge states with energies  $|E| = 1$  and  $|E| = 1.414$ , respectively.

### 3.3 拓扑零能态

从图2的开边界能谱图可以发现, 在某些情况下, 系统中是存在拓扑边界态的. 为了更好判断系统中是否存在拓扑零能边界态, 可以计算开边界下系统能谱的绝对值, 如图6所示. 当  $\kappa = 2$  和 4 时, 系统存在拓扑零能边界态, 且拓扑非平庸区域与平庸区域的临界值为  $|\lambda_c| \approx 1.42$ .

为表征系统中拓扑零能边界态, 可以计算系统的贝里相位. 由于存在非厄米趋肤效应, 需要使用非布洛赫能带理论 (non-Bloch band theory)<sup>[41,42]</sup>.

对于镶嵌调制周期为  $\kappa$  的格点系统, 其原胞中的格点数  $q$  为 2 和  $\kappa$  的最小公倍数, 即  $q = \text{lcm}(2, \kappa)$ . 系统在动量空间中的布洛赫哈密顿量可以表示成一个  $q \times q$  维的矩阵, 且其矩阵元为

$$H(k)_{mn} = \delta_{m,n-1}t_m + \delta_{m-1,n}t'_n + \delta_{m,1}\delta_{n,q}t'_q e^{-ik} + \delta_{m,q}\delta_{n,1}t_q e^{ik}. \quad (6)$$

在此基础上, 根据非布洛赫能带理论, 做如下替代:  $e^{ik} \rightarrow \beta = r e^{ik}$ . 例如, 对于  $\kappa = 4$  的系统, 其哈密顿量可改写为

$$H(\beta) = \begin{pmatrix} 0 & t_1 & 0 & t'_4\beta^{-1} \\ t'_1 & 0 & t_2 & 0 \\ 0 & t'_2 & 0 & t_3 \\ t_4\beta & 0 & t'_3 & 0 \end{pmatrix} \\
 = \begin{pmatrix} 0 & t & 0 & (t-\lambda)\beta^{-1} \\ t & 0 & t & 0 \\ 0 & t & 0 & t \\ (t+\lambda)\beta & 0 & t & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

其中,  $\beta = re^{ik}$ ,  $r = |\beta| = \sqrt{\frac{t'_1 t'_2 t'_3 t'_4}{t_1 t_2 t_3 t_4}} = \sqrt{\frac{t-\lambda}{t+\lambda}}$ . 在此基础上, 定义第  $n$  个能带的贝里相位 (Berry phase) 为

$$A_n = \int_0^{2\pi} dk \frac{\langle \Psi_n^L(k) | \partial_k \Psi_n^R(k) \rangle}{\langle \Psi_n^L(k) | \Psi_n^R(k) \rangle}, \quad (8)$$

其中  $\Psi_n^{L/R}(k)$  分别为  $H(k)$  的左右本征矢. 图 7 给出了  $\kappa = 2$  和 4 的系统的贝里相位. 从图 7 可以看出, 在  $|\lambda_c| \approx 1.42$  处, 贝里相位从 0 突然跳到  $\pi$ , 表明系统中存在拓扑相变. 贝里相位为  $\pi$  的区域与开边界条件下具有零能拓扑边界态的区域一致.

除了拓扑零能边界态外, 在  $\kappa = 3$  和 4 的开边界能谱中还可以看到非零能量的拓扑边界态, 且这些边界态对应的能量为常数, 不会随着  $\lambda$  的变化而发生改变, 如图 6(c) 和 (d) 所示.

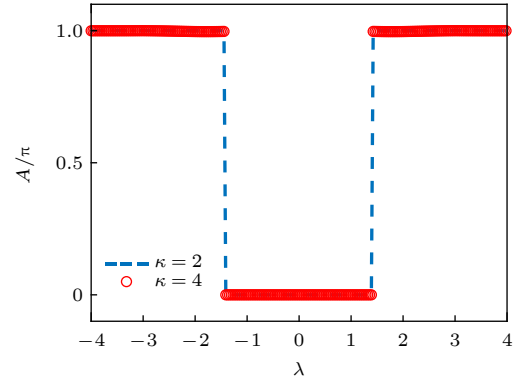


图 7 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在  $\kappa = 2$  (蓝色虚线) 和  $\kappa = 4$  (红色空心圆点) 时的贝里相位. 数值结果分别是将本征能量的实部小于零的能带的贝里相位相加得到, 从而表征系统中出现的拓扑零能边界态

Fig. 7. The Berry phase for the 1 D non-Hermitian mosaic dimerized lattices with  $\kappa = 2$  (blue dashed line) and  $\kappa = 4$  (red empty circles). The numerical results are obtained by summing up the Berry phases of the bands with the real part of the eigenenergies smaller than 0 and thus characterize the existence of topological zero modes.

## 4 讨论部分

从以上的讨论中可以发现, 一维非厄米镶嵌型二聚化晶格的能谱和非厄米趋肤效应与镶嵌型的非对称跃迁的周期有紧密联系. 当  $\kappa$  为奇数时, 系统中的非对称跃迁在不同格点处会发生正负交替变化, 使得整个系统中的非对称跃迁被抵消, 因而

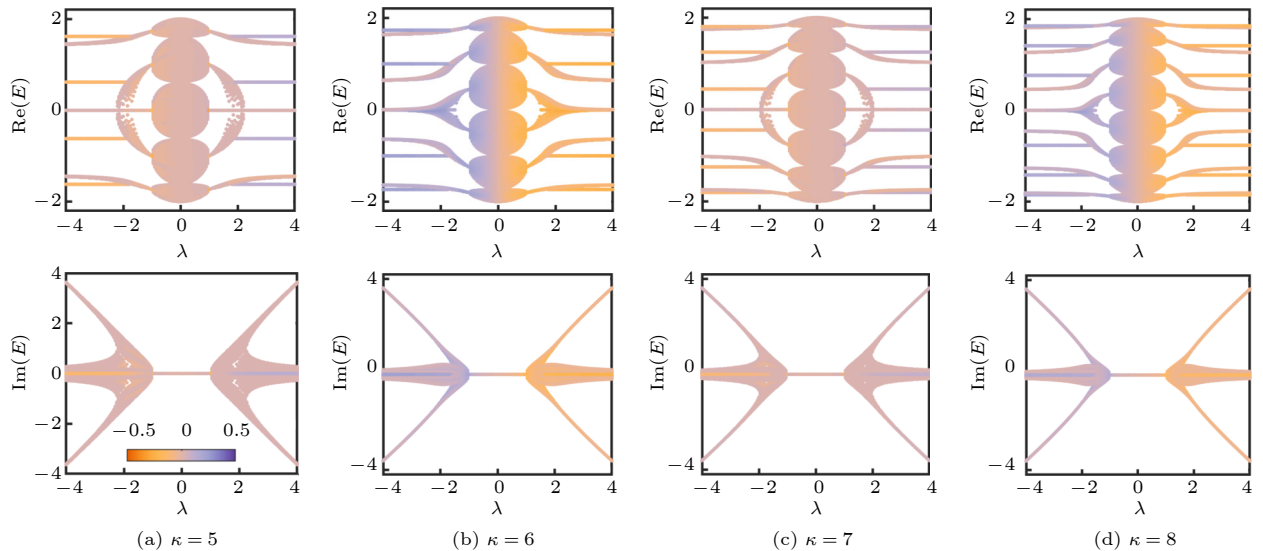


图 8 具有不同  $\kappa$  值的一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在开边界条件下的能谱, 图中的颜色代表本征态的 dIPR 值

Fig. 8. The eigenenergy spectra of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattices with different  $\kappa$  values under open boundary conditions. The color bar indicates the of the dIPR values eigenstates.

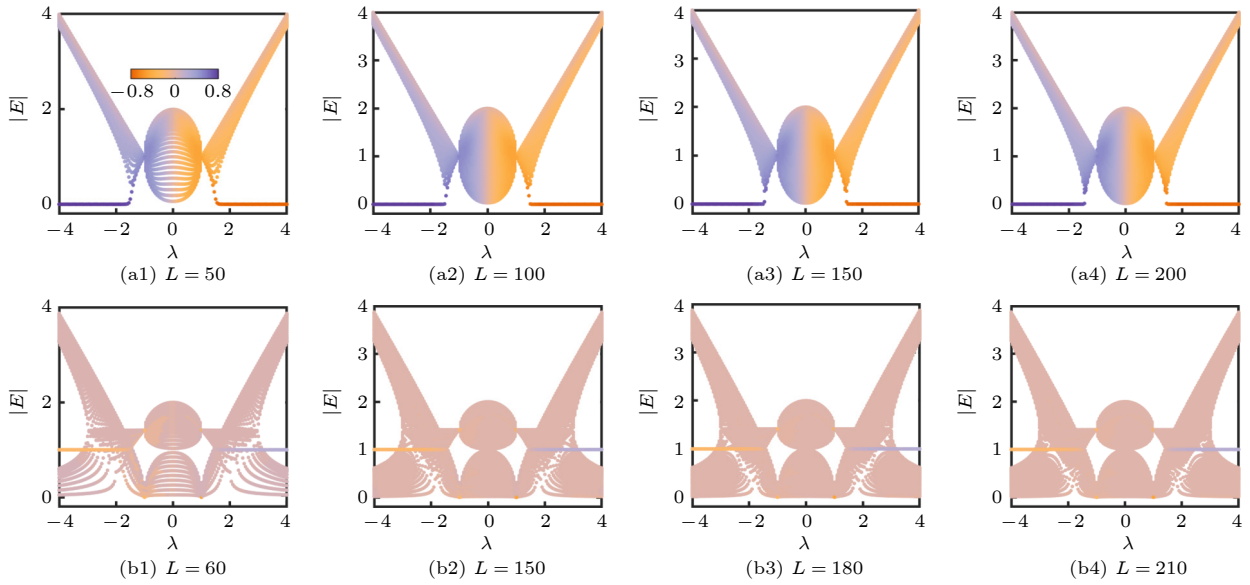


图 9 具有不同尺度的一维非厄米镶嵌型二聚化晶格在开边界条件下的能谱 (a1)–(a4) 和 (b1)–(b4) 分别对应  $\kappa = 2$  和 3 的系统

Fig. 9. The energy spectra of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattices with different sizes under open boundary conditions, (a1)–(a4) and (b1)–(b4) correspond to the systems with  $\kappa = 2$  and 3, respectively.

表 1 具有不同  $\kappa$  值的一维非厄米镶嵌型二聚化晶格的性质

Table 1. The eigenenergy spectra of the one-dimensional non-Hermitian mosaic dimerized lattices with different  $\kappa$  values.

$\kappa$ 取值	非厄米趋肤效应	子晶格对称性	拓扑零能边界态
$\kappa$ 为奇数	无	有	无
$\kappa$ 为偶数	有	有	有

系统中不会出现非厄米趋肤效应. 但如果  $\kappa$  是偶数, 那么系统中的非对称跃迁的符号不会随格点位置发生变化, 因此系统中会出现趋肤效应, 且其能谱结构也会在不同边界条件下表现出不同的特征. 图 2 和 3 中给出了  $\kappa = 1, 2, 3, 4$  时的系统能谱. 为表明这一特性的普遍性, 本文进一步计算了该系统在  $\kappa = 5, 6, 7, 8$  时在开边界条件下的能谱, 如图 8 所示. 从本征态的 dIPR 可以看出, 非厄米趋肤效应存在与否和  $\kappa$  是偶数还是奇数有关. 此外, 本文还计算了非厄米镶嵌型二聚化晶格在不同尺度下的能谱, 如图 9 所示. 可以发现, 前述的研究结论不随系统尺度的变化而发生改变.

此外, 由于系统在动量空间的布洛赫哈密顿量  $H(k)$  是一个  $q \times q$  维矩阵, 而  $q = \text{lcm}(2, \kappa)$ , 所以  $q$  始终为偶数. 可以证明:

$$S^{-1}H(k)S = -H(k), \quad (9)$$

其中,  $S = \text{diag}(1, -1, 1, -1, \dots, 1, -1)$  是一个  $q \times q$  维的对角矩阵. 因此, 系统中存在子晶格对称性 (sublattice symmetry). 尽管如此, 由前述的数值

结果可以发现, 只有在  $\kappa$  为偶数的系统中存在拓扑零能边界态, 而当  $\kappa$  为奇数时, 系统中不存在拓扑零能边界态. 综上, 将一维非厄米镶嵌型二聚化晶格的性质总结见表 1.

## 5 结论

本文引入了一类具有镶嵌型非对称跃迁的一维晶格模型. 通过分析系统的本征能谱和本征态性质, 发现镶嵌型非对称跃迁的周期对系统的性质具有显著的影响. 当镶嵌型调制周期为奇数时, 系统中没有非厄米趋肤效应, 其本征能谱在开边界和周期边界条件下是相同的 (除拓扑边界态外). 如果镶嵌型调制周期为偶数, 那么系统中存在非厄米趋肤效应, 且本征能谱在不同的边界条件下具有完全不同的结构. 本文还分析了这类系统中的拓扑态, 讨论了系统中的拓扑零能边界态及其表征. 本研究的结果表明, 通过改变一维格点系统中的非对称跃迁的施加方式和周期, 可以改变系统中的非厄米趋肤效应以及系统中的拓扑边界态, 从而进一步揭示了

非厄米系统特别是具有非对称跃迁的非厄米系统的新奇特性。

## 参考文献

- [1] Cao H and Wiersig J 2015 *Rev. Mod. Phys.* **87** 61
- [2] Konotop V V, Yang J, Zezyulin D A 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 035002
- [3] El-Ganainy R, Makris K G, Khajavikhan M, Musslimani Z H, Rotter S, Christodoulides D N 2018 *Nat. Phys.* **14** 11
- [4] Ashida Y, Gong Z, Ueda M 2020 *Adv. Phys.* **69** 3
- [5] Bergholtz E J, Budich J C, Kunst F K 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 015005
- [6] Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Musslimani Z H 2008 *Phys. Rev. Lett.* **100** 103904
- [7] Klaiman S, Günther U, Moiseyev N 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 080402
- [8] Guo A, Salamo G J, Duchesne D, Morandotti R, Volatier-Ravat M, Aimez V, Siviloglou G A, Christodoulides D N 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 093902
- [9] Rüter C E, Makris K G, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Segev M, Kip D 2010 *Nat. Phys.* **6** 192
- [10] Regensburger A, Bersch C, Miri M A, Onishchukov G, Christodoulides D N, Peschel U 2012 *Nature* **488** 167
- [11] Feng L, Xu Y L, Fegadolli W S, Lu M H, Oliveira J E B, Almeida V R, Chen Y F, Scherer A 2013 *Nat. Mater.* **12** 108
- [12] Peng B, Özdemir S K, Lei F, Monifi F, Gianfreda M, Long G L, Fan S, Nori F, Bender C M, Yang L 2014 *Nat. Phys.* **10** 394
- [13] Wiersig J 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 203901
- [14] Hodaie H, Hassan A U, Wittek S, Garcia-Gracia H, El-Ganainy R, Christodoulides D N, Khajavikhan M 2017 *Nature* **548** 187
- [15] Chen W, Özdemir S K, Zhao G, Wiersig J, Yang L 2017 *Nature* **548** 192
- [16] Brody D C, Graefe E M 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 230405
- [17] Lee T E, Chan C K 2014 *Phys. Rev. X* **4** 041001
- [18] Li J, Harder A K, Liu J, de Melo L, Joglekar Y N, Luo L 2019 *Nat. Commun.* **10** 855
- [19] Kawabata K, Ashida Y, Ueda M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 190401
- [20] Hamazaki R, Kawabata K, Ueda M 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 090603
- [21] Xiao L, Wang K, Zhan X, Bian Z, Kawabata K, Ueda M, Yi W, Xue P 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 230401
- [22] Wu Y, Liu W, Geng J, Song X, Ye X, Duan C K, Rong X, Du J 2019 *Science* **364** 878
- [23] Yamamoto K, Nakagawa M, Adachi K, Takasan K, Ueda M, Kawakami N 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 123601
- [24] Naghiloo M, Abbasi N, Joglekar Y N, Murch K W 2019 *Nat. Phys.* **15** 1232
- [25] Matsumoto N, Kawabata K, Ashida Y, Furukawa S, Ueda M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260601
- [26] Gong Z, Ashida Y, Kawabata K, Takasan K, Higashikawa S, Ueda M 2018 *Phys. Rev. X* **8** 031079
- [27] Shen R, Lee C H 2021 arXiv: 2107.03414
- [28] Zeng Q B, Lü R 2022 *Phys. Rev. A* **105** 042211
- [29] Bender C M, Boettcher S 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5243
- [30] Bender C M, Brody D C, Jones H F 2002 *Phys. Rev. Lett.* **89** 270401
- [31] Bender C M 2007 *Rep. Prog. Phys.* **70** 947
- [32] Mostafazadeh A 2002 *J. Math. Phys.* **43** 205
- [33] Mostafazadeh A 2010 *Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys.* **7** 1191
- [34] Zeng Q B, Yang Y B, Lü R 2020 *Phys. Rev. B* **101** 125418
- [35] Kawabata K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033391
- [36] Lee T E 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 133903
- [37] Lieu S 2018 *Phys. Rev. B* **97** 045106
- [38] Yin C, Jiang H, Li L, Lü R, Chen S. 2018 *Phys. Rev. A* **97** 052115
- [39] Hatano N, Nelson D R 1996 *Phys. Rev. Lett.* **77** 570
- [40] Yao S, Wang Z 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 086803
- [41] Yao S, Song F, Wang Z, 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 136802
- [42] Xiong Y 2018 *J. Phys. Commun.* **2** 035043
- [43] Budich J C, Bergholtz E J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 180403
- [44] Koch F, Budich J C 2022 *Phys. Rev. Res.* **4** 013113
- [45] Kunst F K, Edvardsson E, Budich J C, Bergholtz E J 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 026808
- [46] Jin L, Song Z 2019 *Phys. Rev. B* **99** 081103(R)
- [47] Yokomizo K, Murakami S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **123** 066404
- [48] Herviou L, Bardarson H H, Regnault N 2019 *Phys. Rev. A* **99** 052118
- [49] Yang Z, Zhang K, Fang C, Hu J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 226402
- [50] Zirnstein H G, Refael G, Rosenow B 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 216407
- [51] Zhang Z Q, Liu H, Liu H, Jiang H, Xie X C 2022 arXiv: 2201.01577
- [52] Borgnia D S, Kruchkov A J, Slager R J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 056802
- [53] Okuma N, Kawabata K, Shiozaki K, Sato M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 086801
- [54] Zhang K, Yang Z, Fang C 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 126402
- [55] Shnerb N M, Nelson D R 1998 *Phys. Rev. Lett.* **80** 5172
- [56] Jiang H, Lang L J, Yang C, Zhu S L, Chen S 2019 *Phys. Rev. B* **100** 054301
- [57] Zeng Q B, Xu Y 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033052
- [58] Liu Y, Wang Y, Liu X J, Zhou Q, Chen S 2021 *Phys. Rev. B* **103** 014203
- [59] Liu Y, Zhou Q, Chen S 2021 *Phys. Rev. B* **104** 024201
- [60] Wang Y, Xia X, Zhang L, Yao H, Chen S, You J, Zhou Q, Liu X J 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 196604
- [61] Zeng Q B, Lü R, You L 2021 *Europhys. Lett.* **135** 17003
- [62] Zeng Q B, Lü R 2021 *Phys. Rev. B* **104** 064203

SPECIAL TOPIC—Frontiers in non-Hermitian physics

# Non-Hermitian mosaic dimerized lattices\*

Hou Bo    Zeng Qi-Bo<sup>†</sup>

(*Department of Physics, Capital Normal University, Beijing 100048, China*)

( Received 6 May 2022; revised manuscript received 30 May 2022 )

## Abstract

Non-Hermitian systems have attracted much attention during the past few years, both theoretically and experimentally. The existence of non-Hermiticity can induce multiple exotic phenomena that cannot be observed in Hermitian systems. In this work, we introduce a new non-Hermitian system called the non-Hermitian mosaic dimerized lattice. Unlike the regular nonreciprocal lattices where asymmetric hoppings are imposed on every hopping term, here in the mosaic dimerized lattices the staggered asymmetric hoppings are only added to the nearest-neighboring hopping terms with equally spaced sites. By investigating the energy spectra, the non-Hermitian skin effect (NHSE), and the topological phases in such lattice models, we find that the period of the mosaic asymmetric hopping can influence the system's properties significantly. For a system with real system parameters, we find that as the strength of asymmetric hopping increases, the energy spectra of the system under open boundary conditions will undergo a real-imaginary or real-complex transition. As to the NHSE, we find that when the period is odd, there appears no NHSE in the system and the spectra under open boundary conditions (OBCs) and periodic boundary conditions (PBCs) are the same (except for the topological edge modes under OBCs). If the period of the mosaic asymmetric hopping is even, the NHSE will emerge and the spectra under different boundary conditions exhibit distinctive structures. The PBC spectra form loop structures, indicating the existence of point gaps that are absent in the spectra under OBCs. The point gap in the PBC spectrum is shown to be the topological origin of the NHSE under OBCs, which also explains the NHSE in our mosaic dimerized lattices. To distinguish whether the bulk states of the system under OBCs are shifted to the left or right end of the one-dimensional lattice due to the NHSE, we define a new variable called the directional inverse participation ratio (dIPR). The positive dIPR indicates that the state is localized at the right end while the negative dIPR corresponds to the states localized at the left end of the one-dimensional lattice. We further study the topological zero-energy edge modes and characterize them by calculating the Berry phases based on the generalized Bloch Hamiltonian method. In addition, we also find that the topological edge modes with nonzero but constant energy can exist in the system. Our work provides a new non-Hermitian lattice model and unveils the exotic effect of mosaic asymmetric hopping on the properties of non-Hermitian systems.

**Keywords:** non-Hermitian systems, mosaic asymmetric hopping, non-Hermitian skin effect, topological zero-energy edge modes

**PACS:** 03.65.Vf, 03.65.Yz, 68.65.Cd, 71.23.An

**DOI:** [10.7498/aps.71.20220890](https://doi.org/10.7498/aps.71.20220890)

\* Project supported by R&D Program of Beijing Municipal Education Commission (Grant No. KM202210028017) and Open Research Fund Program of the State Key Laboratory of Low-Dimensional Quantum Physics (Grant No. KF202109).

<sup>†</sup> Corresponding author. E-mail: [zengqibo@cnu.edu.cn](mailto:zengqibo@cnu.edu.cn)