

一种与开放系统初态无关的非马尔科夫度量*

贺志^{1)†} 蒋登魁¹⁾ 李艳²⁾

1) (湖南文理学院数理学院, 常德 415000)

2) (南昌师范学院物理与电子信息学院, 南昌 330032)

(2022年5月26日收到; 2022年8月9日收到修改稿)

近年来, 量化开放量子系统中的非马尔科夫效应已经成为了量子消相干控制领域研究中的一个重要科学问题. 本文对于单个开放的两能级系统, 将基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量从系统初态为纯态的情况推广到系统初态为任意态的情况. 作为该非马尔科夫度量的应用, 分别研究了利用量子 Fisher 信息在检测一个两能级系统受到零温度振幅耗散通道、相位衰减通道和随机么正通道作用时对应非马尔科夫过程发生的条件. 研究结果显示: 一个相位参数的量子 Fisher 信息对这三种衰减通道的非马尔科夫过程发生所满足的条件与系统初态的选择是无关的. 进一步, 对于振幅耗散通道和相位衰减通道, 非马尔科夫过程发生的条件同基于迹距离、映射的可分性、量子互信息和量子 Fisher 信息矩阵等给出的条件是等价的. 如预期的一样, 对于振幅耗散通道情况且选择系统初态为最优化纯态时, 相应的结果正是 Lu 等获得的结果 (Lu X M, Wang X G, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103); 而对于随机么正通道, 其马尔科夫过程发生的条件同基于迹距离、映射的可分性、量子互信息和量子 Fisher 信息矩阵等给出的条件是不完全等价的. 另外, 得到了一个有趣的关系: 在这三种耗散通道模型中系统演化态的量子 l_1 范数相干性的平方正好等于相位参数的量子 Fisher 信息. 总之, 本文得到的结果不仅完善了用量子 Fisher 信息来检测开放系统中非马尔科夫效应的应用范围, 同时也进一步彰显了量子 Fisher 信息在量子信息处理中独特的作用.

关键词: 开放系统, 量子 Fisher 信息, 非马尔科夫度量**PACS:** 03.67.-a, 03.65.Yz, 03.67.Mn**DOI:** 10.7498/aps.71.20221053

1 引言

在量子消相干控制领域研究中, 假设环境没有记忆效应, 开放量子系统的信息或能量只能单方向流入外界环境, 这个过程常被称为马尔科夫过程; 相反地, 如果环境有记忆效应, 则系统流入外界环境的信息或能量在某段时间还能流回系统, 此过程常被称为非马尔科夫过程. 开放量子系统中的这种非马尔科夫效应将会使得系统的信息和能量的衰

减得以延缓. 在真实的量子信息处理中, 实际的环境一般都具有记忆效应, 所以研究开放系统中的非马尔科夫效应显得十分必要^[1-5]. 研究表明: 开放系统中的非马尔科夫效应对量子信息处理有诸多积极的影响. 如利用环境的非马尔科夫效应可延长两量子比特的纠缠时间^[6-8]、保护原子熵压缩^[9-11]、以及提高量子 Fisher 信息^[12,13]等. 自然地, 怎样去量化开放系统中的非马尔科夫效应就成为了一个很有趣的研究课题. 近 10 多年来, 在理论上相继有许多优秀的非马尔科夫度量被提出, 如基于迹距

* 中国博士后科学基金 (批准号: 2017M622582)、湖南省教育厅重点项目 (批准号: 19A339)、湖南省自然科学基金 (批准号: 2020JJ4443, 2019JJ50400)、江西省教育厅科研基金 (批准号: GJJ181086) 和湖南省光电信息集成与光学制造技术重点实验室资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hz9209@126.com

离^[14-16]、映射的可分性^[17]、量子 Fisher 信息^[18]和量子互熵^[19]等就是几种非常流行的非马尔科夫度量方式,且部分已在实验上被证实^[20,21].在现有的非马尔科夫度量中,从不同的角度出发大概可以分成三大类:1) 基于一些物理量^[14,18,22-32]在迹保守且完全正定映射下是非增的性质;2) 从系统经历的动力学映射的可分性^[17,33-35];3) 考虑在一个有辅助系统的大系统中基于一些物理量^[19,36-40]在迹保守且完全正定映射下具有非增的性质.

然而,当将这些非马尔科夫度量应用到具体模型时不难发现,只有部分非马尔科夫度量在检测非马尔科夫效应时的有效性与系统初态选择是无关的.早在2011年,Zeng等^[41]已经阐明,利用基于迹距离的非马尔科夫度量^[14]在检测零温度振幅耗散模型和相位衰减模型中的非马尔科夫效应时,与系统初态选择有关的要求可以被移除,但不影响其检测的有效性.近来,有部分基于量子相干性的非马尔科夫度量被揭示在检测非马尔科夫效应时的有效性也同系统初态选择是无关的,如量子 l_1 范数相干性^[28]、基于 skew 信息和修改的 Tsallis 相对 α 熵的相干性^[30]、基于保真度和几何度量相干性^[32]等.可是,也有相当一部分非马尔科夫度量的有效性与系统初态选择是有关的,如基于量子纠缠^[17]、量子互信息^[19]、最大相对熵^[29]、Hilbert-Schmidt speed (HSS)^[31]、量子局域不确定度^[36]及量子相对熵相干性^[40]等. Lu 等^[18]基于量子 Fisher 信息流定义了一种非马尔科夫度量,并运用其去检测零温度振幅耗散模型的非马尔科夫效应.后来, Song 等^[26]基于两参数的量子 Fisher 信息矩阵定义了一种非马尔科夫度量.然而,这两个文献中考虑的都是假设系统初态为纯态的情况.那么,一个问题可能被提出:基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量在检测非马尔科夫效应时的有效性是否与系统初态选择有关?另外,该非马尔科夫度量与系统初态选择无关的特性是否取决于考虑的耗散模型?这些问题是促使本文研究的主要初衷.

本文在文献^[18]的基础上,假设一个开放两能级系统初态为任意量子态,将基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量运用到三种常见的耗散通道——零温度振幅耗散通道、相位衰减通道和随机么正通道中,得到了对应非马尔科夫过程或马尔科夫过程发生的条件,并同其他非马尔科夫度量作了详细的比较.研究发现:基于量子 Fisher 信息的非马尔科

夫度量在这三种耗散通道中的有效性同系统初态的选择是无关的.特别地,对于振幅耗散通道模型,如果选择系统初态为文献^[18]中考虑的纯态,相应结果简化成文献^[18]中的特殊情况.当然,对于相位衰减通道模型,其非马尔科夫过程发生的条件同迹距离、映射的可分性、量子互信息和量子 Fisher 信息矩阵给出的条件是等价的.然而对于随机么正通道模型,通过对通道的一些具体参数进行讨论,发现其马尔科夫过程发生的条件同基于迹距离、映射的可分性、量子互信息和量子 Fisher 信息矩阵给出的条件是不完全等价的.另外,也揭示了在这三种耗散通道模型中量子 Fisher 信息与相干性之间的一个密切关系,即系统演化态的量子 l_1 范数相干性的平方正好等于相位参数的量子 Fisher 信息.因此,本文得到的结果可能为开放系统中非马尔科夫动力学研究提供了一种与系统初态无关的非马尔科夫度量,进一步强化了量子 Fisher 信息在量子信息处理中的独特作用.

本文结构安排如下:第2节利用量子 Fisher 信息在迹保守且完全正定映射下具有非增性的性质构建了一种非马尔科夫度量;第3节给出了将基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量用于三种典型的耗散通道模型中的非马尔科夫过程或马尔科夫过程发生的条件,并详细讨论了同其他非马尔科夫度量给出的条件之间的等价性问题;第4节对文中获得的结果作了简要总结和展望.

2 基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量的构建

量子 Cramér-Rao 不等式^[42]揭示了量子 Fisher 信息是刻画单个待估计参数达到最优理论精度的一个物理量,它已经成为了量子度量学的核心概念之一.根据量子 Cramér-Rao 不等式,对某一个待估计参数 θ 测量的精度由下面的不等式^[42]决定:

$$\sqrt{\langle(\Delta\theta)^2\rangle_\theta} \geq \frac{1}{\sqrt{\nu F(\rho(\theta))}}, \quad (1)$$

这里, $\sqrt{\langle(\Delta\theta)^2\rangle_\theta}$ 代表 θ 的测量精度是方差 $(\Delta\theta)^2 = (\theta - \langle\theta\rangle)^2$ 平均的平方根, ν 是测量次数, $F(\rho(\theta))$ 是量子 Fisher 信息.明显地,对于确定的测量次数 ν ,量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 越大意味着 θ 测量的精度越高.这里的量子 Fisher 信息 F_θ 满足

$$F(\rho(\theta)) = \text{tr}[\rho(\theta)\mathbf{L}^2(\theta)], \quad (2)$$

其中 $\rho(\theta)$ 是系统包含待估计参数 θ 的厄米算符, $\mathbf{L}(\theta)$ 是一个厄米算符, 常被称为对称对数导数 (symmetric logarithmic derivation, SLD), 并由下列方程决定:

$$\frac{\partial \rho(\theta)}{\partial \theta} = \frac{1}{2}[\mathbf{L}(\theta)\rho(\theta) + \rho(\theta)\mathbf{L}(\theta)]. \quad (3)$$

方程 (2) 和方程 (3) 定义的量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 是量子信息理论中一个非常重要的物理量, 它具有许多优良的物理性质^[18,43]:

1) 具有在非参么正演化 $\mathbf{U}(\mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{U}^\dagger\mathbf{U} = \mathbf{I})$ 下不变性: $F(\rho(\theta)) = F(\mathbf{U}\rho(\theta)\mathbf{U}^\dagger)$;

2) 具有在迹保守且完全正定映射 Φ_t 下非增性 (或者被称为收缩性 (contractivity)): $F(\Phi_t\rho(\theta)) \leq F(\rho(\theta))$;

3) 具有直积可加性: $F(\rho(\theta)) = \sum_i F_i(\rho_i(\theta))$, 其中 $\rho(\theta) = \otimes_i \rho_i(\theta)$;

4) 具有凸性: $F(\rho(\theta)) \leq \sum_i \lambda_i F_i(\rho_i(\theta))$, 其中 $\rho(\theta) = \sum_i \lambda_i \rho_i(\theta)$, λ_i 是子系统 $\rho_i(\theta)$ 所占的比重.

特别地, 量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 同量子信息理论中其他一些重要的度量像保真度 $f(\rho_1, \rho_2) = \text{tr}\sqrt{\sqrt{\rho_1}\rho_2\sqrt{\rho_1}}$ 有着密切的联系, 如^[44] $\xi = \partial^2 f(\rho(\theta), \rho(\theta + \delta\theta)) / \partial(\delta^2\theta) = F_\theta/4$, 其中 ξ 是保真率. 这进一步印证了量子 Fisher 信息在量子信息领域中扮演着一个极其重要的角色.

在量子消相干的主方程框架下, 如果一个开放系统的动力学可以用一个迹保守且完全正定映射来描述, 就表明开放系统经历了一个马尔科夫过程^[1,14]. 因此, 这个完全正定映射在某个时间段的违反就可用来表征此时开放系统经历了一个非马尔科夫过程. 考虑到量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 在一个迹保守且完全正定映射下具有非增的性质, 那么它在某段时间上的违反就可以被用来检测开放系统在这段时间上非马尔科夫过程的发生. 为此, 基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫性 (non-Markovianity) 能被定义为

$$\mathcal{N}_{\text{QFI}}(\Phi_t) = \max_{\rho(0)} \int_{\chi(t)>0} \chi(t) dt, \quad (4)$$

其中定义 $\chi(t) = dF(\rho(\theta))/dt$, 最大化 (“max”) 取遍系统所有的初态. 明显地, $\chi(t) \leq 0$ 对应马尔科

夫过程; $\chi(t) > 0$ 对应非马尔科夫过程. 文献 [18] 建议了一种类似的非马尔科夫度量, 相应的 $\chi(t)$ 被命名为量子 Fisher 信息流 (其中 $\chi(t) > 0$ 表示量子信息流是向内的, 对应非马尔科夫过程; $\chi(t) < 0$ 表示量子信息流是向外的, 对应马尔科夫过程), 他们具体研究了用系统初态为纯态的量子 Fisher 信息来见证一个零温度振幅耗散通道模型中非马尔科夫过程的发生.

本文在文献 [18] 的启发下, 尝试将方程 (4) 中对于最大化的要求移除, 但不影响用量子 Fisher 信息来检测非马尔科夫过程的有效性. 通常地, 在研究开放系统中的非马尔科夫过程时, 寻找一种与系统初态选择无关的非马尔科夫度量方式不管是理论研究还是实验角度看都是十分重要的. 其原因是: 一方面, 只需要关注系统受到外界环境的影响而不需要关心系统自身的量子态; 另一方面, 它也降低了在实验上验证开放系统中非马尔科夫效应对于系统初态制备的要求, 简化了实验的操作性. 下面, 首先用基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量 (如方程 (4) 所示) 来重新考察一个二能级系统经历一个零温度振幅耗散通道作用时其非马尔科夫过程发生的条件. 有趣的是, 研究表明: 对于零温度振幅耗散通道模型, 方程 (4) 中对于最大化的要求确实可以被移除, 而不影响其测度非马尔科夫过程的有效性. 相应地, 文献 [18] 中考虑系统初态为纯态的情况是这里的一种特殊情况. 进一步, 我们研究了基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量在其他非马尔科夫衰减通道, 如相位衰减通道和随机么正通道模型中的表现, 发现也有类似的特点.

接下来, 当讨论各种具体的非马尔科夫耗散模型中某个参数估计问题时, 必然要涉及到量子 Fisher 信息的计算问题. 一般来说, 量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 的计算在系统密度矩阵的本征空间中操作是方便的. 根据文献 [45], 在系统的密度矩阵对角化形式, 如 $\rho(\theta) = \sum_{i=1}^M \lambda_i(\theta) |\psi_i(\theta)\rangle\langle\psi_i(\theta)|$ (其中 M 表示所有非零本征值 $\lambda_i(\theta)$ 对应的本征态 $|\psi_i(\theta)\rangle$ 构成的子空间, 也被称为支集 (support) 的维度) 下, 量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 表示如下:

$$F(\rho(\theta)) = F_c + F_q, \quad (5)$$

其中

$$\begin{aligned}
 F_c &= \sum_{i=1}^M \frac{(\partial_\theta \lambda_i(\theta))^2}{\lambda_i(\theta)}, \\
 F_q &= \sum_{i=1}^M \lambda_i(\theta) 4 \left(\langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle|^2 \right) \\
 &\quad - \sum_{i \neq j}^M \frac{8\lambda_i(\theta)\lambda_j(\theta)}{\lambda_i(\theta) + \lambda_j(\theta)} |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_j \rangle|^2, \quad (6)
 \end{aligned}$$

分别代表只与密度矩阵本征值有关的经典贡献和与本征态有关的量子贡献. 考虑到 $M \leq d$ (假设密度矩阵的总维度为 d), 那么, 量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 如方程 (5) 和方程 (6) 所示的表达式对任意秩的密度矩阵都是成立的. 特别地, 对于纯态, 也就是 $M = 1$ (对应 $\lambda_1(\theta) = 1$) 的量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 退化

$$F(\rho(\theta)) = 4 \left(\langle \partial_\theta \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle - |\langle \psi_i | \partial_\theta \psi_i \rangle|^2 \right).$$

特别地, 文献 [46] 给出了单个封闭和开放量子比特系统在布洛赫球表示, 如 $\rho(\theta) = 1/2(1 + \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\sigma})$ (其中 $\boldsymbol{\omega} = (\omega_x, \omega_y, \omega_z)^T$ 表示布洛赫矢量, $\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ 表示著名的泡利矩阵) 中量子 Fisher 信息的计算表达式:

$$F_C(\rho(\theta)) = \begin{cases} |\partial_\theta \boldsymbol{\omega}|^2 + \frac{(\boldsymbol{\omega} \cdot \partial_\theta \boldsymbol{\omega})^2}{1 - |\boldsymbol{\omega}|^2}, & |\boldsymbol{\omega}| < 1, \\ |\partial_\theta \boldsymbol{\omega}|^2, & |\boldsymbol{\omega}| = 1, \end{cases} \quad (7)$$

$$F_O(\rho(\theta)) = |\partial_\theta \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega})|^2 + \frac{[\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega}) \cdot \partial_\theta \boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega})]^2}{1 - |\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\omega})|^2}, \quad (8)$$

其中 $F_C(\rho(\theta))$ 代表单个封闭量子比特系统的量子 Fisher 信息, $F_O(\rho(\theta))$ 代表单个开放量子比特系统的量子 Fisher 信息, $\boldsymbol{\varepsilon}$ 表示一个量子噪声的动力学映射, 它在量子态上作用可以用 Kraus 算符形式来表达, 如 $\boldsymbol{\varepsilon}(\rho) = \sum_\mu K_\mu \rho K_\mu^\dagger$.

3 应用到三类典型的非马尔科夫耗散通道模型

3.1 非马尔科夫零温度振幅耗散通道

首先, 注意到文献 [18] 研究了利用一个相位参数的量子 Fisher 信息去量化一个二能级系统受到一个零温度振幅耗散通道作用的非马尔科夫效应. 文中的这个相位参数测量估计的方案是: 一个二能级系统最初处在最优化纯态 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{opt}}\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$ (这里, $|g\rangle, |e\rangle$ 分别表示二能级

系统的基态和激发态); 然后在 $|\psi_{\text{opt}}\rangle$ 执行一个量子比特相位门, 如 $U_\theta = |g\rangle\langle g| + \exp(i\theta)|e\rangle\langle e|$ (引入相位参数 θ); 最后, 假设这个相位参数进行测量估算之前系统受到了一个零温度振幅耗散通道作用. 本文研究的方案同文献 [18] 是类似的, 唯一不同的是这里考虑在基矢 $\{|e\rangle, |g\rangle\}$ 下系统最初处于一个一般量子态情况, 如

$$\rho_{\text{in}}(0) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) & \rho_{eg}(0) \\ \rho_{ge}(0) & \rho_{gg}(0) \end{pmatrix}. \quad (9)$$

这样, 不难得到系统在经过量子比特相位门作用后的量子态如下:

$$\rho(0) = U_\theta \rho_{\text{in}}(0) U_\theta^\dagger = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) & \rho_{eg}(0) e^{i\theta} \\ \rho_{ge}(0) e^{-i\theta} & \rho_{gg}(0) \end{pmatrix}. \quad (10)$$

接下来, 这个二能级系统受到一个零温度振幅耗散通道作用时其动力学演化满足下列主方程 [4]:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt} \rho(t) &= -\frac{i}{2} s(t) [\boldsymbol{\sigma}_+ \boldsymbol{\sigma}_-, \rho(t)] \\
 &\quad + \gamma(t) \left(\boldsymbol{\sigma}_- \rho(t) \boldsymbol{\sigma}_+ - \frac{1}{2} \{ \boldsymbol{\sigma}_+ \boldsymbol{\sigma}_-, \rho(t) \} \right), \quad (11)
 \end{aligned}$$

其中 $s(t) = -2\text{Im}(\dot{h}(t)/h(t))$ 代表兰姆移动, $\gamma(t) = -2\text{Re}(\dot{h}(t)/h(t)) = -(2/|h(t)|)(d|h(t)|/dt)$ 表示含时的衰减率. 参数 $h(t)$ 满足下列微分方程:

$$\dot{h}(t) = -\int_0^t f(t-t_1) h(t_1) dt_1, \quad (12)$$

其中, 初始条件有 $h(0) = 1$, 记忆核 $f(t-t_1) = \int d\omega J(\omega) \exp[i(\omega_0 - \omega)(t-t_1)]$ 是与零温度热库的谱密度 $J(\omega)$ 有关的函数. 这样在任意时刻 t , 系统的密度算符能够表示为

$$\begin{aligned}
 \rho(t) &= \Phi_t \rho(0) \\
 &= \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) |h(t)|^2 & \rho_{eg}(0) e^{i\theta} h(t) \\ \rho_{ge}(0) e^{-i\theta} h^*(t) & 1 - \rho_{ee}(0) |h(t)|^2 \end{pmatrix}. \quad (13)
 \end{aligned}$$

最后, 利用方程 (7) 或方程 (8), 通过直接的代数运算获得待测参数 θ 的量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 为

$$F(\rho(\theta)) = 4 |h(t)|^2 |\rho_{eg}(0)|^2. \quad (14)$$

像预期的一样, 当考虑系统最初处在最优化纯态 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{opt}}\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$, 即 $\rho_{eg}(0) = 1/2$, 且 $h(t)$ 为实数时, 量子 Fisher 信息 $F(\rho(\theta))$ 恰好简化成文献 [18] 中的结果, 即 $F(\rho(\theta)) = h^2(t)$.

这样, 根据方程 (4), 对于基于量子 Fisher 信

息的非马尔科夫性能够表示如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{QFI}}(\Phi_t) &= \max_{\rho(0)} \int_{\chi(t)>0} \chi(t) dt \\ &= \max_{\rho(0)} \int_{\gamma(t)<0} -4\gamma(t) |h(t)|^2 |\rho_{\text{eg}}(0)|^2 dt, \end{aligned} \quad (15)$$

其中含时的衰减率 $\gamma(t) = -\frac{2}{|h(t)|} \frac{d}{dt} |h(t)|$. 等价地, 相应非马尔科夫过程发生的条件可以用下列关系式来表示:

$$\chi(t) > 0 \Leftrightarrow \gamma(t) < 0. \quad (16)$$

方程 (16) 清楚地显示: 用量子 Fisher 信息见证零温度振幅耗散模型中非马尔科夫过程发生的条件, 即 $\gamma(t) < 0$, 同其他非马尔科夫度量, 如迹距离 [47]、映射的可分性 [47]、量子互熵 [48] 及量子 Fisher 信息矩阵 [26] 给出的条件是相同的. 另外, 观察方程 (15) 不难发现一个值得注意的特征, 即方程 (15) 最大化的要求其实可以被移除, 但不影响它见证非马尔科夫过程的有效性. 换句话说, 用量子 Fisher 信息来检测非马尔科夫过程发生的有效性或灵敏度是与系统初态的选择无关的. 对于零温度振幅耗散模型, 也存在一些与系统初态选择无关的非马尔科夫度量, 如基于迹距离 [41] 和量子 l_1 范数相干性 [28] 等. 以上研究结果显示, 利用量子 Fisher 信息可以提供一种可选择的与系统初态无关的非马尔科夫度量. 注意到, 文献 [18] 中考虑的系统最初处在最优化纯态 $|\psi_{\text{in}}\rangle = |\psi_{\text{opt}}\rangle = (|g\rangle + |e\rangle)/\sqrt{2}$, 即 $\rho_{\text{eg}}(0) = 1/2$, 正好是使得方程 (15) 取得最大值的初态. 而我们的结果延伸了文献 [18] 的结果, 将系统初态为纯态的情况推广到了任意混合态的情况, 这是本文获得的主要结果之一. 为了进一步直观显示基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量是否与同系统初态有关, 图 1 给出了在不同系统初态下 \mathcal{N}_{QFI} 随参数 λ 的变化关系. 对于零温度振幅耗散通道模型, 这里假设二能级系统的本征频率与环境库的中心频率是相同的即共振情况, 且环境库的谱密度是洛伦兹谱密度 [1]

$$J(\omega) = \frac{1}{2\pi} \frac{\gamma_0 \lambda^2}{(\omega_0 - \omega)^2 + \lambda^2} \quad (17)$$

时, $h(t)$ 存在下列的解析表达式 [1]:

$$h(t) = e^{-\lambda t/2} \left[\cosh(dt/2) + \frac{\lambda}{d} \sinh(dt/2) \right], \quad (18)$$

其中 $d = \sqrt{\lambda^2 - 2\gamma_0\lambda}$, λ 表示耦合的谱宽度, 它与环境库的关联时间尺度 τ_B 的关系为 $\tau_B = \lambda^{-1}$; γ_0

表示系统和环境的耦合强度, 它与系统的弛豫时间尺度 τ_R 的关系为 $\tau_R = \gamma_0^{-1}$. 从图 1 可以明显地看到, 对于不同系统初态 (如 $|\rho_{\text{eg}}(0)| = 3/10 \rightarrow 2/5 \rightarrow 1/2$), 虽然 \mathcal{N}_{QFI} 的初始值有所不同, 但它们随 λ 的增加呈单调递减的关系, 以及变化趋势都是相同的. 这与之前得到的结果也完全符合: 基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量在见证零温度振幅耗散通道模型中非马尔科夫过程时的有效性确实与系统初态选择是无关的. 另外, 对于不同的系统初态, \mathcal{N}_{QFI} 之所以随 λ 的增加而单调递减, 其原因是: 耦合的谱宽度 λ 与环境库的关联时间尺度 τ_B 有以下关系: $\tau_B = \lambda^{-1}$, 这样, 越大的 λ 意味着环境库的关联时间越短, 从环境库流回系统的信息或能量就会越少, 从而导致非马尔科夫效应, 即 \mathcal{N}_{QFI} 随 λ 的增加而单调递减.

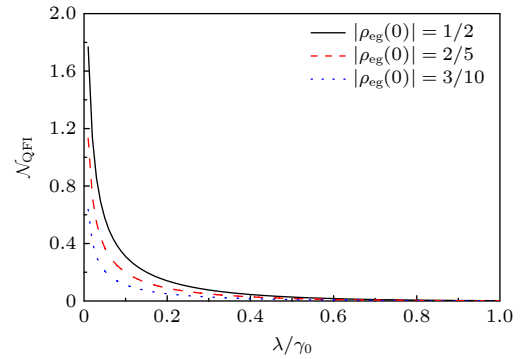


图 1 在不同系统初态 (这里用不同初态对应的非对角元值 $|\rho_{\text{eg}}(0)|$ 来表示) 下 \mathcal{N}_{QFI} 随参数 λ 的变化

Fig. 1. Non-Markovianity \mathcal{N}_{QFI} as a function of λ for different initial states of system denoted by their off-diagonal elements $|\rho_{\text{eg}}(0)|$.

3.2 非马尔科夫相位衰减通道

本节继续研究利用一个相位参数的量子 Fisher 信息来量化一个二能级系统受到一非马尔科夫相位衰减通道作用时其非马尔科夫效应问题. 类似于 3.1 节对于处理非马尔科夫零温度振幅耗散通道的方案, 假设一个二能级系统受到一非马尔科夫相位衰减通道作用之前处在方程 (10) 所示的量子态. 而一个二能级系统在经历一个非马尔科夫相位衰减通道作用时, 系统的密度算符的演化遵循下列的主方程 [1]:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \gamma(t) (\sigma_z \rho(t) \sigma_z - \rho(t)). \quad (19)$$

因此, 处于方程 (10) 所示量子态的二能级系统按

方程 (19) 所示的规律演化, 最终该二能级系统在任意时刻 t 的密度算符能够被写成:

$$\rho(t) = \Phi_t \rho(0) = \begin{pmatrix} \rho_{ee}(0) & \rho_{eg}(0) e^{i\theta} f(t) \\ \rho_{ge}(0) e^{-i\theta} f(t) & \rho_{gg}(0) \end{pmatrix}, \quad (20)$$

其中 $f(t) = \exp\left[-2 \int_0^t \gamma(\tau) d\tau\right]$. 根据方程 (7) 或方程 (8), 通过一些简单的计算, 不难得到相位参数 θ 的量子 Fisher 信息为

$$F(\rho(\theta)) = 4f^2(t) |\rho_{eg}(0)|^2. \quad (21)$$

相应地, 根据方程 (4), 基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫性能够获得如下:

$$\begin{aligned} \mathcal{N}_{\text{QFI}}(\Phi_t) &= \max_{\rho(0)} \int_{\chi(t) > 0} \chi(t) dt \\ &= \max_{\rho(0)} \int_{\gamma(t) < 0} -16\gamma(t) f^2(t) |\rho_{eg}(0)|^2 dt. \end{aligned} \quad (22)$$

显然, 对于相位衰减通道中非马尔科夫过程发生的条件 $\chi(t) > 0$ 等价于 $\gamma(t) < 0$. 这个非马尔科夫条件与用其他非马尔科夫度量, 如迹距离 [47]、映射的可分性 [47]、量子互熵 [48] 及量子 Fisher 信息矩阵 [26] 等给出的条件是相同的. 类似地, 在方程 (22) 中的最大化的要求也可以被移除, 而不影响用量子 Fisher 信息来测度非马尔科夫过程的有效性.

3.3 非马尔科夫随机么正通道

进一步, 考虑当一个二能级量子系统与一个随机么正通道相互作用模型, 该系统的动力学演化可以用下列唯象的主方程 [47] 来描述:

$$\frac{d}{dt} \rho(t) = \sum_{i=1}^3 \gamma_i(t) [\sigma_i \rho(t) \sigma_i - \rho(t)], \quad (23)$$

这里, $\gamma_i(t)$ ($i = 1, 2, 3$) 表示含时的衰减系数, σ_i ($i = 1, 2, 3$) 表示著名的泡利矩阵. 明显地, 随机么正通道模型是相位衰减通道模型的一个推广模型, 即它除了考虑相位衰减通道模型中 σ_z (σ_3) 以外, 同时还考虑了 σ_x (σ_1) 和 σ_y (σ_2) 的影响.

等价地, 主方程 (23) 可以写成以下两种表示形式:

$$\Phi_t \rho(t) = \sum_{i=0}^3 p_i(t) \sigma_i \rho(0) \sigma_i \quad (24)$$

和

$$\Phi_t \sigma_i = \lambda_i(t) \sigma_i \quad (i = 0, 1, 2, 3), \quad (25)$$

这里, $\sigma_0 = \mathbf{I}$, $p_i(t) \geq 0$ 以及 $\sum_{i=0}^3 p_i(t) = 1$. 特别地, 在 $t = 0$ 时, 由 $\Phi_0 = \mathbf{I}$ 得到 $p_0(0) = 1$ 以及 $p_i(0) = 0$ ($i = 1, 2, 3$). 另外, 方程 (24) 和方程 (25) 中的参数 $p_i(t)$ 和 $\lambda_i(t)$ 之间有下列关系:

$$\begin{aligned} p_0(t) &= \frac{1}{4} [1 + \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \lambda_3(t)], \\ p_1(t) &= \frac{1}{4} [1 + \lambda_1(t) - \lambda_2(t) - \lambda_3(t)], \\ p_2(t) &= \frac{1}{4} [1 + \lambda_2(t) - \lambda_1(t) - \lambda_3(t)], \\ p_3(t) &= \frac{1}{4} [1 + \lambda_3(t) - \lambda_2(t) - \lambda_1(t)], \end{aligned} \quad (26)$$

其中

$$\lambda_0(t) = 1, \quad \lambda_i(t) = e^{2 \left[\Gamma_i(t) - \sum_{j=1}^3 \Gamma_j(t) \right]} \quad (i = 1, 2, 3)$$

以及

$$\Gamma_i(t) = \int_0^t \gamma_i(\tau) d\tau \quad (i = 1, 2, 3).$$

注意到, 方程 (25) 揭示了随机么正通道作用在泡利矩阵上的运算规则, 那么系统的初态被选择成布洛赫球形式比较方便, 这样, 系统在经历随机么正通道作用之前的态可表示成

$$\rho(0) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 + a_3 & (a_1 - ia_2) e^{i\theta} \\ (a_1 + ia_2) e^{-i\theta} & 1 - a_3 \end{pmatrix}. \quad (27)$$

在方程 (25) 所示的映射作用下, 系统在任意时刻 t 的态可被获得如下:

$$\rho(t) = \frac{1}{2} \mathbf{I} + \frac{1}{2} e^{-2[\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t)]} \begin{pmatrix} a_3 & \omega(t) \\ \omega^*(t) & -a_3 \end{pmatrix}, \quad (28)$$

其中 $\omega(t) = e^{-2\Gamma_3(t)} e^{i\theta} [e^{2\Gamma_1(t)} a_1 - ie^{2\Gamma_2(t)} a_2]$.

利用方程 (7) 或方程 (8), 可以给出相位参数 θ 的量子 Fisher 信息的解析表达式如下:

$$F(\rho(\theta)) = e^{-4[\Gamma_2(t) + \Gamma_3(t)]} a_1^2 + e^{-4[\Gamma_1(t) + \Gamma_3(t)]} a_2^2. \quad (29)$$

通过一些直接的计算, 不难得到 $\chi(t) = \frac{dF(\rho(\theta))}{dt}$ 的显示表达式为

$$\begin{aligned} \chi(t) &= -4e^{-4[\Gamma_1(t) + \Gamma_2(t) + \Gamma_3(t)]} \left\{ e^{4\Gamma_1(t)} a_1^2 [\gamma_2(t) \right. \\ &\quad \left. + \gamma_3(t)] + e^{4\Gamma_2(t)} a_1^2 [\gamma_1(t) + \gamma_3(t)] \right\}. \end{aligned} \quad (30)$$

因为随机么正通道涉及到多个通道情况, 其非马尔科夫过程发生的条件有点复杂, 现在大多数文献研

究这个模型的时候都集中在马尔科夫条件上. 因为一旦马尔科夫条件中某个子条件被违反, 则意味着系统动力学是非马尔科夫的. 对于相同的随机么正通道, Chruscinski 和 Wudarski^[47] 研究显示, 基于迹距离和映射的可分性的马尔科夫条件是不完全等价的; Jiang 和 Luo^[48] 研究显示, 基于量子互熵、迹距离以及映射的可分性的马尔科夫条件是不完全等价的; Song 等^[26] 研究显示, 基于量子 Fisher 信息矩阵、量子互熵和迹距离的马尔科夫条件是不完全等价的. He 等^[40] 研究显示, 基于量子相对熵相干性、迹距离、映射的可分性以及量子互熵的马尔科夫条件也是不完全等价的. 所以, 这里也只研究该模型中基于量子 Fisher 信息的马尔科夫条件. 从方程 (30) 容易得到, 基于量子 Fisher 信息的马尔科夫条件 $\chi(t) \leq 0$ 等价于当且仅当 $\gamma_2(t) + \gamma_3(t) \geq 0$ 和 $\gamma_1(t) + \gamma_3(t) \geq 0$. 明显地, 该马尔科夫条件同基于迹距离的马尔科夫条件 (如当且仅当 $\gamma_1(t) + \gamma_2(t) \geq 0$, $\gamma_1(t) + \gamma_3(t) \geq 0$, $\gamma_2(t) + \gamma_3(t) \geq 0$)、基于映射的可分性的马尔科夫条件 (如当且仅当 $\gamma_1(t) \geq 0$, $\gamma_2(t) \geq 0$, $\gamma_3(t) \geq 0$) 是不完全等价的. 为了更具体地同其他非马尔科夫度量的马尔科夫条件进行比较, 这里主要考虑一类特殊情况: $p_i(t) = \alpha_i(1 - p_0(t))$ ($i = 1, 2, 3$), 且 $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$, $\alpha_3 = 1 - 2\alpha$ ($\alpha \in [0, 1/2]$). 那么, 基于量子 Fisher 信息的马尔科夫条件 $\gamma_2(t) + \gamma_3(t) \geq 0$ 以及 $\gamma_1(t) + \gamma_3(t) \geq 0$ 能简化为

$$\nu(\alpha) \geq 1, \quad \alpha \in [0, 1/2], \quad (31)$$

其中, 定义 $\nu(\alpha) = 2(1 - \alpha)p_0(t) + 2\alpha$. 文献 [40] 给出了在这种特殊情况下基于迹距离和映射的可分性的马尔科夫条件为

$$\min\{\mu(\alpha), \nu(\alpha)\} \geq 1, \quad \alpha \in [0, 1/2], \quad (32)$$

$$\min\{\mu(\alpha), \nu(\alpha)\} \geq 1, \quad \alpha \in [0, 1/3],$$

$$\min\{\mu(\alpha), Q(\alpha)\} \geq 1, \quad \alpha \in [1/3, 1/2], \quad (33)$$

其中, 定义 $\mu(\alpha) = 4\alpha p_0(t) + 2(1 - 2\alpha)$ 和 $Q(\alpha) = 2p_0(t)\alpha(1 - \alpha) + 2(1 - \alpha)^2$. 一般来说, 方程 (31)–(33) 所示的马尔科夫条件是不同的, 但在某些具体参数 α 下也有相同的情况. 表 1 列出了几种流行的非马尔科夫度量对不同的 α 值的马尔科夫条件的比较情况.

表 1 中基于量子互熵和量子 Fisher 矩阵的马尔科夫条件的数据已经在文献 [26] 中给出.

表 1 几种流行的非马尔科夫度量对不同 α 值的马尔科夫条件比较

Table 1. Comparisons of the Markovian conditions for some popular non-Markovian measures under different α .

不同的 α 值	$\alpha = 1/4$	$\alpha = 1/3$	$\alpha = 2/5$
映射的可分性	$p_0(t) \geq 1/3$	$p_0(t) \geq 1/4$	$p_0(t) \geq 0.583$
迹距离	$p_0(t) \geq 1/3$	$p_0(t) \geq 1/4$	$p_0(t) \geq 0.375$
量子互信息	$p_0(t) \geq 0.261$	$p_0(t) \geq 1/4$	$p_0(t) \geq 0.258$
量子Fisher信息矩阵	$p_0(t) \geq 1/3$	$p_0(t) \geq 1/4$	$p_0(t) \geq 0.328$
量子Fisher信息	$p_0(t) \geq 1/3$	$p_0(t) \geq 1/4$	$p_0(t) \geq 0.167$

从表 1 不难看出 3 个有用的信息: 1) 当选择 $\alpha = 1/3$ 时, 表格中的五种非马尔科夫度量对应的马尔科夫条件都是相同的; 2) 当选择 $\alpha = 1/4$ 时, 除了量子互信息外的其他四种非马尔科夫度量对应的马尔科夫条件也都是相同的, 且与其他度量相比, 基于量子互信息对应的马尔科夫条件是更广一些; 3) 当选择 $\alpha = 2/5$ 时, 这五种非马尔科夫度量对应的马尔科夫条件则是完全不同的, 且与其他度量相比, 基于量子 Fisher 信息对应的马尔科夫条件更广一些. 特别地, 与量子 Fisher 信息矩阵相比, 基于量子 Fisher 信息对应的马尔科夫条件也是更广一些. 另外也注意到, 虽然量子 Fisher 信息与量子相对熵相干性^[49] 是两个完全不同的物理量, 且表达式也不同, 但当选择 $\alpha = 2/5$ 时, 基于量子 Fisher 信息对应的马尔科夫条件 $p_0(t) \geq 0.167$ 同利用量子相对熵相干性给出的条件^[40] 是相同的. 其原因可能是在考虑具体的通道参数 (如 $p_1(t) = p_2(t) = \alpha(1 - p_0(t))$) 导致 $\gamma_1(t) = \gamma_2(t)$. 因此, 对于随机么正通道各种非马尔科夫度量给出的马尔科夫条件是否等价与通道的参数密切相关.

另外也注意到, 对于相同的随机么正通道模型基于量子 Fisher 信息的马尔科夫条件, 如 $\gamma_2(t) + \gamma_3(t) \geq 0$ 和 $\gamma_1(t) + \gamma_3(t) \geq 0$, 同我们之前的工作^[28] 中利用量子 l_1 范数相干性给出的马尔科夫条件是相同的. 这是否暗示着量子 Fisher 信息和量子态的量子 l_1 范数相干性之间存在某种密切的联系? 通过直接计算不难发现: 不管是随机么正通道还是零温度振幅耗散通道和相位衰减通道模型, 相位参数的量子 Fisher 信息都恰好等于系统演化态中的量子 l_1 范数相干性的平方, 即 $F(\rho(\theta)) = C_{l_1}^2(\rho(\theta))$, 其中 $C_{l_1}(\rho) = \sum_{i \neq j} |\rho_{ij}|$ 是著名的量子 l_1 范数相干性^[49].

注意到, 对于单个两能级系统, 在一般的参数化背景下也存在一个类似的关系^[50]. 然而, 这里需要说明的是, 这个关系可能只对二能级系统是适用的, 对多维系统是不成立的. 其原因是: 在多维系统的量子态上作参数化处理时, 可能不是所有的非对角元都带参数信息, 而二能级系统只有一个非对角元且参数信息恰好在非对角元上, 从而导致它是一个特殊情况. 如预期的一样, 当选择 $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 0$ 时, 随机幺正通道的非马尔科夫条件简化成相位衰减通道对应的条件. 另外, 通过简单的计算不难发现: 一种特殊的非马尔科夫过程, 即所谓永久的非马尔科夫过程 (eternal non-Markovian process^[35]), 其各种通道的衰减系数满足 $\gamma_1(t) = \gamma_2(t) = 1/2$, $\gamma_3(t) = -\tanh t/2$ 不能用量子 Fisher 信息流来判定其非马尔科夫过程的发生. 因为考虑到 $\gamma_1(t) + \gamma_3(t) = \gamma_2(t) + \gamma_3(t) = (1 - \tanh t)/2 > 0$, 这样导致 $\chi(t)$ 总会小于零. 其实, 这是利用一些量子信息度量在迹保守且完全正定映射下具有非增性的性质来量化开放系统中的非马尔科夫效应时的局限之一. 例如著名的迹距离、量子纠缠、量子互熵和量子 Fisher 信息矩阵等都有类似的局限性^[35]. 综合以上三个典型的非马尔科夫衰减通道的研究结果看, 同迹距离一样, 基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量可能也是一种与系统初态无关的度量方式, 这对文献 [18] 中的结果是一个重要的补充. 量子 Fisher 信息的这个优点是否适用于其他非马尔科夫模型, 还待于进一步研究, 但我们认为它至少对于单个两能级系统经历单个衰减通道作用模型是成立的. 当然, 基于量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量也有其自身的局限性, 如一个系统初始态如果不带量子 Fisher 信息, 那么该系统与环境相互作用时, 信息依然会在系统与环境之间不断进行交换, 显然, 量子 Fisher 信息就不能用来见证非马尔科夫过程. 总之, 各种非马尔科夫度量对于单个耗散通道情况中马尔科夫或非马尔科夫效应的量化都能给出彼此等价的条件. 然而, 它们在量化多个通道, 如随机幺正通道时则给出不完全等价的马尔科夫或非马尔科夫条件, 这也是人们持续关注非马尔科夫过程度量问题的兴趣所在.

4 结 论

本文对于单个开放的两能级系统, 已经将基于

量子 Fisher 信息的非马尔科夫度量由系统初态为纯态的情况推广到系统初态为任意态的情况. 具体地, 通过三种典型的耗散通道模型验证了这一有用的结果. 在探索开放系统中的非马尔科夫机制时, 寻找一种与系统初态选择无关的非马尔科夫测度方式不管在理论研究还是实验角度看都是非常有用的. 一方面是只需要关注系统受到外界环境的影响而不需要关心系统自身的量子态; 另一方面, 它也降低了在实验上验证开放系统中非马尔科夫效应时对于系统初态制备的要求, 简化了实验的操作性. 总之, 本文的结果完善了用量子 Fisher 信息来检测开放系统中非马尔科夫效应的应用范围, 可能在开放系统中的非马尔科夫机制研究上有一定的理论指导意义. 在本文结束之前, 有必要对开放量子系统中非马尔科夫过程发生的物理机制作一个简要的说明. 通常地, 开放量子系统中的非马尔科夫过程基本都是用从系统流向环境的信息在某些时间段会流回系统来解释^[14], 也就是说信息的存储要么处于开放系统中, 要么处于环境中. 有趣的是, 文献 [51] 提出了一个不同的观点, 即量子 Fisher 信息并不仅仅是存储在系统和环境里, 它还可以存在于系统和环境的关联之中. 这个新颖的观点可能给开放量子系统中的非马尔科夫过程提供一个更为准确的物理解释, 但目前还没有一个统一的结论, 这留给我们今后进一步深入研究.

参考文献

- [1] Breuer H P, Petruccione F 2002 *The theory of Open Quantum Systems* (Oxford: Oxford University Press) pp461–472
- [2] Buluta I, Ashhab S, Nori F 2011 *Rep. Prog. Phys.* **74** 104401
- [3] Rivas A, Huelga S F, Plenio M B 2014 *Rep. Prog. Phys.* **77** 094001
- [4] Breuer H P, Laine E M, Piilo J, Vacchini B 2016 *Rev. Mod. Phys.* **88** 021002
- [5] Intravaia F, Behumini R O, Henkel C, Busch K, Dalvit D A R 2016 *Phys. Rev. A* **94** 042114
- [6] Bellomo B, LoFranco R, Compagno G 2007 *Phys. Rev. Lett.* **99** 160502
- [7] Zhang Y J, Man Z X, Xia Y J 2009 *Eur. Phys. J. D* **55** 173
- [8] Han W, Cui W K, Zhang Y J, Xia Y J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 230302 (in Chinese) [韩伟, 崔文凯, 张英杰, 夏云杰 2012 物理学报 **61** 230302]
- [9] Xiao X, Fang M F, Hu Y M 2011 *Phys. Scr.* **84** 045011
- [10] Cai C J, Fang M F, Xiao X, Huang J 2012 *Acta Phys. Sin.* **61** 210303 (in Chinese) [蔡诚俊, 方卯发, 肖兴, 黄江 2012 物理学报 **61** 210303]
- [11] He Z, Huang B Y, Nie J J 2021 *Laser Phys. Lett.* **18** 125202
- [12] Chin A W, Huelga S F, Plenio M B 2012 *Phys. Rev. Lett.* **109** 233601

- [13] Berrada K 2013 *Phys. Rev. A* **88** 035806
- [14] Breuer H P, Laine E M, Piilo J 2009 *Phys. Rev. Lett.* **103** 210401
- [15] Xu Z Y, Yang W L, Feng M 2010 *Phys. Rev. A* **81** 044105
- [16] Li J G, Zou J, Shao B 2010 *Phys. Rev. A* **81** 062124
- [17] Rivas A, Huelga S F, Plenio M B 2010 *Phys. Rev. Lett.* **105** 050403
- [18] Lu X M, Wang X G, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103
- [19] Luo S, Fu S, Song H 2012 *Phys. Rev. A* **86** 044101
- [20] Liu B H, Li L, Huang Y F, Li C F, Guo G C, Laine E M, Breuer H P, Piilo J 2011 *Nat. Phys.* **7** 931
- [21] Tang J S, Li C F, Li Y L, Zou X B, Guo G C 2012 *Europhys. Lett.* **97** 10002
- [22] Lorenzo S, Plastina F, Paternostro M 2013 *Phys. Rev. A* **88** 020102
- [23] Liu J, Lu X M, Wang X G 2013 *Phys. Rev. A* **87** 042103
- [24] Bylicka B, Chruscinski D, Maniscalco S 2014 *Sci. Rep.* **4** 5720
- [25] Fanchini F F, Karpat G, Cakmak B, Castelano L K, et al. 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 210402
- [26] Song H, Luo S, Hong Y 2015 *Phys. Rev. A* **91** 042110
- [27] Chen S L, Lambert N, Li C M, Miranowicz A, Chen Y N, Nori F 2016 *Phys. Rev. Lett.* **116** 020503
- [28] He Z, Li L, Yao C, Li Y 2015 *Acta Phys. Sin.* **64** 140302 (in Chinese) [贺志, 李莉, 姚春梅, 李艳 2015 物理学报 **64** 140302]
- [29] Luo Y, Li Y 2019 *Chin. Phys. B* **28** 040301
- [30] Shao L H, Zhang Y R, Luo Y, Xi Z, Fei S M 2020 *Laser Phys. Lett.* **17** 015202
- [31] Jahromi H R, Mahdavi-pour K, Shadfar M K, Lo Franco R 2020 *Phys. Rev. A* **102** 022221
- [32] Sun L, Li J P, Tao Y H, Li L S 2022 *Int. J. Theor. Phys.* **61** 134
- [33] Hou S C, Yi X X, Yu S X, Oh C H 2011 *Phys. Rev. A* **83** 062115
- [34] Chruscinski D, Maniscalco 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 120404
- [35] Hall M J W, Cresser J D, Li L, Andersson E 2014 *Phys. Rev. A* **89** 042120
- [36] He Z, Yao C, Zou J 2014 *Phys. Rev. A* **90** 042101
- [37] Dhar H S, Bera M N, Adesso G 2015 *Phys. Rev. A* **91** 032115
- [38] Paula F M, Obando P C, Sarandy M S 2016 *Phys. Rev. A* **93** 042337
- [39] Haseli S, Karpat G, Salimi S 2014 *Phys. Rev. A* **90** 052118
- [40] He Z, Zeng H S, Li Y, Wang Q, Yao C 2017 *Phys. Rev. A* **96** 022106
- [41] Zeng H S, Tang N, Zheng Y P, Wang G Y 2011 *Phys. Rev. A* **84** 032118
- [42] Braunstein S L, Caves C M 1994 *Phys. Rev. Lett.* **72** 3439
- [43] Zhong W 2014 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [钟伟 2014 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]
- [44] Liu J, Xiong H N, Song F, Wang X 2014 *Physica A* **410** 167
- [45] Liu J, Jing X, Zhong W, Wang X 2014 *Commun. Theor. Phys.* **61** 45
- [46] Zhong W, Sun Z, Ma J, Wang X, Nori F 2013 *Phys. Rev. A* **87** 022337
- [47] Chruscinski D, Wudarski F 2013 *Phys. Lett. A* **377** 1425
- [48] Jiang M, Luo S 2013 *Phys. Rev. A* **88** 034101
- [49] Baumgratz T, Cramer M, Plenio M B 2014 *Phys. Rev. Lett.* **113** 140401
- [50] Zhao J L, Chen D X, Zhang Y, Fang Y L, Yang M, Wu Q C, Yang C P 2021 *Phys. Rev. A* **104** 062608
- [51] Lu X M 2011 *Ph. D. Dissertation* (Hangzhou: Zhejiang University) (in Chinese) [陆晓铭 2011 博士学位论文 (杭州: 浙江大学)]

Non-Markovian measure independent of initial states of open systems*

He Zhi^{1)†} Jiang Deng-Kui¹⁾ Li Yan²⁾

1) (*College of Mathematics and Physics, Hunan University of Arts and Science, Changde 415000, China*)

2) (*College of Physics and Telecommunication, Nanchang Normal University, Nanchang 330032, China*)

(Received 26 May 2022; revised manuscript received 9 August 2022)

Abstract

In recent years, quantifying non-Markovian effect in open quantum system has become an important subject in the quantum decoherence control field. In this paper, a non-Markovian measure independent of the initial state of open system is proposed, thereby extending non-Markovian measure based on quantum Fisher information from the case where the initial state of the system is a pure state to the case where the initial state of the system is an arbitrary mixed state. As its application, the non-Markovian process is quantified by quantum Fisher information about a two-level system undergoing the three well-known dissipative channels, i.e. amplitude dissipative channel, phase damping channel, and random unitary channel. The results show that the conditions of non-Markovian processes in the three dissipative channels are independent of the selection of the initial state of the system by means of the quantum Fisher information of a phase parameter. Further, for amplitude dissipation channel and phase damping channel, the conditions for the non-Markovian processes to occur are equivalent to those given by trace distance, divisibility, quantum mutual information, quantum Fisher-information matrix, et al. As expected, for the case of amplitude dissipation channel, the corresponding results can reduce to the one in other paper (Lu X M, Wang X G, Sun C P 2010 *Phys. Rev. A* **82** 042103) by selecting the initial state of the system as an optimal pure state. However, for random unitary channel, the conditions of non-Markovian process are not equivalent to those for other measures. In addition, we also obtain an interesting relationship between quantum Fisher information and quantum coherence of the open system in the three dissipative channels, namely the square of quantum l_1 coherence for the evolved state of system is exactly equal to the quantum Fisher information of the phase parameter. In a word, the obtained results not only improve the application scope of using the quantum Fisher information to detect non-Markovian effects in open systems, but also further highlight its important role in quantum information processing.

Keywords: open systems, quantum Fisher information, non-Markovian measure

PACS: 03.67.-a, 03.65.Yz, 03.67.Mn

DOI: 10.7498/aps.71.20221053

* Project supported by the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. 2017M622582), the Research Foundation of Education Bureau of Hunan Province, China (Grant No. 19A339), the Natural Science Foundation of Hunan Province, China (Grant Nos. 2020JJ4443, 2019JJ50400), the Scientific Research Foundation of the Education Department of Jiangxi Province, China (Grant No. GJJ181086), and the Key Laboratory of Photoelectric Information Integration and Optical Manufacturing Technology of Hunan Province, China.

† Corresponding author. E-mail: hz9209@126.com



一种与开放系统初态无关的非马尔科夫度量

贺志 蒋登魁 李艳

Non-Markovian measure independent of initial states of open systems

He Zhi Jiang Deng-Kui Li Yan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 210303 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221053

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221053>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

不同外加磁场中Kaplan-Shekhtman-Entin-Wohlman-Aharony相互作用对量子失协非马尔科夫演化的影响

Effects of Kaplan-Shekhtman-Entin-Wohlman-Aharony interaction on quantum discord of non-markovian dynamics under different magnetic fields

物理学报. 2021, 70(22): 223401 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211277>

基于量子Fisher信息的量子计量进展

Development on quantum metrology with quantum Fisher information

物理学报. 2019, 68(4): 040601 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181965>

耗散响应理论及其在开放系统中的应用

Dissipative linear response theory and its applications in open quantum systems

物理学报. 2021, 70(23): 230306 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211687>

非厄米局域拓扑指标的动力学特性

Dynamics of non-Hermitian local topological marker

物理学报. 2021, 70(23): 230309 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211576>

半开放系统中的粒子逃逸问题

Particle escape problem in semi-open system

物理学报. 2022, 71(16): 167302 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220450>

基于部分测量增强量子隐形传态过程的量子Fisher信息

Enhancement of quantum Fisher information of quantum teleportation by optimizing partial measurements

物理学报. 2018, 67(14): 140304 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180330>