

专题: 量子计算新进展: 硬件、算法和软件

基于超导量子系统的量子纠错研究进展*

陈子杰¹⁾ 潘啸轩²⁾ 华子越²⁾ 王伟婷²⁾ 马雨玮²⁾李明¹⁾ 邹旭波¹⁾ 孙麓岩^{2)†} 邹长铃^{1)‡}

1) (中国科学技术大学, 中国科学院量子信息重点实验室, 合肥 230026)

2) (清华大学, 交叉信息研究院, 量子信息中心, 北京 100084)

(2022 年 9 月 19 日收到; 2022 年 10 月 10 日收到修改稿)

基于量子力学基本原理的信息处理技术, 在计算、传感等领域具有远超经典技术的巨大潜力. 随着实验技术的进步, 量子调控技术得到突飞猛进的发展. 在所有的量子信息处理平台中, 基于固体材料的超导系统, 具有精确的量子调控能力、优异的量子相干性以及适合大规模集成化等优点. 因此, 超导量子系统成为当前最有潜力的量子信息处理平台之一. 目前的超导芯片能集成约一百个量子比特, 已经可以展示量子系统的优势, 但进一步的发展受到系统噪声的制约. 为了突破这一瓶颈, 借鉴经典信息中的纠错技术发展而来的量子纠错技术受到广泛的关注. 本文介绍了超导量子系统中量子纠错的研究进展, 主要包括超导量子系统的基本原理、常用的量子纠错编码方案、纠错相关的控制技术以及近期超导量子纠错的应用. 最后, 总结了超导量子纠错领域面临的七个关键问题.

关键词: 量子纠错, 超导线路, 容错量子计算, 玻色编码**PACS:** 03.67.Pp, 85.25.-j, 03.67.Lx, 89.70.Kn**DOI:** 10.7498/aps.71.20221824

1 引言

自 1994 年彼得·肖尔 (Peter Shor)^[1] 提出大数因子分解算法以来, 量子信息处理领域就受到了广泛关注. 后续的研究证明, 量子技术在计算、传感、模拟等领域相较于经典技术具有巨大的优越性, 科研人员将其视作下一代信息革命的重要战略方向. 良好的叠加性和相干性是量子技术展示其优越性的前提, 但现实的物理系统会不可避免地与环境发生耦合, 从而引入各种噪声, 使得量子系统的性能急剧下降, 这成为限制当前量子技术发展的最大瓶颈. 针对这一问题, 彼得·肖尔^[2] 借鉴经典纠错码的思想提出了量子纠错的概念, 其核心思想是通过使

用多个物理比特编码逻辑比特的方式增加信息编码空间的冗余度, 使受到噪声影响的量子态可以得到区分, 且能通过实时反馈进行纠错, 从而恢复原始量子态以及其中存储的量子信息.

目前各种物理平台都在进行量子信息相关的研究, 其中包括了离子阱、冷原子、NV 色心 (Nitrogen-Vacancy center)、超导、光学等平台. 在这些物理平台中, 超导量子系统具有以下优势: 首先, 超导系统是固态量子系统. 基于目前先进微纳加工技术, 超导芯片具有较好的稳定性和可拓展性, 且其工作频率、能级间距以及耦合强度等参数都可以自由设计, 相对于其他平台更具有灵活性. 其次, 超导比特具有较好的相干性能. 超导量子比特的门操作时间一般只需 10—100 ns, 与之对应, 常用的

* 国家重点研发计划 (批准号: 2017YFA0304303)、国家自然科学基金 (批准号: 92165209, 11925404, 11874342, 11922411, 12061131011) 和中国博士后科学基金 (批准号: BX2021167) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: luyansun@mail.tsinghua.edu.cn

‡ 通信作者. E-mail: clzou321@ustc.edu.cn

基于纯铝材质的 transmon 量子比特的相干时间可达 10—100 μs 量级, 而三维超导谐振腔的寿命更是突破 1 ms^[3,4], 甚至可以达到秒量级^[5]. 最后, 超导系统具有较高的连通性. 固态超导量子比特可以与微波光子飞行比特相互耦合实现米量级的超导比特之间的信息传输^[6]. 除此之外, 微波光子也可以进一步与声子、可见光光子等进行耦合, 实现多个不同物理体系之间的信息传输^[7].

目前超导量子芯片集成的量子比特数量正在迅速提升. 在公开学术论文报道中, 国外单位谷歌 (Google)、国际商用机器公司 (IBM) 已经率先实现了 72 量子比特^[8] 和 27 量子比特^[9] 的超导芯片. 国内相关研究也处于领先地位, 中国科学技术大学^[10]、浙江大学^[11]、中国科学院物理研究所^[12]、北京量子院^[13] 等研究单位都具有 50 量子比特左右的超导芯片的自主制备与表征能力.

基于当前的超导量子芯片的规模, 相关科研单位已经进行了带噪声的中等规模量子 (noisy intermediate-scale quantum, NISQ) 问题相关的探索, 展示出了量子优势^[14,15], 并在这一过程中进一步发展了量子近似优化算法 (quantum approximate optimization algorithm, QAOA)、变分量子本征求解器 (variational quantum eigensolver) 等新型算法^[16,17]. 另一方面, 为了进一步提升超导芯片的整体性能以及最终实现普适量子计算机, 量子纠错方面的研究也得到前所未有的重视. 本文以超导量子系统为依托, 重点介绍了量子纠错的研究进展. 第 2 节介绍了超导系统的基本原理, 即超导量子系统核心的物理器件以及进行量子调控的方式. 第 3 节讲述了超导系统中常用的纠错码, 包括表面码 (surface code) 在内的二能级编码以及基于谐振子的玻色编码, 并简述了容错量子计算的相关概念. 第 4 节简述了近年来针对量子纠错开发的关键控制技术. 第 5 节讨论了近期量子纠错在度量学、量子通信以及错误缓解等领域的应用和潜力. 最后, 总结了超导量子纠错领域所面临的 7 个关键问题.

2 超导量子系统的基本原理

目前超导量子芯片最核心的器件是约瑟夫森结 (Josephson junction), 其带来的非线性使得超导谐振电路具有非简谐的能级分布, 可以单独控制能级之间的跃迁. 这为量子比特的编码、调控以及

不同量子比特之间的相互作用提供了基础.

约瑟夫森结由两层超导体中间夹一薄绝缘层构成, 一般由超导铝及绝缘氧化铝堆叠组成. 在超导转变温度下, 超导电路中电子两两组合为库伯对形成超导电流, 其在约瑟夫森结内的流动是无损耗的. 此时电路等价于一个电容并联一个非线性电感的量子 LC 电路, 从而实现了非等间距能级分布. 超导量子比特可以编码在其中最低的两个能级上, 通过合理的设计可以使这两个能级与第二激发能级的两组能级差别巨大, 从而实现编码空间与其他子空间之间的隔离. 目前, 大部分超导量子电路的谐振频率都设计在 GHz 量级. 为了实现超导态和约瑟夫森效应, 并抑制 GHz 频段的热激发, 一般还需要通过稀释制冷机将超导芯片冷却到低至 10 mK 的超低温.

通过设计约瑟夫森结与外加并联电容以及电感可以得到不同构型的量子比特, 如电荷量子比特、相位量子比特以及磁通量子比特等^[18,19]. 目前, 由电荷量子比特改进而来的 transmon 比特在国际上被广泛使用, 其由约瑟夫森结两端并联一个大旁路电容组成, 如图 1(a)^[15] 所示. 此构型使得约瑟夫森结的能级对环境电荷涨落不敏感, 从而具有较长的相干时间. 目前, 国内外科研单位, 如中国科学技术大学^[10]、北京量子院^[13]、清华大学^[20,21]、中科院物理所^[12]、浙江大学^[11]、南京大学^[22]、深圳量子院^[23]、谷歌公司^[8]、国际商用机器公司^[9]、苏黎世联邦理工学院^[24]、代尔夫特理工大学^[25] 等均是基于 transmon 比特进行研究.

借助成熟的微波电子学设备可以实现对超导系统的精准调控. 通过对超导线路施加不同频率和相位的微波脉冲可以实现对单个 transmon 比特的任意单比特门操作. 相对而言, 两比特门的实现较为复杂, 需要两个比特之间有相互耦合, 而且由于固定的耦合强度会导致比特状态持续相互影响, 引入不可纠正的串扰错误, 因此大规模应用时必须保证可以实时调节耦合强度. 从线路连接的角度上, 其中一种方式是通过两个超导比特之间的电容或电感实现直接耦合, 并引入超导量子干涉仪 (superconducting quantum interference device, SQUID) 实现比特的频率可调或作为可调电感, 即通过调节超导量子干涉仪的磁通来调节两个比特之间的失谐或者耦合系数, 进而实现两比特耦合的调节. 这种方式调节应用范围广、速度快, 但容易受到环境磁

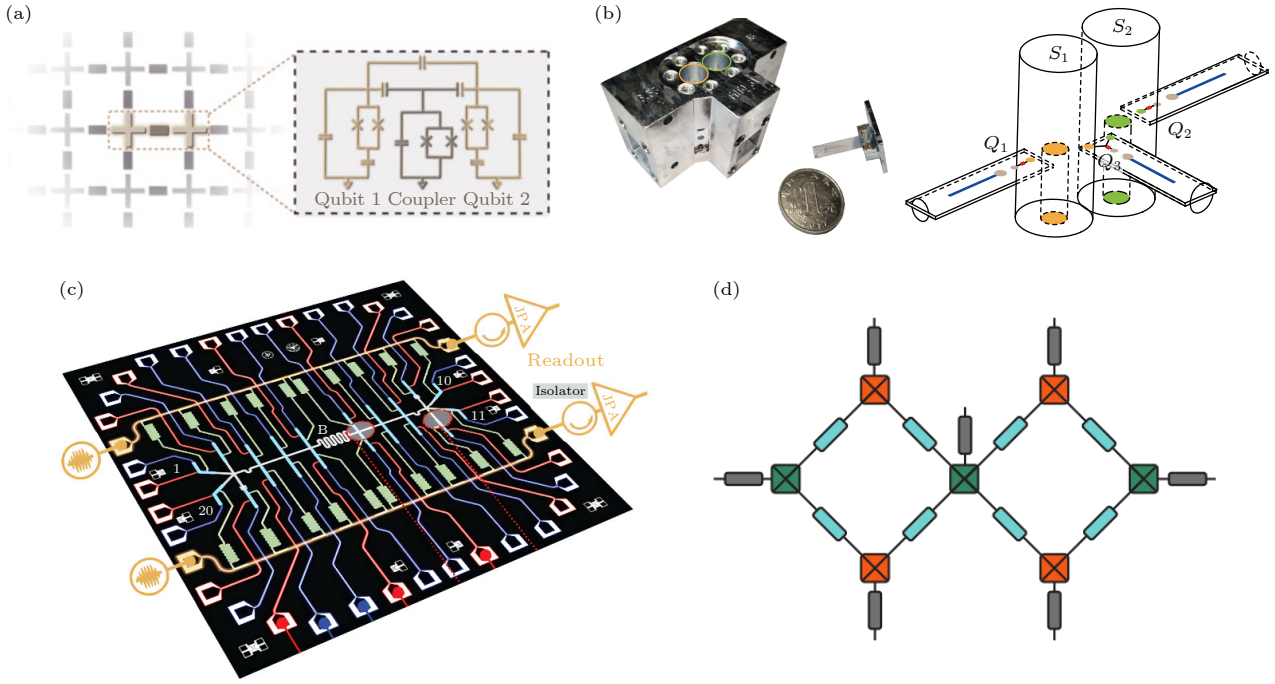


图 1 (a) 二维 transmon 量子比特结构示意图 (图片来自文献 [15]). 左右两边黄色电路分别表示一个 transmon 量子比特, 其中交叉表示约瑟夫森结, 其两端并联大旁路电容, 而中间的黑色电路表示辅助模式, 用于两个量子比特之间的可调耦合. (b) 三维超导谐振腔与 transmon 量子比特耦合结构示意图 (图片来自文献 [45]). 橙色和绿色区域为高纯铝制备的三维超导谐振腔, 两腔通过铝块侧面开孔与辅助超导量子比特进行耦合. (c) 基于二维 transmon 量子比特的架构 (图片修改自文献 [30]). 图中黄色线路为读取用微波传输线, 末端接隔离器和约瑟夫森参量放大器, 用于读取信号的单向传输和放大; 绿色区域为读取谐振腔; 浅蓝色区域为可调频 transmon 量子比特, 量子比特之间通过一个共同的辅助模式 B 耦合; 红色线路为 transmon 量子比特的微波驱动线, 蓝色线路为 transmon 量子比特的磁通驱动线. (d) 三维谐振腔架构拓展示意图 [53]. 红色和绿色方块为 transmon 量子比特, 浅绿色部分为高 Q 超导谐振腔 (用于存储量子信息), 灰色部分为低 Q 超导谐振腔 (用于 transmon 量子比特的读取). 谐振腔与 transmon 量子比特通过电容直接耦合

Fig. 1. (a) Structure of coupled two dimensional (2D) transmon qubits (Reprinted with permission from Ref. [15]). The left and right circuits (yellow) represent two transmon qubits, where each cross represents a Josephson junction and its two ends are coupled with a large capacitor. The middle black circuit represents the auxiliary mode for adjustable coupling between the two qubits. (b) Structure of 3D superconducting cavities coupled with transmon qubits (Reprinted with permission from Ref. [45]). The orange and green parts are the three dimensional (3D) superconducting cavities made of high-purity aluminum, and the two cavities are coupled to the auxiliary superconducting qubits through trenches on the sides of the aluminum block. (c) Architecture based on 2D transmon qubits (Reprinted with permission from Ref. [30]). The yellow lines in the figure are the microwave transmission lines for readout, and are connected with an isolator and a Josephson parametric amplifier, which are used for one-way transmission and amplification of the readout signal. The green parts are the readout resonators. The light blue parts are the tunable transmon qubits, which are coupled by a common auxiliary mode B. The red and the blue lines are the microwave drive and the flux drive lines for the transmon qubits respectively. (d) Architecture based on 3D superconducting resonators [53]. The red and green squares are transmon qubits, the light green parts are the high- Q superconducting resonators (for storing quantum information), and the gray parts are the low- Q superconducting resonators (for readout of transmon qubits). The resonator is directly coupled to the transmon qubit through a capacitor.

通噪声的影响 [18,19]. 另一种方式是通过辅助模式间接耦合, 其中辅助模式本身频率可调且具有一定非线性, 故可以通过调节辅助模式频率来实现两比特耦合的调谐 [26–29]. 值得注意的是, 一个辅助模式可以连接多个比特, 进而实现多个比特的同时耦合 [30].

目前, 超导系统的单比特门误差已经低至 0.092% [31], 而在单一芯片上特定两 transmon 量子比特间的双比特门最高保真度都可以超过 99%. 从

物理实现的角度, 双比特门可以笼统地分成两类, 其中有代表性的一类是在两个比特之间存在直接或间接耦合的情况下, 利用快速类方波电压信号调节比特能级, 这种方法实现的 CZ 门保真度可以达到 99.7%—99.9% [28,32,33], 另一类则是不调节比特能级, 直接利用高频微波驱动, 如通过交叉共振 (cross resonance) 效应实现的两比特 CNOT 门, 其保真度可以达到 99.4%—99.7% [9,34].

目前超导量子比特的读取一般采用色散读取 (dispersive readout) 方式^[35,36]. 将 transmon 量子比特与一个读取谐振腔进行色散耦合, 当比特处在不同状态时, 读取腔的频率发生偏移, 此时探测读取腔的频移即可判断比特状态, 实现对量子比特量子态的投影测量. 由于对读取腔的探测不与比特发生直接能量交换, 量子比特的状态可以在测量完成后得到保持, 这种读取方式比较容易实现量子非破坏性测量 (quantum non-demolition measurement, QND). 为了提高读取速度, 需要读取腔与测量电路的耦合比较强, 此时 transmon 量子比特的寿命会受到读取腔珀塞尔 (Purcell) 效应的限制^[37], 因此还需要增加珀塞尔滤波器来保护比特, 使比特的能量不容易通过读取腔泄漏到测量电路中^[38,39]. 为提高读取保真度, 一般还需要使用约瑟夫森参量放大器 (Josephson parametric amplifier, JPA)^[40] 对读取信号进行放大. 此类放大器利用约瑟夫森结的非线性效应, 可实现 20 dB 的放大效果和接近量子极限的信噪比^[41,42]. 在合适的信号放大链路的辅助下, 目前可以实现单发测量 (single shot) 保真度大于 99%, 读取时间小于 100 ns^[43], 仅相当于数个单比特门的时间, 因此易于实现基于测量的反馈纠错、比特重置等操作.

如前文所述, 量子比特可以直接编码在 transmon 等非线性结构的能级上, 此外, 还可以在此基础上将 transmon 量子比特与高品质因子的线性超导腔进行色散耦合, 利用超导腔来编码和存储量子信息, 而 transmon 量子比特作为辅助比特对超导腔进行控制. 由于超导谐振腔的结构简单, 可以很好地束缚腔内电磁场, 且外围线路较少从而减少电磁环境噪声的干扰, 因而超导腔一般具有很高的相干时间. 采用纯度高的铝材 (纯度 5N5, 99.9995%), 经过适当的机械加工和化学刻蚀工艺制成的超导腔的 Q 值可以达 10^9 ^[44]. 图 1(b)^[45] 是 transmon 比特与两个三维超导腔耦合的结构示意图, 其中 Q 值较高的腔相干时间较长, 用于量子态的存储, 而 Q 值较低的腔用于系统状态的测量. 目前耶鲁大学以及清华大学超导课题组均采用这一架构, 此外, 亚马逊公司 (Amazon Web Services) 也计划使用这一架构进行相关纠错研究^[46], 苏黎世联邦理工学院也计划将这一架构拓展至声子^[47].

超导量子系统的主要非相干噪声来自于外界电磁场的涨落、比特与外界真空场以及与基底材料

中杂质之间的耦合. 这些噪声会导致比特的热激发、自发辐射以及退相位. 相关的物理过程表示成主方程形式即为

$$\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}_{\sqrt{\gamma(1+n_{\text{th}})}a}(\rho) + \mathcal{L}_{\sqrt{\gamma n_{\text{th}}}a^\dagger}(\rho) + \mathcal{L}_{\sqrt{\gamma_p}a^\dagger a}(\rho),$$

其中超算符 $\mathcal{L}_A(\rho) = A\rho A^\dagger - \frac{1}{2}A^\dagger A\rho - \frac{1}{2}\rho A^\dagger A$, a 和 $a^\dagger$ 分别为湮灭和产生算符, γ 为比特能量自发辐射速率, γ_p 为比特退相位速率, n_{th} 为比特的平均热激发数. 此外, 量子门操作的控制偏差和比特串扰等可能会引起一些相干噪声, 可通过相应的哈密顿量进行描述.

提升超导量子比特的相干时间和量子操作保真度是未来实现量子纠错并达到容错量子计算的前提. 为了实现这一目标, 在硬件上一方面可以通过改良超导比特的材质和制造工艺, 如普林斯顿大学^[48] 和北京量子院^[49] 使用金属钽替代铝制备超导电路, 使得 transmon 量子比特最长相干时间提升至 500 μs ^[49]; 另一方面可以尝试改变比特的电路架构, 制备不同类型的比特, 从比特哈密顿量设计层面降低噪声源对比特性质的影响, 如约瑟夫森结并联一个较大电感的 fluxonium 架构等^[50]. 此外, 对于多量子比特系统, 还需要考虑比特之间微波信号串扰和残余耦合等带来的关联噪声, 可以通过优化微波线路和操控方式^[51]、增加可调耦合器^[52] 等方式抑制关联噪声.

3 量子纠错编码方案

由于与环境的耦合, 实际物理体系中存在着各种噪声, 环境噪声会导致系统的退相干并破坏量子态中的信息, 且计算过程中控制偏差会不断地积累. 这些因素使得量子计算的精度随着线路深度的增加而急剧下降, 这是当前量子信息领域的挑战.

为了对抗噪声, 彼得·肖尔^[2] 在 1995 年对经典计算机系统纠错码思想进行了推广, 提出了最简单的量子纠错码——三量子比特的重复码 (repetition code) 用来纠正比特的位翻转错误. 随后发现的阈值定理告诉我们, 当门操作的噪声低于某个阈值的时候, 人们总是能够在可接受的资源需求下通过多级纠错码级联的方式扩大编码距离, 增加更多的信息冗余, 实现任意精度的量子计算, 即所谓的容错量子计算^[54,55].

相对于经典纠错码, 量子纠错码的构建更加复杂. 这是因为量子系统会受到量子定律的限制, 例如量子不可克隆定律会限制非正交的未知量子态的精确复制, 因此量子纠错码无法通过简单的复制来增加冗余. 幸运的是, 1997 年尼尔 (Knill) 和拉夫勒蒙 (Laflamme)^[56] 证明了著名的 K-L 纠错条件, 其可进一步概括成以下形式^[57]: 对于量子编码 $\mathcal{C}$ 及其投影算符 $\mathcal{P}$, 在噪声信道 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \mathbf{E}_i \rho \mathbf{E}_i^\dagger$ 作用下以 $\mathcal{C}$ 为编码的量子态可以被恢复的充要条件是

$$\mathcal{P} \mathbf{E}_i^\dagger \mathbf{E}_j \mathcal{P} = \alpha_{ij} \mathcal{P},$$

其中 α 为厄密矩阵, $\mathbf{E}_i$ 为信道对应的克劳斯 (Kraus) 算符.

如图 2 所示, 从希尔伯特 (Hilbert) 空间来看, 编码操作将待保护比特上的量子态 (图中黄色箭头) 映射至编码空间中 (图中蓝色圆圈), 而满足上述 K-L 条件的噪声将逻辑编码空间投影到不同的正交子空间中, 并且这些子空间内部不发生形变, 后续的错误诊断通过对投影算符的测量, 得知量子态所在的子空间 (如图中绿色圆圈), 从而推断出量子态所遭受的噪声并进行反馈纠错操作, 编码空间中的量子态就得以恢复. 这一点可以从以下过程看出: 由于 α 为厄密矩阵, 故存在一个幺正矩阵 U 可以对 α 进行对角化, 即 $\alpha = U^\dagger d U$, 其中 d 为对角矩阵. 定义 $\mathbf{F}_k = \sum_i U_{ik} \mathbf{E}_i$, 由于克劳斯算符和表示具有酉自由度, 即由幺正演化联系的 $\{\mathbf{E}_i\}$ 和 $\{\mathbf{F}_k\}$ 都表示同一噪声信道, $\mathcal{E}(\rho) = \sum_i \mathbf{E}_i \rho \mathbf{E}_i^\dagger = \sum_k \mathbf{F}_k \rho \mathbf{F}_k^\dagger$. 通过这样定义的 $\{\mathbf{F}_k\}$, K-L 条件可以表示为

$$\mathcal{P} \mathbf{F}_k^\dagger \mathbf{F}_l \mathcal{P} = d_{kl} \mathcal{P}.$$

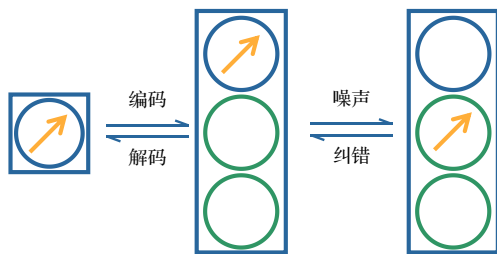


图 2 纠错流程图. 蓝色的圆圈表示编码空间, 绿色的圆圈表示错误空间, 黄色的箭头表示要保护的量子态

Fig. 2. Diagram of quantum error correction. The blue circles represent the code space, the green circles represent the error space, and the yellow arrows represent the quantum states to be protected.

即 $\mathbf{F}_k$ 将编码空间 $\mathcal{P}$ 旋转至子空间 $\mathcal{P}_k = \mathbf{F}_k \mathcal{P} \mathbf{F}_k^\dagger / d_{kk}$ 中, 且不同的 $\mathcal{P}_k$ 之间相互正交, 因此可以用投影算符的测量结果表征错误症状. 由极分解定理可知, 存在幺正矩阵 U'_k 使得 $\mathbf{F}_k \mathcal{P} = U'_k \sqrt{\mathcal{P} \mathbf{F}_k^\dagger \mathbf{F}_k \mathcal{P}} = \sqrt{d_{kk}} U'_k \mathcal{P}$, 则 $U_k'^\dagger$ 就是此错误症状对应的纠错操作, 即 $\mathcal{R}(\rho) = \sum_k U_k'^\dagger \mathcal{P}_k \rho \mathcal{P}_k U'_k$. 综上所述, 在噪声以及纠错作用下编码空间中量子态的演化为 $\mathcal{R} \circ \mathcal{E}(\rho) = \rho$.

在实际物理系统中的噪声形式是多种多样的, 但是当噪声很弱且独立地作用于不同物理比特的时候, 只要能纠正编码中任意单比特上的相位翻转噪声、位翻转噪声以及两者同时发生的情况, 即 $\{\hat{X}_i, \hat{Z}_i, \hat{X}_i \hat{Z}_i\}$, 就可以纠正任意单个比特上的任意独立噪声.

自量子纠错概念提出以来, 已经有相当多的基于不同思想构造出来的量子纠错码. 其中 1996 年由戈特斯曼 (Gottesman)^[58] 总结的稳定子码是非常重要的量子码, 其涵盖了表面码、颜色码等多种类型的编码. 如果一种纠错码的逻辑态空间是一组互相对易的算符 $\{\mathcal{O}_s\}$ 的 +1 本征空间, 则称这种编码为稳定子码, 而 $\mathcal{O}_s$ 是这种编码的稳定子. 一般而言, 选择泡利群的子群 S 来作为编码的稳定子会较为方便, 这是因为泡利群的群元素只有对易和反对易两种对易关系, 而且位翻转噪声和相位翻转噪声都在此群中. 若 S 被其生成元 $\{g_1, \dots, g_{n-k}\}$ 所描述, 可以证明 n 个物理比特在 S 群的稳定下可以编码 2^k 维的子空间, 即 k 个逻辑比特. 对错误的诊断过程只需要对所有的生成元进行测量即可: 当发生错误且错误满足 K-L 条件的时候, 生成元算符的测量结果会发生改变, 从而能检测出对应的错误类型并随后可以加以纠正.

具体到超导系统, 量子信息编码主要可以分成两种类型. 一种是二能级类型, 适用于 transmon 量子比特的架构, 只使用其最低能量的两个量子态作为物理比特的编码空间, 因此需要通过增加比特数量来增大希尔伯特空间冗余度来实现纠错. 另一种是玻色模式类型, 适用于超导辅助比特与谐振腔耦合的架构, 利用腔的多个能级进行编码. 由于单个腔就支持无穷大的希尔伯特空间, 故其具有多种编码方式, 既可以截断希尔伯特空间至有限的维度进行编码, 如二项式编码 (binomial code)^[59], 也可以使用整个希尔伯特空间进行连续变量类型

的编码, 如猫态编码 (cat code)^[60,61] 和 GKP 编码 (Gottesman-Kitaev-Preskill code)^[62]. 注意, 各种编码之间的区分并不是非常严格, 而且是可以相互级联的, 如可以使用玻色编码作为底层二能级系统, 然后再级联二能级编码可以增加编码的纠错能力^[63-66].

3.1 二能级类型纠错码

二能级类型编码的思想是以二能级的量子比特为基础, 通过增加物理比特数目来增强纠错码的纠错能力. 按照实现方式的差异, 底层物理比特又可以分成两种类型, 一种是无源量子比特, 通过构造超导系统的结构, 使得系统的两个基态能级与其他能级之间的跃迁能量较大, 则可以利用这两个能级实现相对隔离的二维空间来进行量子比特编码. 超导 transmon 量子比特最简单的编码方式就是使用能量最低的两个能级进行编码. 由于约瑟夫森结的非简谐性, 在驱动过程中系统跃迁至第三及以上能级的概率可以忽略不计, 从而使系统基本处于编码空间内. 另一种是有源量子比特, 通过外加连续的驱动或者构造某种形式的耗散来调节系统与环境的耦合形式并构造新的基态能级, 从而实现更好相干性能的二维空间^[67], 例如后文所述的耗散型猫态编码 (dissipative cat code).

为了描述以二能级量子比特为基础的编码的纠错能力, 一般用 $[[n, k, d]]$ 表示 n 个物理比特编码 k 个逻辑比特且码距为 d 的编码方案, 其可以对抗任意 $\lfloor \frac{d-1}{2} \rfloor$ 个物理比特上的噪声. 此外, 上述的参数可以进一步推广至以任意 d 个能级为基础的编码, 即 qudit.

基于二能级物理比特的纠错码包括多种类型的编码, 其中超导系统相关实验中比较常见的是重复码 (repetition code) 及表面码 (surface code) 等.

3.1.1 重复码

重复码是最早提出的量子纠错码, 其能对抗物理比特上的位翻转噪声, 即 $\{\hat{X}_i\}$. 重复码的编码方式也最为简单, n 个比特 (n 须为奇数) 重复码的逻辑态为 $|0_L\rangle = |0\rangle^{\otimes n}$, $|1_L\rangle = |1\rangle^{\otimes n}$, 码距 $d = n$. 从稳定子的角度来看, 其对应的稳定子只涉及到邻近的两个比特, 即 $\{\hat{Z}_i \hat{Z}_{i+1}\} (i = 1, 2, \dots, n-1)$, 因此重复码的错误诊断以及纠错操作均可容易地在实验中实现^[25,68-73]. 但是由于其无法纠正单比特上

的相位翻转 ($\{\hat{Z}_i\}$) 噪声, 故实际效果受限. 前文所述的这种重复码一般也称为位翻转编码. 此外, 借鉴其思想可以将逻辑比特编码为 $|0_L\rangle = |+\rangle^{\otimes n}$, $|1_L\rangle = |-\rangle^{\otimes n}$, 则能纠正物理比特上的相位翻转噪声, 即 $\{\hat{Z}_i\}$, 这种重复码一般称为相位翻转编码.

3.1.2 表面码

量子纠错编码不仅需要同时抵抗单个物理比特上的位翻转和相位翻转噪声 $\{\hat{X}_i, \hat{Z}_i, \hat{X}_i \hat{Z}_i\}$, 也要考虑到实际物理系统的限制. 一般而言, 要尽可能地使用物理比特的局域操作实现逻辑比特的操作, 尽量避免使用物理比特间多体的和长程的相互作用, 尽可能在二维平面上排列比特以及具有较高的容错阈值. 表面码是能较好地满足上述限制的编码之一, 因而得到广泛的关注.

表面码的概念源于基塔耶夫 (Kitaev)^[74] 在 1997 年提出的环面码 (toric code). 环面码中物理比特之间的相互作用形式等价于将每个物理比特放置于环面之上, 且只与其近邻的比特相互作用. 随后环面码被推广至平面^[75], 即为表面码^[76]. 表面码利用拓扑物质不受局域操作影响的思想, 将量子信息编码在整个区域中, 即使局部的少数几个物理比特发生错误也不会影响整体的信息. 图 3(a) 所示的是码距 $d = 8$ 的表面码, 其主要由两种比特构建而成. 一种是数据量子比特, 用于储存系统的逻辑量子态, 在图中用每条网格线边上的白点表示, 共有 $d^2 + (d-1)^2$ 个. 另一种是辅助量子比特, 用于对其近邻的数据量子比特不断地进行错误诊断, 即对稳定子算符进行测量. 稳定子算符也可以分成两种, 第一种是以图中的黄色菱形为例的 **A** 类型稳定子算符, 其由菱形的四个顶点对应的数据量子比特的 $\hat{X}$ 算符组成, 即 $A = \hat{X}_a \hat{X}_b \hat{X}_c \hat{X}_d$. 这种稳定子算符一共有 $d(d-1)$ 个, 每个都可以对应一个放置于网格线交点处的黄色菱形 (左右边界上的 **A** 型稳定子由三个物理比特的 $\hat{X}$ 算符组成). 第二种是以图中的蓝色圆形为例的 **B** 类型稳定子算符, 其由圆形周围四个数据量子比特的 $\hat{Z}$ 算符组成, 即 $B = \hat{Z}_a \hat{Z}_b \hat{Z}_c \hat{Z}_d$. 这种稳定子算符一共也有 $d(d-1)$ 个, 同理, 每个也都可以对应一个放置于网格中的蓝色圆形 (上下边界中的 **B** 型稳定子由三个物理比特的 $\hat{Z}$ 算符组成).

对于码距为 d 的表面码, 逻辑 $\hat{X}_L$ 的实现至少需要对其中任意一行 d 个数据比特都做局域 $\hat{X}$ 操

作, 如图 3(a) 中的红色阴影线, 而逻辑 $\hat{Z}_L$ 操作至少需要任意一列 d 个数据比特都做局域 $\hat{Z}$ 操作, 如图 3(a) 中蓝色阴影线. 由于相差若干个稳定子不会改变逻辑算符的作用, 所以可以在蓝色阴影线的基础上不断作用 B 类型稳定子算符, 从而得到其他等价的逻辑 $\hat{Z}_L$, 如绿色阴影线. 这些逻辑算符都连接了表面码的上下边界, 同理所有的逻辑 $\hat{X}_L$ 都连接了左右边界. 由于等价逻辑操作的存在, 只有当一行或者一列中一半及以上的数据比特发生比

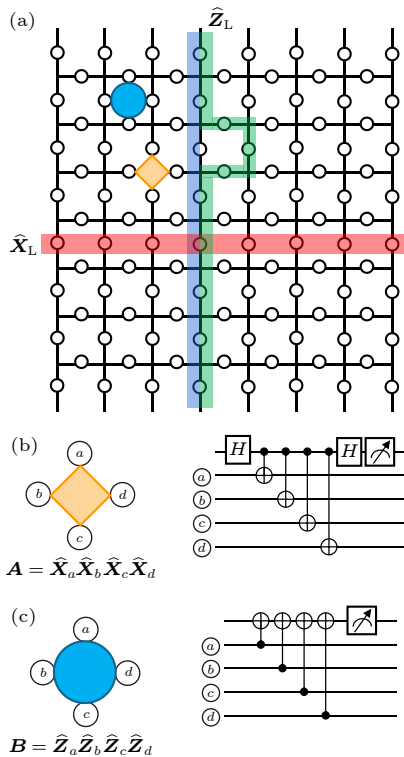


图 3 (a) $d = 8$ 的表面码及其逻辑算符 $\hat{Z}_L$ 与 $\hat{X}_L$ 的示意图. 图中网格的每条边上都有一个白点表示一个数据量子比特. 黄色菱形以及蓝色圆形分别表示其中一个 A 和 B 类型的稳定子. 蓝色和红色阴影线分别表示逻辑编码的 $\hat{Z}_L$ 和 $\hat{X}_L$ 算符. 绿色阴影线表示蓝色阴影线对应的算符乘上一个稳定算符, 其也是逻辑 $\hat{Z}_L$ 算符. (b) 和 (c) 分别是 A , B 类型稳定子算符测量的量子线路图. 此图由文献 [76] 改编

Fig. 3. (a) Schematic of $d = 8$ surface code and the corresponding logical operators $\hat{Z}_L$ and $\hat{X}_L$. The white dots on each edge of the grid represent data qubits. The yellow diamonds and the blue circles represent A and B types of stabilizers, respectively. The blue and red shaded lines represent the logical $\hat{Z}_L$ and $\hat{X}_L$ operators, respectively. The green shaded line represents the operator corresponding to the blue shaded line multiplied by a stabilizer operator, which is also the logical $\hat{Z}_L$ operator. (b) and (c) are quantum circuits that measure the stabilizer operators of type A and B , respectively. This figure is adapted from Ref. [76].

特位翻转或者相位翻转才会导致逻辑错误, 因此表面码对于局域噪声有着很强的抵抗能力. 劳森多夫 (Raussendorf) 及其合作者 [77–79] 证明, 在只使用单比特门以及近邻两比特门的前提下, 表面码的容错阈值可以达到 0.75%.

错误诊断是表面码纠错的基础. 从物理架构来看, 可以在每个黄色菱形以及蓝色圆形中心放置一个辅助比特, 这样只需要通过辅助比特与数据比特之间的邻近相互作用就可以进行错误诊断, 对应的量子线路如图 3(b) 和图 3(c) 所示. 具体来说, 当由生成元集合 $\{g_i\}$ 所稳定的状态经历么正演化 U 之后, 新的状态会被 $\{U g_i U^\dagger\}$ 所稳定. 由 $\hat{X}_a \hat{Z}_a \hat{X}_a = -\hat{Z}_a$ 可知, 如图 4(a) 所示, 当 a 比特上 (图中红色交叉所示) 发生比特位翻转噪声时, 以此比特为顶点的两个 B 类型的稳定子 (图 4(a) 中的两个蓝色圆圈) 的测量结果均出现翻转, 而 A 类型稳定子的结果不翻转, 从而可以实现对单个比特位翻转噪声的错误诊断. 一般来说, 测量结果出现翻转的稳定子对应的位置称为缺陷. 如图 4(b) 中连续的多个比特位翻转噪声导致一条错误链, 链的两端各有一个缺陷. 如图 4(c), 对于左右边界上的比特发生位翻转只会在网格中引起一个缺陷, 另一个缺陷可以视作处于左右边界外. 上下边界发生相位翻转噪声同理.

多种噪声也可能会对对应同一个错误症状, 如图 4(b) 的绿色和蓝色阴影线上的比特位翻转都会导致同样的错误症状 (对于图 4(c) 中的黄色线和浅绿色线同理), 但是只要实际的噪声 E 与纠错操作 E' 之间只相差若干个稳定子算符, 那么都可以纠正错误. 由此可见, 只要 $E'E$ 在网格中形成一条完整的“闭合曲线”且曲线不同时连接表面码的左右边界, 就可以纠正错误. 具体来说, 图 4(c) 中黄色线和浅绿色线在左边界与网格上缺陷形成了闭合曲线, 所以也可以纠正错误, 但是图 4(d) 部分所示的 $E'E$ 同时连接了左右边界, 因而导致了逻辑错误. 在实际过程中错误诊断对应的情况远比图示复杂, 需要借助算法对错误症状进行自动识别, 如最小权重算法 [80] 和最大似然算法 [81]. 在实际纠错过程中, 错误的纠正可不执行相应的门操作, 只需要加以标记, 采用所谓的泡利框架 (Pauli frame) [82] 的方式, 先记录发生的噪声, 在后续的门操作中再做纠正处理, 此时系统的量子态是新的稳定子 $-A$ 的本征态.

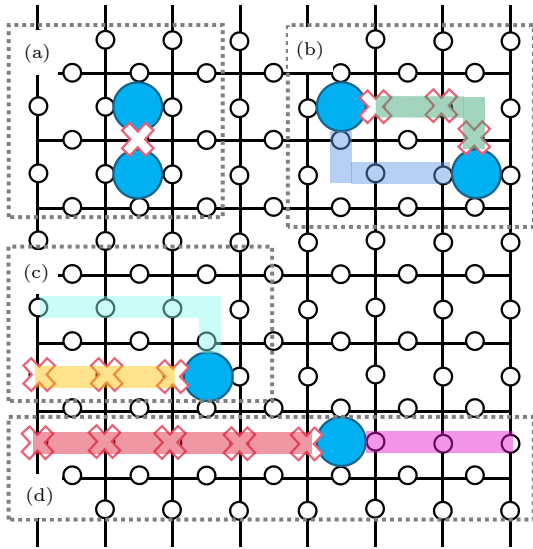


图4 表面码的错误症状及纠错操作示意图. 图中红色交叉表示对应物理比特发生了位翻转噪声, 蓝色圆形表示测量结果异常的 B 类型稳定子的位置, 即缺陷的位置, 阴影线均表示对线上的物理比特执行的 $\hat{X}$ 操作. 四个区域分别对应以下情况: (a) 网格中单个比特发生噪声产生了两个相邻的缺陷; (b) 网格中的连续的几个比特发生噪声产生了位于错误链两端的缺陷, 而蓝色和绿色阴影线对应的操作均能纠正逻辑错误; (c) 含有网格左边界的比特的错误链导致单个缺陷的产生, 浅绿色和黄色的阴影线对应的操作均能纠正逻辑错误; (d) 含有网格左边界的比特的错误链导致单个缺陷的产生, 红色阴影线对应的操作能纠正逻辑错误, 但是紫色阴影线的操作会导致无法被错误诊断识别的逻辑错误

Fig. 4. Schematic of error syndromes and error correction operations of surface codes. The red cross in the figure indicates a bit-flip error occurring in the corresponding physical qubit, while the blue circle indicates the position of the B type stabilizer with abnormal measurement results, i.e., the position of the defect, and the shaded lines indicate an $\hat{X}$ operation performed on each of the physical qubit on the line. The four areas correspond to the following situations: (a) A single bit-flip error in the grid results in two adjacent defects. (b) Several consecutive bit-flip errors in the grid result in two defects located at the two ends of the error chain. Both the blue and green shaded lines can correct these errors. (c) The error chain containing a qubit on the left boundary of the grid results in a single defect, and the operations corresponding to either the light green or the yellow shaded line can correct these errors. (d) The error chain containing a qubit on the left boundary of the grid results in a single defect. The operation corresponding to the red shaded line can correct these errors, but the operation corresponding to the purple shaded line causes a logic error that cannot be identified by the error syndrome.

表面码的逻辑编码空间由哈密顿量 $H = -\sum_s A_s - \sum_p B_p$ 的两个简并基态能级构成, 这一物理体系具有许多拓扑性质, 成功地建立了纠错码研究与拓扑物态研究的关联^[83]. 具体来说, 表

面码的逻辑态可以用稳定子算符表示为 $|0_L\rangle \propto \prod_s (I + A_s) |0\rangle^{\otimes n}$, 其对应的初态制备的方式有两种: 第一种方式需要先制备 $|0\rangle^{\otimes n}$, 注意到此量子态是所有稳定子 B_p 以及逻辑算符 $\hat{Z}_L$ 的 $+1$ 本征态; 然后需要对所有的稳定子 A_s 进行测量. 经过测量后系统随机塌缩在一个所有 A_s 算符都具有确定本征值的子空间中. 从错误症状的角度来看, 某个 A 型稳定子得到 -1 的测量结果相当于编码中若干物理比特“发生”相位翻转噪声 (由于对易关系, 此时的量子态仍是稳定子 B_p 的 $+1$ 本征态, 即不会“发生”比特位翻转噪声), 此时执行相应的“纠错”操作即可制备逻辑态 $|0_L\rangle$. 此外, 也可以如前文所述暂时不进行这一步纠错操作. 对于逻辑态 $|1_L\rangle$ 以及 $|\pm 1_L\rangle$ 的制备也是类似的, 只需要制备 $|1\rangle^{\otimes n}$, $|\pm 1\rangle^{\otimes n}$ 再作用类似的操作即可.

另一种方式是直接使用相应量子线路实现. 具体的步骤如图 5^[84] 所示, 先制备 $|0\rangle^{\otimes n}$, 然后对每个 A_s 算符所围的正方形的顶点比特中作用 H 门操作, 最后以边上其他的比特为受控比特按照图中的顺序分别作用 CNOT 门即可. 具体的原理可以参考文献^[85].

根据前文所述, 想要利用表面码实现量子纠错至少需要满足以下条件: 一是要有足够的物理比特编码一个逻辑比特; 二是不仅要能快速且高度并行地执行错误诊断, 而且还要减少这一过程中辅助比特对数据比特的干扰; 三是要求能根据错误症状快速进行错误寻址以及能通过反馈在后续门操作中纠正错误. 因此, 表面码的实现物理比特数量、单个物理比特的性能和门操作的保真度都有着很高的要求, 需要材料、极低温和电子学等各个领域的技术进步.

除了重复码和表面码之外, 出于提高编码效率或者实现容错架构等考虑, 人们一方面对表面码进行了优化, 如通过对表面码网格的旋转和修剪^[86], 使得在码距 d 不变的情况下只需要 d^2 个数据比特就可以编码一个逻辑比特; 另一方面提出了许多其他类型的编码, 如 XZZX 编码^[87]、颜色码 (color code)^[88,89] 等.

表 1 列出了近年来各个实验组对表面码、重复码以及其他类型编码的研究, 包括谷歌公司、中国科学技术大学、苏黎世联邦理工学院、代尔夫特理工大学等. 这些研究单位实现了不同码距的表面码的初态制备、错误诊断以及错误纠正等操作.

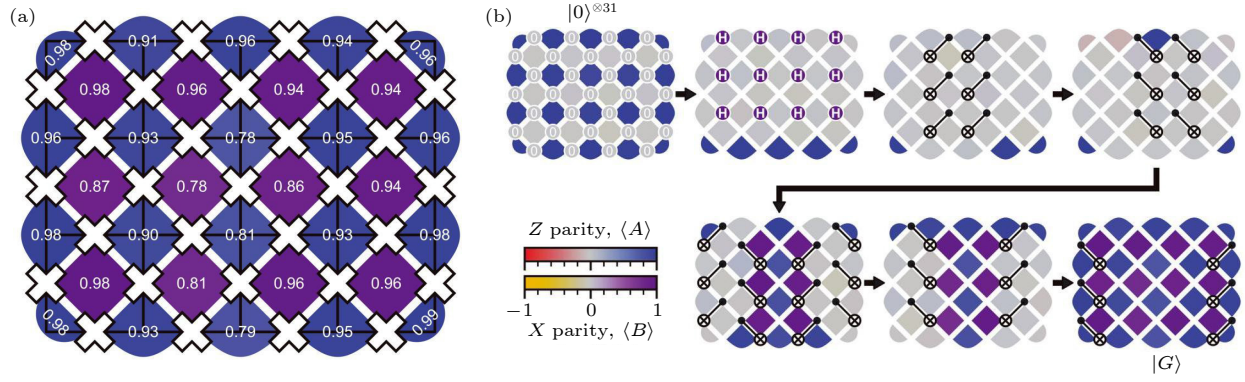


图 5 (a) 谷歌公司实验^[84]中制备表面码初态所用超导芯片的架构以及对应稳定子测量结果. 图中白色的十字为数据比特, 紫色和蓝色的图形分别代表 B_p 类型和 A_s 类型的稳定子测量, 图中的数值是初态对应的稳定子测量结果的平均值. (b) 表面码初态制备对应的门操作线路

Fig. 5. (a) Architecture of the superconducting circuit used to prepare the initial state of the surface code in Google's experiment^[84] and the corresponding stabilizer measurement results. The white crosses are data qubits, the purple and blue regions represent stabilizer measurement results of type B_p and A_s , respectively. The values in the figure are the average values of the stabilizer measurement results corresponding to the initial state. (b) Operation circuit to prepare the initial state of the surface code.

表 1 超导系统中二能级编码的纠错实验进展. 带*号的是物理比特中最优的数据, /表示文献中没有直接给出相关数据. 其中, 文献 [72, 90, 91] 的实验均在国际商用机器公司的 IBMQ 平台上进行

Table 1. Experimental progress on quantum error correction with two-level codes in superconducting systems. Datas with * refer to the optimal datas among the physical qubits. / indicate that the relevant datas are not directly given in the documents. The experiments in the Refs. [72, 90, 91] were implemented on IBMQ.

时间	文献	编码	逻辑 T_1 (物理 T_1) / μs	逻辑 T_2 (物理 T_2) / μs
2012	耶鲁大学 ^[68]	[3, 1, 3] 重复码	/	/
2014	加州大学圣芭芭拉分校 ^[69]	[3, 1, 3], [5, 1, 5] 重复码	/	/
2015	代尔夫特理工大学 ^[25]	[3, 1, 3] 重复码	/	/
2017	IBMQ ^[71]	4 比特颜色码	/	/
2018	巴塞尔大学 (University of Basel) ^[72]	[8, 1, 8] 重复码	/	/
2018	德国于利希研究中心 (Forschungszentrum Jülich) ^[90]	4 比特颜色码	/	/
2019	悉尼大学 ^[91]	[4, 2, 2] 错误检测码	/	/
2019	中国科学技术大学 ^[92]	[[5, 1, 3]] 编码	/	/
2020	苏黎世联邦理工学院 ^[93]	[[4, 1, 2]] 表面码	62.7 ± 9.4 (16.8*)	72.5 ± 32.9 (21.5*)
2021	谷歌公司 ^[84]	实现表面码的基态	/	/
2021	中国科学技术大学 ^[31]	[[9, 1, 3]] 表面码	137.8 (36.6*)	/
2021	苏黎世联邦理工学院 ^[94]	[[9, 1, 3]] 表面码	16.4 (32.5)	18.2 (37.5)
2021	谷歌公司 ^[73]	[[11, 1, 11]] 重复码以及 [[4, 1, 2]] 表面码	/	/
2022	苏黎世联邦理工学院 ^[24]	[[4, 1, 2]] 表面码	/	/
2022	IBMQ ^[95]	[[9, 1, 3]] Heavy-hexagon 编码	/	/
2022	谷歌公司 ^[8]	[[25, 1, 5]] 表面码以及 [25, 1, 25] 重复码	/	/

如中国科学技术大学的研究小组在超导芯片中实现了 17 比特的 [[9, 1, 3]] 表面码的初态制备, 并进行了 11 轮次的错误诊断, 在后选择的基础上将逻辑编码 $|0_L\rangle$ 的寿命 (T_1) 大幅度提升至 137.8 μs , 与之相比, 其芯片上最好的物理比特寿命只有 36.6 μs . 而谷歌

公司在近期的实验中分别制备且表征了 $d = 5$ 以及 $d = 3$ 的表面码, 并证明了前者在 25 轮次的纠错中具有更低的逻辑错误率, 这首次展示了纠错效果随着编码规模增加而得到提高. 这些实验都表明了量子纠错的巨大潜力. 然而, 受限于物理比特的数量、

寿命、超导线路的串扰以及门操作过程中的噪声等因素, 目前这些编码仍未能有效提高逻辑态寿命, 即未达到盈亏平衡点, 只能利用错误诊断的信息在后选择的基础上进行量子纠错的原理性展示和相关应用的探索. 但是, 随着控制技术、硬件基础以及纠错编码理论的完善, 量子纠错的未来可期.

3.2 玻色类型纠错码

目前超导系统中另一种常用的架构就是将超导辅助比特与超导谐振腔进行色散耦合. 在此架构中, 谐振腔一般被用于编码逻辑比特, 而超导辅助比特则用于为谐振腔的量子操控提供必要的非线性. 由于谐振腔模式本身就是一个具有无穷多个能级的玻色模式, 因而本身就具有巨大的冗余空间, 为量子态的编码提供了多种方案. 一方面, 可以只利用其中有限个能级进行编码; 另一方面, 也可以利用其无穷个能级进行连续变量类型的编码. 前者典型的例子是二项式编码 (binomial code), 而后者典型的例子是猫态编码 (cat code) 以及 GKP 编码 (Gottesman-Kitaev-Preskill code). 值得一提的是, 玻色编码除了适用于超导系统外还适用于离子阱以及光学等物理平台.

3.2.1 二项式编码

二项式编码最早在 2016 年由耶鲁大学格文 (Girvin) 课题组^[59]提出, 其逻辑态由有限个福克 (Fock) 能级加权叠加而成, 因权重系数为二项式系数而得名. 相较于其他玻色编码, 二项式编码在相同的纠错能力下具有更小的平均光子数, 此外, 其还具有严格正交的逻辑态以及么正的纠错操作等特点. 二项式编码可以在多项式展开下完美地纠正热激发、自发辐射以及退相位噪声, 即可以完美纠正噪声集合:

$$\varepsilon = \left\{ \hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^2, \dots, \hat{a}^L, \hat{a}^\dagger, (\hat{a}^\dagger)^2, \dots, (\hat{a}^\dagger)^G, \hat{n}, \hat{n}^2, \dots, \hat{n}^D \right\},$$

其中 $\hat{I}$ 和 $\hat{a}$ 分别是系统的单位矩阵以及湮灭算符, 而 $\hat{n} = \hat{a}^\dagger \hat{a}$. 与此对应的二项式编码是

$$|0_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{p=\text{even}}^{[0,N+1]} \sqrt{C_{N+1}^p} |p(S+1)\rangle,$$

$$|1_L\rangle = \frac{1}{\sqrt{2^N}} \sum_{p=\text{odd}}^{[0,N+1]} \sqrt{C_{N+1}^p} |p(S+1)\rangle,$$

其中 $S = L + G$, $N = \max\{L, G, 2D\}$, 而 C_{N+1}^p 为二项式系数. 从上述表达式可以看出二项式编码具有特殊的宇称, 即只占据子空间 $\hat{H}_0$, 其中 $\hat{H}_k = \sum_{k=n \bmod S+1} |n\rangle\langle n|$. 图 6 即为二项式编码 $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|4\rangle)/2$, $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|2\rangle + |6\rangle)/2$ 的维格纳 (Wigner) 函数图.

由于热激发和自发辐射噪声都会改变系统的宇称, 因此对应的错误诊断可以通过引入玻色模式与辅助比特之间的交叉克尔 (cross Kerr) 效应 $H = \chi \hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{Z}$ 来实现. 比如, 最低阶的二项式编码 $|0_L\rangle = (|0\rangle + |4\rangle)/\sqrt{2}$, $|1_L\rangle = |2\rangle$ 可以纠正超导谐振腔系统的最主要噪声来源——单光子的自发辐射噪声. 这种噪声的错误诊断过程为: 先将辅助比特制备在 $|+\rangle = (|0\rangle + |1\rangle)/\sqrt{2}$, 然后实现么正演化 $U = \exp\left(-i\frac{\pi}{2}\hat{a}^\dagger \hat{a} \hat{Z}\right)$, 最后对比特进行 X 方向的测量. 如果测量得知辅助比特处于 $|-\rangle = (|0\rangle - |1\rangle)/\sqrt{2}$, 则说明玻色模式发生单光子自发辐射噪声.

而对退相干噪声对应的错误诊断则需要使用基于梯度上升波形优化 (gradient ascent pulse engineering, GRAPE)^[96,97]或其他类似的方法设计辅助量子比特与二项式编码之间的逻辑门操作, 将逻辑态的错误信息投影在辅助量子比特上. 例如, 对于高阶二项式编码 $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|6\rangle)/2$, $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|3\rangle + |9\rangle)/2$ 可以纠正错误集合 $\varepsilon = \{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^2, \hat{n}\}$. 当发生退相位噪声 $\hat{n}$ 之后, 量子态从 $|\psi\rangle = u|0_L\rangle + v|1_L\rangle$ 变成了:

$$|\psi'\rangle = \frac{\sqrt{3}}{2} (u|0_L\rangle + v|1_L\rangle) - \frac{1}{2} (u|0'_L\rangle + v|1'_L\rangle),$$

其中 $|0'_L\rangle = (\sqrt{3}|0\rangle - |6\rangle)/2$, 而 $|1'_L\rangle = (|3\rangle - \sqrt{3}|9\rangle)/2$, 这两个基矢构建了与编码空间正交的子空间. 这种二项式编码对于退相位噪声的错误诊断过程可设计为: 将辅助量子比特量子态制备在 $|g\rangle$ 并与逻辑态之间实现门操作 $U_{\text{syn}} = \mathbf{P} \otimes \mathbf{I} + \mathbf{P}' \otimes (|e\rangle\langle g| + |g\rangle\langle e|) + \mathbf{U}_{\text{res}}$, 其中, $\mathbf{P} = |0_L\rangle\langle 0_L| + |1_L\rangle\langle 1_L|$, $\mathbf{P}' = |0'_L\rangle\langle 0'_L| + |1'_L\rangle\langle 1'_L|$ 分别是逻辑空间和错误空间的投影算符, 而 $\mathbf{U}_{\text{res}}$ 为其他子空间中任意的么正算符, 然后如果测量得知辅助量子比特处于 $|e\rangle$ 则说明玻色模式发生了退相位噪声.

实验进展方面, 在高品质的三维谐振腔的平台中, 借助 transmon 量子比特提供的非线性以及微波线路提供的相干驱动, 最低阶的二项式编码以及基于梯度上升波形优化方法设计的任意单比特操作已被验证^[98], 两个二项式编码量子比特之间的

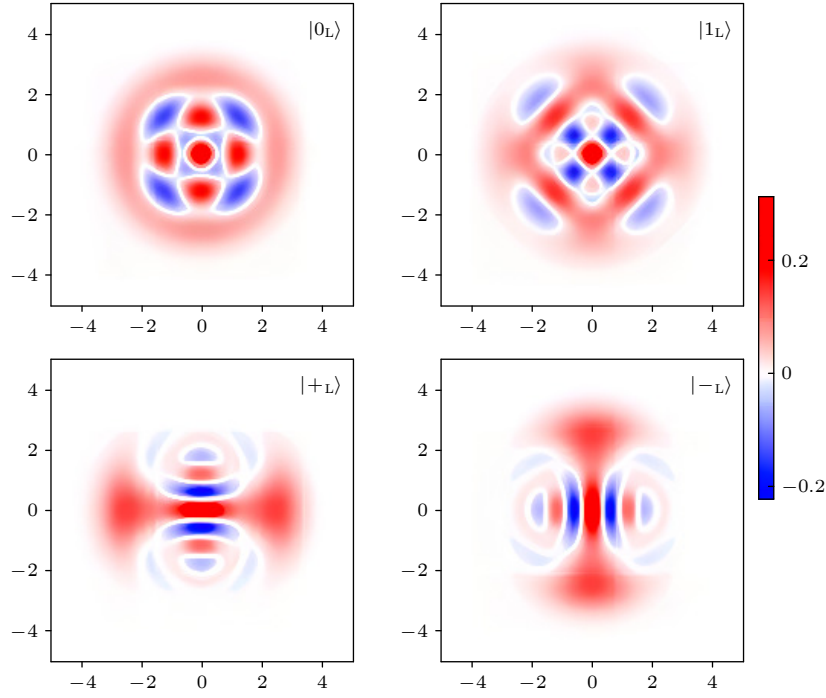


图 6 一种二项式编码逻辑态的维格纳函数图像. 左上: 逻辑态 $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|4\rangle)/2$; 右上: $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|2\rangle + |6\rangle)/2$; 左下: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; 右下: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$. 这是平均光子数最小的且能纠正错误集合 $\{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}\}$ 的二项式编码, 可以看到其 $|0/1_L\rangle$ 本身具有 $\pi/4$ 的旋转对称性, 而 $|+/-_L\rangle$ 在相空间中接近正交

Fig. 6. Wigner functions of the logical states of one binomial code. Upper left: Logical state $|0_L\rangle = (|0\rangle + \sqrt{3}|4\rangle)/2$; Upper right: Logical state $|1_L\rangle = (\sqrt{3}|2\rangle + |6\rangle)/2$; Lower left: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; Lower right: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$. This is the binomial code that has the minimal average photon number and can correct the error set $\{\hat{I}, \hat{a}, \hat{a}^\dagger\hat{a}\}$. The logical state $|0/1_L\rangle$ has a rotational symmetry of $\pi/4$ and $|+/-_L\rangle$ are almost orthogonal in phase space.

Cphase 门^[45]、eSWAP 门^[99]、传送 CNOT 门^[100]等均被实现, 而基于二项式编码的错误透明 (error transparent) 逻辑门也被验证^[101].

3.2.2 猫态编码

2013 年, 莱格塔斯 (Leghtas) 等^[60]最早提出四分量猫态编码的构想, 用于对抗单光子自发辐射噪声. 其编码形式为

$$\begin{aligned} |0_L\rangle &\propto (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle + |i\alpha\rangle + |-i\alpha\rangle), \\ |1_L\rangle &\propto (|\alpha\rangle + |-\alpha\rangle - |i\alpha\rangle - |-i\alpha\rangle). \end{aligned}$$

这种编码可以推广至抵抗更高阶的自发辐射噪声, 其编码为^[102]

$$|0_L\rangle \propto \sum_{k=1}^n \left| \alpha e^{i2k\pi/n} \right\rangle, \quad |1_L\rangle \propto \sum_{k=1}^n e^{i4k\pi/n} \left| \alpha e^{i2k\pi/n} \right\rangle.$$

从上式可以看出, $|0/1_L\rangle$ 都是不同相位的相干态的线性叠加的形式. 此编码可以抵抗至多 $n/2 - 1$ 个光子自发辐射噪声. 与二项式编码类似, 这种猫态编码也具有特殊的宇称, 但是其分布在无穷个福克能级上. 当自发辐射的光子数小于 $n/2 - 1$ 时, 逻辑态中的相干态成分前面会多出一个相位,

且福克空间的宇称会发生改变, 但不会影响到编码的信息. 因此可以通过宇称测量进行错误诊断, 并通过反馈执行纠错操作来抵抗自发辐射噪声. 然而, 光子的自发辐射会不断地使相干态的平均光子数衰减至真空态, 所以猫态编码需要不断地输入能量, 即需要实现稳定操作使得系统状态被限制在编码空间中.

有两种方式可以实现这种稳定操作, 一种是使用耗散控制的方式, 即构建耗散信道 $\frac{d\rho}{dt} = \mathcal{L}[\sqrt{\kappa}(\hat{a}^n - \alpha^n)]\rho$, 其中 κ 为耗散强度. 此信道表现为构建多光子耗散和多光子驱动, 其稳态为猫态编码的逻辑态. 所需的耗散信道可以通过引入与低品质因子谐振腔 $\hat{b}$ 之间的非线性相互作用 $g_n^* \hat{a}^n \hat{b}^\dagger + \text{h.c.}$ 以及低品质因子谐振腔本身的相干驱动 $\mathcal{E}_d^* \hat{b} e^{-i\omega_b t} + \text{h.c.}$ 共同作用产生. 当驱动达到共振时, 相关物理过程可以由主方程表示为

$$\frac{d}{dt}\rho = -i \left[g_n^* (\hat{a}^n - \alpha^n) \hat{b}^\dagger + \text{h.c.}, \rho \right] + \kappa_b \mathcal{L}_{\hat{b}}(\rho).$$

此时相干态 $|\alpha e^{i2k\pi/n}\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\alpha^n = -\mathcal{E}_d/g_n^*$, 均是此耗散信道的稳态. 另一种是构建特

殊的哈密顿量 $\hat{H} = -K\hat{a}^{\dagger n}\hat{a}^n + (\mathcal{E}_p\hat{a}^{\dagger n} + \mathcal{E}_p^*\hat{a}^n)$ [103]. 此时相干态 $|\alpha e^{i2k\pi/n}\rangle$, $k = 1, 2, \dots, n$, 其中 $\alpha^n = \mathcal{E}_p/K$, 均是系统的简并本征态, 由于绝热定理系统会被束缚在编码空间中. 前者一般称为耗散型 (dissipative) 猫态编码, 后者一般称为克尔型 (Kerr) 猫态编码.

除了使用梯度上升波形优化等方式直接设计么正演化进行制备外, 猫态编码的初态制备还有两种方式. 一种是绝热制备 [104], 可以将初态制备在 $\{|0\rangle, |1\rangle\}$ 的福克能级, 然后缓慢地增强多光子驱动强度, 系统的状态将绝热地演化到对应的逻辑态上, 此过程中驱动强度的变化需要足够平滑以满足绝热条件. 另一种是无跃迁 (transitionless) 制备 [103], 通过引入辅助哈密顿量 $\mathbf{H}' = i[|\dot{\psi}(t)\rangle\langle\psi(t)| - |\psi(t)\rangle\langle\dot{\psi}(t)|]$ 使得系统每一时刻的状态 $|\psi(t)\rangle$ 都是 $\hat{H}(t)$ 的本征态, 从而可以快速实现初态制备, 减少噪声的影响.

方便起见, 对于最低阶 $n = 2$ 的编码我们一般使用计算基矢 $|0_L\rangle = |\alpha\rangle + O[\exp(-2|\alpha|^2)]$, $|1_L\rangle = |-\alpha\rangle + O[\exp(-2|\alpha|^2)]$. 因为其编码空间只有两维, 没有足够的信息冗余来进行纠错. 对于这种编码, 单光子的自发辐射噪声仅仅引起编码空间的比特

相位翻转错误, 其错误率会随着 $|\alpha|^2$ 的增大呈线性增长, 但退相位噪声导致的位翻转错误则得到指数的抑制. 这种特殊的噪声偏置特性使得猫态编码能够与重复码这种类型的简单的二能级编码进行级联, 实现容错量子计算.

从相空间的角度看, 二项式编码 (图 6) 和猫态编码 (图 7) 的维格纳函数都具有旋转对称性, 都属于旋转对称玻色编码 (rotation-symmetric bosonic code) 的特殊例子 [105]. 量子态相空间中的旋转对称性导致了其在福克态空间有一定的宇称, 因而猫态编码和二项式编码都可以纠正自发辐射噪声和热激发噪声. 在平均能量很大时, 两种编码的对偶态 $|+/-_L\rangle$ 在相空间中较好地分开, 所以可以简单地进行零差 (homodyne) 测量或者是外差 (heterodyne) 测量就可以实现逻辑 X_L 基矢的测量. 旋转对称玻色编码在纠错方面具有巨大的潜力, 但目前其容错相关的特性仍需要进一步研究, 包括容错通用门操作的实现、容错阈值以及相关资源消耗等.

实验进展方面, $n = 4$ 的猫态编码是第一个也是目前唯一一个在实验上正式使用纠错技术超越盈亏平衡点 (break-even point) 的编码 [106], 即使用编码得到的相干时间要优于单纯使用 $|0/1\rangle$ 的福克

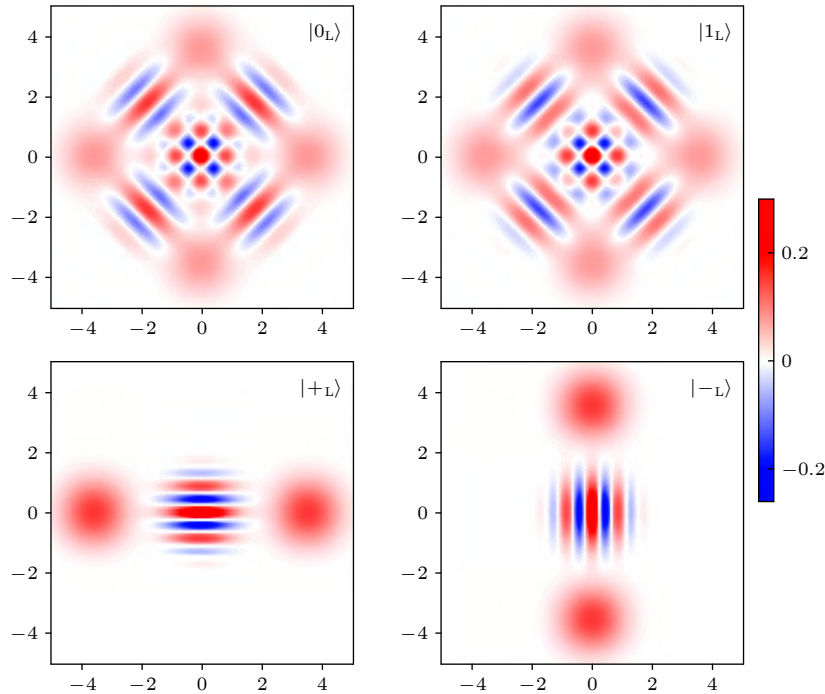


图 7 猫态编码逻辑态的维格纳函数图像, 其中 $\alpha = 2.5$, $n = 4$. 左上: 逻辑态 $|0_L\rangle$; 右上: $|1_L\rangle$; 左下: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; 右下: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$.

Fig. 7. Wigner functions of the logical states of the cat code with $\alpha = 2.5$, $n = 4$. Upper left: Logical state $|0_L\rangle$; Upper right: Logical state $|1_L\rangle$; Lower left: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; Lower right: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$.

态叠加的情况. 此外, 针对这一编码, 基于数值优化的通用逻辑门操作也得以验证^[107], 而在福克空间维度截断的情况下, 通过耗散控制的方式实现了对逻辑态的自动纠错^[108]. 对于 $n = 2$ 的猫态比特也有相关实验实现了其初态制备及稳定、噪音偏置性质观察 (耗散-猫态^[109,110]), 及其相应的单比特量子门操作 (克尔-猫态^[111]).

3.2.3 GKP 编码

2001 年, 戈特斯曼 (Gottesman) 等^[62] 提出了 GKP 编码, 将量子信息编码到简谐振子上, 用于对抗位置和动量的小位移噪声. 而随后的研究^[112] 表明此编码对包括自发辐射、热激发和退相位在内的多种噪声均有抵抗作用. 从相空间的角度来看, 位移噪声的作用是沿着某个方向将量子态平移一段距离, 而 GKP 编码的核心思想是使用在相空间中具有平移对称性的量子态, 其属于平移对称玻色编码 (translation-symmetric bosonic code) 的一种, 其具体的编码如下:

$$|0_L\rangle \propto \sum_{s=-\infty}^{\infty} |2s\sqrt{\pi}\rangle_{\hat{q}}, \quad |1_L\rangle \propto \sum_{s=-\infty}^{\infty} |(2s+1)\sqrt{\pi}\rangle_{\hat{q}},$$

其中 $\hat{q} = \frac{a + a^\dagger}{\sqrt{2}}$, $\hat{p} = \frac{a - a^\dagger}{\sqrt{2}i}$ 分别是正则位置与正则动量算符, 而 $|x\rangle_{\hat{q}}$ 即是位置算符本征值为 x 的本征态. 图 8 是 GKP 编码逻辑态 $|0_L\rangle$ 和 $|1_L\rangle$ 的维格纳函数图像. 由此可见, GKP 态在相空间中对应对称周期结构, $|0_L\rangle$ 和 $|1_L\rangle$ 之间位置相距 $\sqrt{\pi}$, 故小于 $\sqrt{\pi}/2$ 的平移操作不会降低逻辑态之间的可区分性. 这一点也可以从 GKP 编码的相干态表示看出:

$$|0_L\rangle \propto \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi mn} \left| 2m\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}n \right\rangle,$$

$$|1_L\rangle \propto \sum_{m,n=-\infty}^{\infty} e^{-i\pi(mn+m/2)} \left| (2m+1)\sqrt{\frac{\pi}{2}} + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}n \right\rangle.$$

从稳定子的角度来看, 这一具有平移对称性的编码所对应的稳定子为

$$\hat{S}_q = \hat{D}(i\sqrt{2\pi}) = e^{i2\sqrt{\pi}\hat{q}},$$

$$\hat{S}_p = \hat{D}(\sqrt{2\pi}) = e^{-i2\sqrt{\pi}\hat{p}},$$

其中 $\hat{D}(\alpha) = e^{\alpha\hat{a}^\dagger - \alpha^*\hat{a}}$ 为位移算符. 而 GKP 编码对应的泡利门操作为

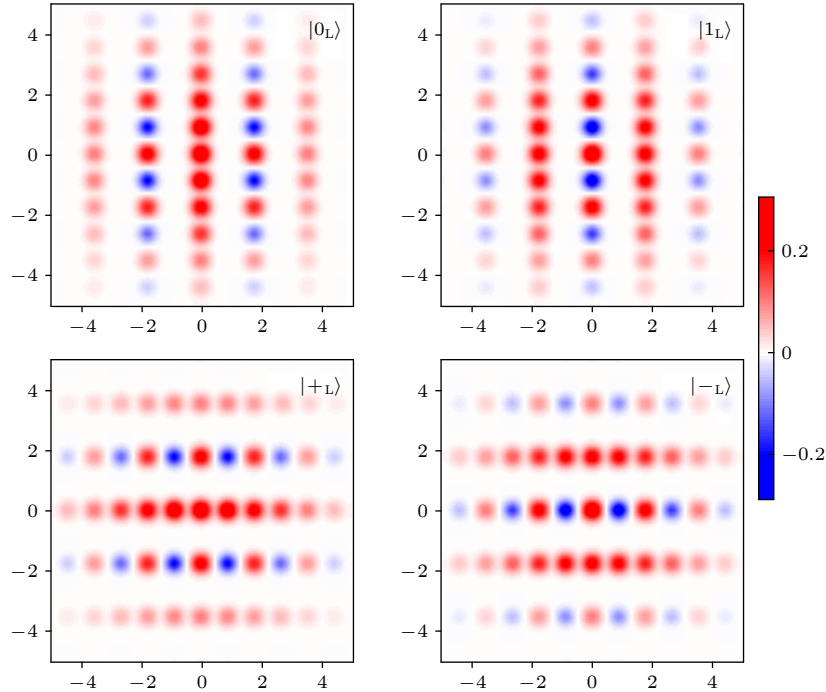


图 8 近似 GKP 编码逻辑态的维格纳函数图像, 其中 $\Delta = 0.3$. 左上: 逻辑态 $|0_L\rangle$; 右上: $|1_L\rangle$; 左下: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; 右下: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$

Fig. 8. Wigner functions of the logical states of an approximate GKP code with $\Delta = 0.3$. Upper left: Logical state $|0_L\rangle$; Upper right: $|1_L\rangle$; Lower left: $|+_L\rangle = (|0_L\rangle + |1_L\rangle)/\sqrt{2}$; Lower right: $|-_L\rangle = (|0_L\rangle - |1_L\rangle)/\sqrt{2}$.

$$\begin{aligned} X &= \hat{D}\left(\sqrt{\pi/2}\right) = e^{-i\sqrt{\pi}\hat{p}}, \\ Y &= \hat{D}\left(\sqrt{\pi/2} + i\sqrt{\pi/2}\right), \\ Z &= \hat{D}\left(i\sqrt{\pi/2}\right) = e^{i\sqrt{\pi}\hat{q}}. \end{aligned}$$

但是, 由于理想的 GKP 编码的平均光子数是无穷大的, 因此在物理实现方面需要对理想 GKP 编码加以近似. 一种常见的近似方法是给逻辑态加以高斯包络, 即

$$\begin{aligned} |0_L\rangle_{\text{approx}} &\propto e^{-\Delta^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} |0_L\rangle, \\ |1_L\rangle_{\text{approx}} &\propto e^{-\Delta^2 \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a}} |1_L\rangle. \end{aligned}$$

当 $\Delta \rightarrow 0$ 的时候则逐渐变成理想 GKP 态.

GKP 编码拥有良好的纠错容错特性, 因为其对应的所有克利福德 (Clifford) 门操作所需要的相互作用都可以用产生湮灭算符的二次项组合得到. 这意味着, 在执行克利福德门操作的时候任意一个 GKP 编码的玻色模式中的噪声最多只会传递到另一个模式中, 这便满足容错量子操作的要求. 此外, GKP 编码对多种噪声都有较强的抵抗作用. 如前文所示, GKP 编码在相空间中是正方形的格点, 可以对其进行推广得到所谓六边形 GKP 编码. 数值计算表明, 在给定任意初始编码的情况下针对光子湮灭噪声以及高斯热噪声进行优化最后都收敛于六边形 GKP 编码^[113]. 目前 GKP 编码仍有一些问题需要进一步探讨, 包括近似 GKP 编码的 Δ 如何能进一步减小, 以及如何增加对系统中的退相位噪声和高阶非线性效应的抵抗能力等.

GKP 编码虽然早在 2001 年就被提出, 但直到近年来才先后在离子阱平台^[111,114,115]及超导平台^[116]上实现相关的编码以及纠错操作. 因为位移算符所对应的本征值是 $e^{i\theta}$, 其中 θ 可以在区间 $[0, 2\pi)$, 在初态制备中我们需要保证制备得到的是稳定子算符 +1 的本征态 (即 $\theta = 0$), 故需要引入复杂的反馈控制方法. 超导系统正是利用相位测量以及反馈的方式^[117]成功地实现了正方形和六边形 GKP 编码的初态制备^[116]. 后续可望有相关实验能够实现对应的自动稳定信道^[118].

3.3 级联纠错码和容错量子计算

量子纠错码减少了环境噪声对量子态的干扰, 可以用于增加量子线路的深度和精度. 在此基础上, 想进一步提升纠错性能需要从以下两个方面入

手: 1) 扩大编码距离, 使得纠错码能够抵抗更多的噪声, 其中比较有效的方式是进行级联编码; 2) 合理地设计量子线路中的操作, 抑制计算过程中噪声的扩散.

3.3.1 级联编码

对于常见的二能级编码如表面码、颜色码、重复码等, 他们本身就非常容易进行拓展, 即可以用同样的构造方式引入更多的物理比特增强纠错能力, 而前文所述的三种玻色编码也都可以通过增加平均能量来增强对噪声的抵抗能力. 除了对编码进行直接拓展外, 还可以通过级联编码的方式来进行拓展, 即先将一种编码方式得到的逻辑比特作为底层比特, 然后再进行另一种方式的编码. 通过将多种编码级联在一起的方式可以发挥各种编码的优势, 取得更好的纠错效果.

一个最简单的例子就是肖尔编码 (Shor code), 该编码将可以纠正相位翻转的三比特重复码作为底层逻辑码, 上层级联可以纠正位翻转噪声的三比特重复码作为最终编码. 结合两种编码的纠错能力, 肖尔编码可以纠正单个物理比特上的任意噪声. 另一个例子是玻色编码与二能级型编码的级联. 玻色编码对资源的需求较少, 单个模式就可以纠正一些低阶错误, 实现较高保真度的逻辑门操作, 但是其编码受高阶非线性效应的限制而不能无限扩展. 二能级型的编码受到物理比特的门保真度的限制, 当物理比特操作的保真度较低时, 纠错需要的资源会急剧增加. 因此, 以玻色编码作为底层编码与二能级编码级联就可以较好地解决上述问题, 底层玻色编码的操作保真度比较高, 上层二能级编码的资源消耗就可以减少. 目前可能的级联编码方案有环面/表面-GKP 编码 (toric/surface-GKP code)^[63,64]、重复-猫态编码 (repetition-cat code)^[65]、XZZX-猫态编码 (XZZX-cat code)^[46,66]等.

级联编码还可以利用底层编码的特点来简化顶层编码的操作. 如在重复-猫态编码中^[65], 最低阶 $n = 2$ 的猫态编码作为底层编码, 其可以实现保持噪声偏置特性的 X 门、CNOT 门和托弗里 (Toffoli) 门 (指数级抑制的位翻转错误和线性增加的相位翻转错误). 在使用上述门操作的基础上进行顶层编码时, 编码和逻辑门操作过程中额外的位翻转错误可以被底层猫态编码所抑制, 而相位翻转错误则可以被顶层的重复码纠正. 按照这种方式就可实现任意容错逻辑门操作, 而不需要花费大量资源进行妙

态 (magic state) 制备、提纯和注入等复杂操作^[65].

3.3.2 容错量子计算

在实际的量子纠错过程中, 包括错误诊断以及纠错操作在内的所有过程都会受到噪声的影响, 不合理的门操作会把噪声扩散至其他的物理比特, 从而导致逻辑错误. 但是, 如果当一个过程中的某个操作发生噪声的情况下, 过程最后输出的每一个逻辑比特中至多只有一个物理比特发生错误, 这样的过程被称为是容错的^[57]. 简单来说, 容错的量子过程抑制了错误的扩散, 使得某个操作过程中发生的噪声不会在后续的门操作的作用下扩散至多个物理比特上, 成为不可纠正的错误. 而且, 当噪声非常弱的时候, 这些错误在随后的纠错操作中大概率会得到纠正. 可以证明当噪声的强度小于一定的阈值 (即容错阈值) 的时候, 一个具有 $p(n)$ 个逻辑门的量子线路可以被一个包含 $O(\text{poly}(\log p(n)/\varepsilon)p(n))$ 的量子线路以至多 ε 的整体失败概率实现, 这就是著名的阈值定理.

实现容错逻辑门操作需要巧妙的设计来抑制错误的扩散, 目前最有效的方式是使用横向 (transversal) 门. 如图 9(a) 所示, 这类型的逻辑门操作可以通过物理比特上的单量子比特操作实现, 或者对于涉及到多个逻辑量子比特的门操作, 可以通过逻辑比特中对应物理比特的操作实现. 使用这种方式实现门操作天然地具有容错特性. 但是, 随后伊斯汀和尼尔 (Eastin-Knill) 证明^[119], 对于所有非平凡的量子纠错码而言, 横向门不能构成通用门操作集合. 幸运的是, 对于所有自对偶的 CSS 编码 (Calderbank-Shor-Steane code) 而言, 所有属于克利福德 (Clifford) 群的逻辑门操作都可以通过这个方式实现, 其中就包括了 CNOT 门和 H 门. 克利福德群是泡利群的正规化子, 即 $\{C|CP_nC^\dagger = P_n\}$, 其中 C 为克利福德门, P_n 为泡利门.

在实现容错克利福德门的基础上还需要能容错地实现至少一个非克利福德门才能实现容错的通用逻辑门操作集合, 比方说 T 门. 通过在戈特斯曼 (Gottesman) 和庄 (Chuang)^[120] 的方案基础上改进而来的单比特隐形传态 (one-bit teleportation) 的方式可以容错地实现 T 门^[121], 即如图 9(b) 所示: 可以引入一个与系统编码相同的辅助比特, 并将其制备在初态 $|\Theta\rangle = TH|0_L\rangle$ 上, 然后只需要横向地作用 CNOT 门以及对系统态进行测量, 最后

根据测量结果反馈给辅助比特决定是否横向地实现 SX 门就可以在辅助比特上实现量子态 $T|\psi_L\rangle$. 整个方案最大的困难点在于高保真度的初态 $|\Theta\rangle$ 的制备, 而且这一初态制备过程与系统演化无关, 所以可以使用后选择、蒸馏等方式. 布拉维 (Bravyi) 和基塔耶夫等^[122] 就最先提出了妙态蒸馏 (magic state distillation) 的方式得到高保真度的初态. 随后, 这一方案得到了更加深入研究和优化^[123,124]. 一般来说妙态制备的方式需要较多的资源, 比如对于初始态错误率为 5×10^{-5} 的表面码通过妙态蒸馏的方式实现逻辑错误率约 10^{-15} 的 T 门就需要将近 10^4 个物理比特^[125]. 因此, 如何进一步减少妙态制备的资源消耗是当前基于隐形传态的容错方案的研究重点之一^[126].

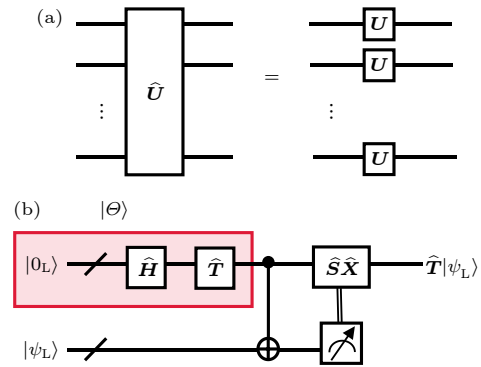


图 9 (a) 横向逻辑门操作示意图; (b) 单比特态传输的方式实现逻辑 T 门. 图中斜线表示此逻辑比特包括多个物理比特, 而图中红色阴影区域的线路等价于将辅助比特初态制备成 $|\Theta\rangle$, 红色区域外的门操作全是横向逻辑门

Fig. 9. (a) Schematic of the transversal logical operation; (b) logical T gate implemented through one-bit teleportation. The slash in the figure indicates that the logical qubit is encoded with several physical qubits, and the red shaded area is equivalent to initializing the auxiliary qubit as $|\Theta\rangle$. All logical gates outside the red shaded area are transversal.

4 纠错相关的量子控制技术

近年来, 为了在超导系统中实现各种纠错编码, 纠错相关的控制技术也得到了深入的研究与验证, 其中包括自动纠错 (autonomous QEC)、容错控制、任意么正演化以及任意量子信道模拟等.

首先是自动纠错技术. 一般而言, 基于测量的纠错 (measurement-based QEC) 方式需要先进行错误诊断, 即通过辅助比特实现对系统状态的测量, 并根据诊断结果, 再对系统执行相应的纠错操作. 以超导腔为例, 错误诊断的实现需要外围 FPGA

电路 (field programmable gate array circuit) 输入脉冲序列控制 transmon 比特与超导腔的相互作用, 然后对 transmon 状态进行测量并将测量结果反馈至 FPGA 电路进行逻辑判断, 之后才会对超导腔输入控制脉冲实现纠错操作. 从错误诊断到纠错操作期间, 系统会经历短时间的延迟, 因而增加了纠错操作的错误率. 而自动纠错过程在引入一个辅助比特的情况下只需要一步纠错操作即可完成, 即

$$\hat{U} |\psi_E\rangle |g\rangle = |\psi_L\rangle |e\rangle,$$

$$\hat{U} |\psi_L\rangle |g\rangle = |\psi_L\rangle |g\rangle,$$

其中 $|\psi_L\rangle, |\psi_E\rangle$ 分别是无噪声以及发生噪声之后的逻辑量子态, $|g\rangle, |e\rangle$ 分别是辅助比特的基态和激发态, 而 $\hat{U}$ 是对应的么正纠错操作, 等价于将系统的错误转移到辅助比特上, 只要在后续操作中将辅助比特复位, 纠错就可以重复进行. 使用这样的自动纠错技术有以下两个优点: 1) 可以将系统的错误诊断以及纠错操作进行结合, 避免系统经历较长时间的延迟; 2) 降低了反馈操作对硬件要求. 实验方面, 基于二项式编码的自动纠错技术已被验证^[101].

其次是容错控制技术. 容错控制技术的核心思想是通过系统哈密顿量的设计从物理层面实现对噪声的容忍. 例如, 最近在超导平台上展示的容错测量^[127]就是通过构造超导谐振腔与三能级辅助比特 ($|g\rangle, |e\rangle, |f\rangle$ 能级) 之间的相互作用 $H_{\text{int}} = \chi \mathbf{a}^\dagger \mathbf{a} (|e\rangle\langle e| + |f\rangle\langle f|)$ 实现的. 从该式可以看出, $|e\rangle, |f\rangle$ 能级与超导腔之间的耦合强度一致, 故在门操作或者在测量过程中辅助比特从 $|f\rangle$ 到 $|e\rangle$ 的噪声只会给腔带来至多一个全局相位的影响, 而从 $|e\rangle$ 到 $|g\rangle$ 的衰减属于高阶效应, 可以忽略, 因此可以实现对辅助比特中噪声的容忍. 而错误透明门则是通过交流斯塔克 (AC Stark shift) 效应构造使得逻辑和错误编码空间有相同的相位门演化的哈密顿量, 这样在发生错误并且错误被纠正之后, 相位门不受影响^[101]. 由于这些逻辑门操作的适用条件比较苛刻, 目前所能实现的容错逻辑门操作仍限于一些相位门操作, 是否能推广至通用逻辑门集合仍是一个开放问题.

然后是任意么正演化的实现. 从索洛韦-基塔耶夫 (Solovay-Kitaev) 定理可知, 任意的么正演化都可以被有限的门操作集合以任意的精度近似实现, 如 $\{H, S, \text{CNOT}, T\}$. 目前, 在超导量子系统中

也有两种方式可以较好地实现任意么正演化, 一种是通过位移操作加上 SNAP (selective number-dependent arbitrary phase) 门^[128–130], 另一种是梯度上升波形优化方法^[96,97]. 这两种方式避免了对门操作进行大量分解, 减少了电路的深度, 并且允许通过最优控制的方式在考虑噪声的情况下进行优化, 从而增加门操作保真度. SNAP 门是 $\hat{S}(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i\theta_n} |n\rangle\langle n|$, 而任意的么正演化可以被 SNAP 门和位移操作的交替序列很好地近似, 即 $U \approx D(\alpha_1) \hat{S}(\theta_1) \cdots D(\alpha_N) \hat{S}(\theta_N)$. 其中参数 α_n, θ_n 可以通过数值优化得到. 但 SNAP 门方法的门操作时间较长, 一定程度上限制了其保真度, 而梯度上升波形优化方法可以克服这一限制, 使得门操作时间尽可能少. 其本质原理是通过梯度下降算法直接数值优化哈密顿量 $H(t) = H_0 + \sum_n u_n(t) H_n$ 中的可控参数 $u_n(t)$, 使得优化得到的门操作与目标门操作之间的保真度接近 1.

最后是任意量子信道模拟. 对任意量子信道的模拟, 尤其是对开放系统的模拟在量子信息处理中具有非常重要的意义, 一方面, 许多量子操作, 如量子纠错、量子态制备等, 本身就需要使用开放系统相关的操作; 另一方面, 通过对噪声信道的模拟我们能够更好地理解系统的噪声. 具体来说, 就是任意的信道均可以表示成克劳斯形式 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{n=1}^N E_n \rho E_n^\dagger$, 其中 $\{E_n\}$ 需要满足 $\sum_{n=1}^N E_n^\dagger E_n = I$. 同一信道的不同的克劳斯算符之间可以相差一个么正变换 U , 即当 $\{F_n\}$ 满足 $F_n = \sum_j U_{nj} E_j$ 时, 其信道与 $\{E_n\}$ 所表示的信道一致. 不同的表示中最小的克劳斯算符的数量 r 被称为克劳斯信道的阶 (rank). 系统中任意的 r 阶的完全正定保迹 (completely positive and trace preserving, CPTP) 信道都可以通过引入系统与 r 维的辅助系统 (初态为 $|0_A\rangle\langle 0_A|$) 的联合么正演化 U , 并且对辅助系统进行 $|n_A\rangle\langle n_A|$ 测量来实现^[131–134], 也就是 $\mathcal{E}(\rho) = \sum_{n=1}^r E_n \rho E_n^\dagger = \sum_{n=1}^r \langle n_A | U \rho \otimes |0_A\rangle\langle 0_A| U^\dagger | n_A \rangle$, $E_n = \langle n_A | U | 0_A \rangle$. 该过程也可以通过重复使用一个二维的辅助比特 m 次来实现, 其中 $m = \lceil \log_2 r \rceil$, 即

$$\mathcal{E}(\rho) = \sum_{r_1, r_2, \dots, r_m} E_{m, r_m}^{(r_{m-1}, \dots, r_1)}, \dots,$$

$$E_{1, r_1} \rho E_{1, r_1}^\dagger, \dots, E_{m, r_m}^{(r_{m-1}, \dots, r_1)},$$

其中 $r_n \in \{0, 1\}$ 是第 n 步对辅助比特测量的结果,

$E_{n,r_n}^{(r_{n-1}, \dots, r_1)} = \langle r_n | U_n^{(r_{n-1}, \dots, r_1)} | 0 \rangle$ 是第 n 步演化的克劳森算符, 而 $U_n^{(r_{n-1}, \dots, r_1)}$ 是根据前面 $n-1$ 步辅助比特测量结果执行的么正演化. 实验上利用一个二能级量子比特的辅助在 $2\log_2 d$ 规模的电路深度下已成功地演示了 d 维量子系统的任意量子操作^[134].

5 近期超导系统量子纠错的应用

当前, 超导量子系统已经可以集成相当数量的物理比特并进行简单的逻辑编码, 但是纠错效果仍受限于比特数量、比特间的串扰以及控制精度. 现阶段量子纠错实验的主要目标仍是实现并超越盈亏平衡点, 为实现容错量子计算这一长远目标奠定基础. 除此之外, 我们也应积极探索量子纠错技术的应用潜力, 包括但不限于在量子度量学以及量子通信等方面的应用.

量子度量学是量子信息最重要的应用场景之一. 在散粒噪声作用下, 物理系统的探测精度只能达到散粒噪声极限, 即 $\propto 1/\sqrt{NT}$, 其中 N 是探测系统中平均粒子数, T 是探测的时间. 但是, 利用量子纠错技术可以保持量子态的相干特性从而提升探测的精度, 并可以达到海森伯 (Heisenberg) 极限^[135], 即精度 $\propto 1/(NT)$. 超导系统在实现高精度量子精密测量方面有着独特的优势: 一方面, 超导系统有着较强的量子调控能力, 可以对用于探测的量子态进行高保真度的制备、控制以及测量, 从而提升探测的精度. 另一方面, 超导系统自身就可以有效探测微波、磁场等物理信号. 更重要的是超导系统还能与其他物理系统进行较为高效的耦合, 包括光子、声子、轴子 (Axion)^[136] 等, 进而可用于多种物理信号的探测. 但是, 超导系统的探测精度对噪声十分敏感, 例如微波光子的自发辐射以及退相位等噪声, 因此如何克服系统噪声、提高测量精度是当前阶段最主要的挑战. 主要有以下两种解决方式: 1) 针对所测量的相互作用形式以及系统噪声类型选用特定编码的初态, 借助高维希尔伯特空间中对信号较敏感但是对噪声相对不敏感的子空间来提高测量精度. 2) 使用纠错技术, 借助高维度希尔伯特空间的冗余, 使得传感过程中的噪声得到及时纠正^[137–139]. 此外, 量子纠错方法还可以进一步拓展至多参数估计的量子度量学问题^[140].

量子网络、分布式量子计算等技术均依赖于量子信息在网络中各个节点之间的传输, 即需要实现

量子通信. 但是, 远距离的量子通信极易受到噪声的干扰, 导致信号随着距离的增加发生指数的衰减, 尤其是对于微波光子, 其在常温下受热激发噪声干扰严重, 因而在电缆中传输损耗极大. 因此, 需要使用量子中继 (quantum repeater) 来克服传输损耗, 即发送端和接收端只需要分别与中继端建立纠缠, 再利用中继端的局域操作就可以建立纠缠. 这一方案可以避免远距离的直接量子态传输, 但是需要大量的资源来进行纠缠态提纯 (purification), 此外还需要频繁的经典信息传输. 针对这一问题, 相关研究提出了两种改进方案: 1) 使用微波光波转换. 通信波段光子是远距离传输量子信息最好的载体, 其传输损耗低、抗干扰能力强, 故借助量子频率转换能充分利用两种光子的优点^[7]. 目前已经有相关实验对此进行验证^[141]. 2) 使用量子纠错技术. 当进行量子态传输的时候, 使用带有编码的逻辑比特 (如猫态编码^[102]) 进行传输, 接收端接收到之后, 只需要进行错误诊断以及纠错操作就可以得到高保真度的目标态. 这一方案避免了大量的纠缠态提纯以及频繁的经典通信, 因而具有较高的传输速率, 这也被称为第三代量子中继^[102,142].

纠错相关的技术可以作为量子错误缓解 (quantum error mitigation, QEM) 技术用于提高近期量子算法的效率. 当前, 我们正处于带噪声的中等规模的量子 (noisy intermediate-scale quantum, NISQ) 时代^[143], 还不能实现高质量的纠错和容错操作, 但是很有可能在某些实际问题中展示量子技术的优越性, 尤其是在处理经典量子混合算法上, 例如变分量子特征求解器 (variational quantum eigensolver, VQE)^[17] 和量子近似优化算法 (quantum approximate optimization algorithm, QAOA)^[16]. 相较于普适量子计算, 这些算法只需要使用深度较浅的量子线路并借助经典的计算机来分析量子线路的输出结果与输入参数的关系, 从而对线路进行反馈操作以及优化. 目前这些算法受到噪声的限制, 在计算的精度和效率上仍有很大的提升空间. 针对这一情况, 众多的错误缓解技术被提出^[144], 包括外推法 (extrapolation)、准概率分布法 (quasi-probability method)、量子子空间展开法 (quantum subspace expansion) 等. 这些技术不需要使用完整的量子纠错技术, 但是如果所求解的系统本身具有一定的对称性则可以使用纠错中的错误诊断技术来降低噪声的干扰, 这就是对称性检验 (symmetry

verification) 技术^[145]. 例如系统本身具有粒子数守恒、自旋守恒等对称性, 而噪声会破坏这一对称性, 从纠错的角度来看, 这意味着系统状态只分布于希尔伯特空间中的某个子空间, 而噪声将其投影至其它正交子空间中, 此时只要进行错误诊断再进行后选择处理异常结果即可. 目前已经有实验使用相关技术^[146]. 随着纠错技术的发展, 我们相信在不远的将来在使用小规模纠错码的情况下还可以进一步提升相关算法的效率.

6 讨论与展望

随着近年来相关操控技术的迅速发展, 超导量子计算平台的关键性能得到巨大的提升并成为目前最有希望实现高效量子计算的平台之一. 本文以超导平台为背景介绍了量子纠错方面的研究进展, 包括基于二能级架构以及基于玻色模式架构的纠错码, 还有纠错相关的控制技术. 在离子阱、光学以及中性原子等物理平台上, 量子纠错技术也取得了令人瞩目的进展, 虽然本文聚焦于超导系统的纠错进展, 但是相关内容也适用或者可以推广至这些物理平台.

如前文所述, 不管是二能级架构还是玻色模式架构的纠错技术的最大挑战都在于如何进一步增加参与编码的物理比特数目以及提高纠错操作的保真度. 短期来看, 超导系统需要提高对噪声的压制能力, 增加控制精度, 从而通过纠错达到盈亏平衡点, 并实现量子优势 (quantum advantage), 即在量子计算、量子模拟、量子度量学、量子通信等应用中通过纠错提升量子系统性能并超越经典系统. 中长期目标则是实现容错量子控制, 即通过扩大系统规模将逻辑错误压制到任意小. 为此, 我们认为需要从理论以及实验方面解决以下的问题:

第一, 如何优化利用高维度量子资源实现单个逻辑比特的量子纠错码?

维度是量子纠错中最重要的资源之一. 纠错的本质就是利用维度扩展带来的冗余对抗噪声的影响. 这包括以下三点: 参与编码的物理比特数目、物理比特本身的维度、相互作用的形式. 目前而言, 针对二能级类型的纠错码已经进行了较为深入的研究, 尤其是低维度的拓扑码, 包括表面码、颜色码等. 这些纠错码有着较高的阈值, 但同时所需要的物理比特数也是巨大的. 为此, 可以考虑通过增

加相互作用的形式 (如允许有限的且保真度较低的长程相互作用) 来减小资源消耗, 如三维、四维的颜色码或其他形式的非拓扑编码都需要进一步的研究. 此外, 还可能通过将比特编码成 qudit 的形式降低资源消耗, 但也需要进一步研究. 而对玻色编码而言, 对于单个模式的底层编码的研究已经较为成熟, 但是多个玻色模式如何进行拓展才能利用好玻色模式的潜力需要进一步的研究. 目前已经有相关的探索, 如文献 [46, 63–65, 66], 但是更好的方案以及具体的资源对比需要更深入的研究.

第二, 如何实现分布式量子纠错架构?

在实际超导系统中, 受限有限的冷却体积以及超导线路之间的串扰, 很难通过无限地增加短程相互作用的比特数目实现容错量子计算. 另一方面, 量子度量学、通信等应用需要在不同的量子节点之间进行纠缠分发以及量子态传输. 因此, 非常有必要深入研究分布式的量子纠错架构: 即需要考虑将整个量子系统分成若干个节点, 节点内部超导比特之间的相互作用较强, 可以实现高保真度的逻辑门操作, 节点之间利用飞行比特进行保真度较低远程相互作用, 并通过量子纠错、纠缠蒸馏等方式建立节点之间的高保真度量量子纠缠. 这就需要考虑如何构建节点内部的编码以及对应的纠错方案^[147].

第三, 如何实现混合量子编码转换?

实现不同物理平台之间的量子信息的传递和转化, 即实现混合量子编码的转换可以有效地利用不同平台的特性, 扬长避短: 一方面, 对于量子度量学方面的应用, 用于探测的物理系统不一定会具备较强的信息处理能力, 因而需要转换到超导等量子调控能力较强的系统以便进行后续的纠错测量等处理. 另一方面, 出于构建量子网络以及实现分布式量子计算的考虑, 相距较远的超导量子芯片之间必须借助飞行比特进行信息交换, 而微波光子容易与超导芯片进行耦合, 但其极易受到环境电磁噪声干扰, 在常温下受到损耗和热噪声的限制无法进行远距离传输. 因此, 需要将微波光子编码的量子态转换到其他物理载体上, 如通信波段光子, 其对于噪声的容忍能力较强, 支持远距离传输. 除了微波-光波转换外, 还可以进一步考虑微波-声波转换. 这不仅需要考虑并设计不同物理系统之间相互作用的形式, 还需要从编码层面综合考虑各系统适用的并且容易进行转换的量子纠错码.

第四, 如何实现对特定噪声免疫的量子控制?

量子系统的控制包括对量子态的操控以及测量. 控制性能的提升需要从两方面入手, 一个是从原理上免疫特定噪声, 另一个是从优化层面减少噪声影响. 对于二能级类型编码以及玻色模式编码都已经有了相关研究可以从原理上免疫一些噪声, 比方说通过设计系统相互作用实现的路径无关的 SNAP 门可以抵抗辅助比特的噪声以及实现容错测量^[127]. 相关研究需要深入考虑能否适用于更大规模的系统、能否推广至更为普适的门操作集合、能否进一步免疫主系统的高阶噪声. 从优化层面考虑减少噪声的影响依赖于噪声模型的精细化, 包括需要考虑连续形式的噪声, 如果引入相关的辅助系统, 还需要考虑辅助系统本身的不完美性. 考虑到现日益增长的物理比特数目, 一个实用的算法还必需尽可能减少优化的复杂度.

第五, 在考虑资源消耗的情况下是否有更切合实际的纠错性能评价指标?

实现量子纠错需要投入数量巨大的物理比特用于编码一个逻辑比特, 就短期而言我们更多地关注于逻辑比特是否突破盈亏平衡点以及能否进行拓展以证实量子纠错的效果. 但中长期而言, 可供选择的纠错方案逐渐增加, 我们需要评价各种纠错方案的优劣, 因而需要更切合实际的指标来衡量投入的资源与逻辑比特所能实现的信息处理能力. 这其中的资源包括空间、时间上的资源, 如所投入的物理比特数量以及实现逻辑门操作所需要的时间等.

第六, 近期如何实现带纠错的量子优势?

目前的量子系统正处于带噪声的中等规模的量子 (NISQ) 时代^[143], 在这期间, 量子系统可以集成五十到数百个带噪声的量子比特, 接近或者超过经典计算机所能模拟的极限, 就算在不考虑纠错的情况下, 也可能在量子退火 (quantum annealing)、量子深度学习 (quantum deep learning) 等方面实现量子优势. 而在未来一段时间内纠错的规模与质量仍将逐步上升, 虽然距离实现容错量子计算仍有一段距离, 但是可以预见在这个阶段纠错操作将逐渐抑制噪声, 使得在纠错的情况下量子系统在一些应用上具有进一步超越经典系统的性能.

第七, 如何在实验中探索并演示容错量子门?

当前达到盈亏平衡的量子纠错码还鲜有实验报道, 而实验上如何设计容错量子操作从而提高基于量子纠错码的量子操作的保真度是当前量子纠

错研究的一个重要的方向, 也是实现容错量子计算的必经之路. 最近几年这方面的理论和实验研究也得到了更多的关注, 人们对容错这一概念的理解也逐步突破传统横向量子门的局限. 通常, 容错这个词的出现伴随着阈值, 也就是当系统的错误率低于某一阈值时就可以通过扩展系统的维度来降低错误率. 然而, 立足于实验, 证实容错阈值在短期内十分具有挑战性. 我们应当进一步拓展容错的概念, 并在较小规模的系统中探索容错实验的一些基本特征并挖掘之前理论所忽视的实际问题^[148]. 例如, 近年来发展起来的旗帜比特 (flag qubit)^[149] 等方法可以在物理比特数目较少但比特之间连通性较好的前提下容错地实现通用逻辑门操作, 以及前面提到的基于噪声免疫实现路径无关^[150] 或者错误透明^[101] 的量子逻辑门.

最后, 我们预期量子纠错在理论方面能够与量子信息之外的其他领域结合, 进一步延拓量子纠错方法的理论内涵^[151]. 例如, 最近发现的量子纠错与凝聚态多体系统、高能物理中全息对偶原理的联系使理论物理学家们非常兴奋^[152,153]. 一方面, 可以借助超导量子系统中的纠错码来研究凝聚态中的拓扑物态, 包括自旋液体态^[84] 和分形子 (Fracton)^[154]. 另一方面, 也可以借助其他领域中的一些有趣的模型来构建新的量子纠错码或者加深对它们的理解, 例如 HaPPY 码^[153] 和基于含时横场伊辛 (Ising) 模型的实用量子纠错^[155].

参考文献

- [1] Shor P W 1994 *Proc. 35th Annu. Symp. Found. Comput. Sci.* (IEEE) Santa Fe, NM, USA, November 20–22, 1994 p124
- [2] Shor P W 1995 *Phys. Rev. A* **52** R2493
- [3] Kudra M, Biznárová J, Fadavi Roudsari A, Burnett J J, Niepce D, Gasparinetti S, Wickman B, Delsing P 2020 *Appl. Phys. Lett.* **117** 70601
- [4] Reagor M, Pfaff W, Axline C, et al. 2016 *Phys. Rev. B* **94** 14506
- [5] Romanenko A, Pilipenko R, Zorzetzi S, Frolov D, Awida M, Belomestnykh S, Posen S, Grassellino A 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 34032
- [6] Magnard P, Storz S, Kurpiers P, Schär J, Marxer F, Lütolf J, Walter T, Besse J C, Gabureac M, Reuer K, Akin A, Royer B, Blais A, Wallraff A 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260502
- [7] Xu X B, Wang W, Sun L, Zou C L 2022 *Chip* 100016
- [8] Acharya R, Aleiner I, Allen R, et al. 2022 *arXiv: 2207.06431 [quant-ph]*
- [9] Jurcevic P, Javadi-Abhari A, Bishop L S, et al. 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 25020

- [10] Zhu Q, Cao S, Chen F, et al. 2022 *Sci. Bull.* **67** 240
- [11] Guo Q, Cheng C, Li H, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 240502
- [12] Xu K, Zhang Y R, Sun Z H, et al. 2022 *Phys. Rev. Lett.* **128** 150501
- [13] Xu H, Zhang J, Han J, Li Z, Xue G, Liu W, Jin Y, Yu H 2021 arXiv: 2108.00942 [quant-ph]
- [14] Arute F, Arya K, Babbush R, et al. 2019 *Nature* **574** 505
- [15] Wu Y, Bao W S, Cao S, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 180501
- [16] Farhi E, Goldstone J, Gutmann S 2014 arXiv: 1411.4028 [quant-ph]
- [17] Peruzzo A, McClean J, Shadbolt P, Yung M H, Zhou X Q, Love P J, Aspuru-Guzik A, O'brien J L 2014 *Nat. Commun.* **5** 1
- [18] Wendin G 2017 *Rep. Prog. Phys.* **80** 106001
- [19] Blais A, Grimsco A L, Girvin S M, Wallraff A 2021 *Rev. Mod. Phys.* **93** 25005
- [20] Xu Y, Hua Z, Chen T, et al. 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 230503
- [21] Cai T Q, Han X Y, Wu Y K, Ma Y L, Wang J H, Wang Z L, Zhang H Y, Wang H Y, Song Y P, Duan L M 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 060505
- [22] Tan X, Zhang D W, Zheng W, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 017702
- [23] Ni Z, Li S, Zhang L, et al. 2022 *Phys. Rev. Lett.* **129** 040502
- [24] Marques J F, Varbanov B M, Moreira M S, et al. 2022 *Nat. Phys.* **18** 80
- [25] Riste D, Poletto S, Huang M Z, Bruno A, Vesterinen V, Saira O P, DiCarlo L 2015 *Nat. Commun.* **6** 1
- [26] Yan F, Krantz P, Sung Y, Kjaergaard M, Campbell D L, Orlando T P, Gustavsson S, Oliver W D 2018 *Phys. Rev. Appl.* **10** 054062
- [27] Mundada P, Zhang G Y, Hazard T, Houck A 2019 *Phys. Rev. Appl.* **12** 54023
- [28] Sung Y, Ding L, Braumüller J, Vepsäläinen A, Kannan B, Kjaergaard M, Greene A, Samach G O, McNally C, Kim D, Melville A, Niedzielski B M, Schwartz M E, Yoder J L, Orlando T P, Gustavsson S, Oliver W D 2021 *Phys. Rev. X* **11** 21058
- [29] Li X, Cai T, Yan H, Wang Z, Pan X, Ma Y, Cai W, Han J, Hua Z, Han X, Wu Y, Zhang H, Wang H, Song Y P, Duan L M, Sun L Y 2020 *Phys. Rev. Appl.* **14** 24070
- [30] Song C, Xu K, Li H, Zhang Y R, Zhang X, Liu W, Guo Q, Wang Z, Ren W, Hao J, Feng H, Fan H, Zheng D, Wang D W, Wang H, Zhu S Y 2019 *Science* **365** 574
- [31] Zhao Y, Ye Y, Huang H L, et al. 2021 arXiv: 2112.13505 [quant-ph]
- [32] Negirneac V, Ali H, Muthusubramanian N, Battistel F, Sagastizabal R, Moreira M S, Marques J F, Vlothuizen W J, Beekman M, Zachariadis C, Haider N, Bruno A, DiCarlo L 2021 *Phys. Rev. Lett.* **126** 220502
- [33] Kjaergaard M, Schwartz M E, Greene A, et al 2020 arXiv: 2001.08838 [quant-ph]
- [34] Kandala A, Wei K X, Srinivasan S, Magesan E, Carnevale S, Keefe G A, Klaus D, Dial O, McKay D C 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 130501
- [35] Blais A, Huang R S, Wallraff A, Girvin S M, Schoelkopf R J 2004 *Phys. Rev. A* **69** 62320
- [36] Koch J, Yu T M, Gambetta J, Houck A A, Schuster D I, Majer J, Blais A, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2007 *Phys. Rev. A* **76** 042319
- [37] Houck A A, Schreier J A, Johnson B R, Chow J M, Koch J, Gambetta J M, Schuster D I, Frunzio L, Devoret M H, Girvin S M, Schoelkopf R J 2008 *Phys. Rev. Lett.* **101** 80502
- [38] Reed M D, Johnson B R, Houck A A, DiCarlo L, Chow J M, Schuster D I, Frunzio L, Schoelkopf R J 2010 *Appl. Phys. Lett.* **9** 6
- [39] Jeffrey E, Sank D, Mutus J Y, White T C, Kelly J, Barends R, Chen Y, Chen Z, Chiaro B, Dunsworth A, Megrant A, O'Malley P J, Neill C, Roushan P, Vainsencher A, Wenner J, Cleland A N, Martinis J M 2014 *Phys. Rev. Lett.* **112** 190504
- [40] Yurke B, Corruccini L R, Kaminsky P G, Rupp L W, Smith A D, Silver A H, Simon R W, Whittaker E A 1989 *Phys. Rev. A* **39** 2519
- [41] Siddiqi I, Vijay R, Pierre F, Wilson C M, Metcalfe M, Rigetti C, Frunzio L, Devoret M H 2004 *Phys. Rev. Lett.* **93** 207002
- [42] Castellanos-Beltran M A, Lehnert K W 2007 *Appl. Phys. Lett.* **91** 83509
- [43] Walter T, Kurpiers P, Gasparinetti S, et al. 2017 *Phys. Rev. Appl.* **7** 054020
- [44] Reagor M, Paik H, Catelani G, et al. 2013 *Appl. Phys. Lett.* **102** 192604
- [45] Xu Y, Ma Y, Cai W, et al. 2020 *Phys. Rev. Lett.* **124** 120501
- [46] Chamberland C, Noh K, Arrangoiz-Arriola P, Campbell E T, Hann C T, Iverson J, Putterman H, Bohdanowicz T C, Flammia S T, Keller A, Refael G, Preskill J, Jiang L, Safavi-Naeini A H, Painter O, Brandão F G S L 2022 *PRX Quantum* **3** 10329
- [47] Chu Y, Gröblacher S 2020 *Appl. Phys. Lett.* **117** 150503
- [48] Place A P M, Rodgers L V H, Mundada P, et al. 2021 *Nat. Commun.* **12** 1779
- [49] Wang C, Li X, Xu H, et al. 2021 arXiv: 2105.09890 [quant-ph]
- [50] Bao F, Deng H, Ding D, et al. 2021 arXiv: 2111.13504 [quant-ph]
- [51] Nuerbolati W, Han Z, Chu J, Zhou Y, Tan X, Yu Y, Liu S, Yan F 2022 *Appl. Phys. Lett.* **120** 174001
- [52] Zhao P, Linghu K, Li Z, Xu P, Wang R, Xue G, Jin Y, Yu H 2022 *PRX Quantum* **3** 20301
- [53] Joshi A, Noh K, Gao Y Y 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 33001
- [54] Shor P W 1996 *Proc. 37th Conf. Found. Comput. Sci. (IEEE) Burlington, VT, USA, October 14-16 1996*, p56
- [55] Gottesman D 2009 arXiv: 0904.2557 [quant-ph]
- [56] Knill E, Laflamme R 1997 *Phys. Rev. A* **55** 900
- [57] Nielsen M A, Chuang I 2010 *Quantum Computation and Quantum Information* (New York: Cambridge University Press) pp1-12
- [58] Gottesman D 1996 *Phys. Rev. A* **54** 1862
- [59] Michael M H, Silveri M, Brierley R T, Albert V V, Salmilehto J, Jiang L, Girvin S M 2016 *Phys. Rev. X* **6** 31006
- [60] Leghtas Z, Kirchmair G, Vlastakis B, Schoelkopf R J, Devoret M H, Mirrahimi M 2013 *Phys. Rev. Lett.* **111** 120501
- [61] Mirrahimi M, Leghtas Z, Albert V V, Touzard S, Schoelkopf R J, Jiang L, Devoret M H 2014 *New J. Phys.* **16** 45014
- [62] Gottesman D, Kitaev A, Preskill J 2001 *Phys. Rev. A* **64** 12310
- [63] Noh K, Chamberland C, Brandão F G S L 2022 *PRX Quantum* **3** 10315
- [64] Vuillot C, Asasi H, Wang Y, Pryadko L P, Terhal B M 2019 *Phys. Rev. A* **99** 32344
- [65] Guillaud J, Mirrahimi M 2019 *Phys. Rev. X* **9** 041053

- [66] Darmawan A S, Brown B J, Grimsom A L, Tuckett D K, Puri S 2021 *PRX Quantum* **2** 30345
- [67] Kapit E 2017 *Quantum Sci. Technol.* **2** 33002
- [68] Reed M D, DiCarlo L, Nigg S E, Sun L, Frunzio L, Girvin S M, Schoelkopf R J 2012 *Nature* **482** 382
- [69] Kelly J, Barends R, Fowler A G, et al. 2015 *Nature* **519** 66
- [70] Cramer J, Kalb N, Rol M A, Hensen B, Blok M S, Markham M, Twitchen D J, Hanson R, Taminiau T H 2016 *Nat. Commun.* **7** 1
- [71] Takita M, Cross A W, Córcoles A D, Chow J M, Gambetta J M 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 180501
- [72] Wootton J R, Loss D 2018 *Phys. Rev. A* **97** 52313
- [73] Chen Z, Satzinger K J, Atalaya J, et al. 2021 *Nature* **595** 383
- [74] Kitaev A Y 1997 *Russ. Math. Surv.* **52** 1191
- [75] Bravyi S B, Kitaev A Y 1998 arXiv: quant-ph/9811052 [quant-ph]
- [76] Fowler A G, Mariantoni M, Martinis J M, Cleland A N 2012 *Phys. Rev. A* **86** 32324
- [77] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2006 *Ann. Phys.* **321** 2242
- [78] Raussendorf R, Harrington J 2007 *Phys. Rev. Lett.* **98** 190504
- [79] Raussendorf R, Harrington J, Goyal K 2007 *New J. Phys.* **9** 199
- [80] Fowler A G, Whiteside A C, McInnes A L, Rabbani A 2012 *Phys. Rev. X* **2** 41003
- [81] Dennis E, Kitaev A, Landahl A, Preskill J 2002 *J. Math. Phys.* **43** 4452
- [82] Knill E 2005 *Nature* **434** 39
- [83] Zeng B, Chen X, Zhou D L, Wen X G 2019 *Quantum Information Meets Quantum Matter* (New York: Springer) pp3-361
- [84] Satzinger K J, Liu Y J, Smith A, Knapp C, Newman M, Jones C, Chen Z, Quintana C, Mi X, Dunswoth A, Others 2021 *Science* **374** 1237
- [85] Liu Y J, Shtengel K, Smith A, Pollmann F 2021 arXiv: 2110.02020 [quant-ph]
- [86] Horsman C, Fowler A G, Devitt S, Van Meter R 2012 *New J. Phys.* **14** 123011
- [87] Bonilla Ataides J P, Tuckett D K, Bartlett S D, Flammia S T, Brown B J 2021 *Nat. Commun.* **12** 1
- [88] Bombin H, Martin-Delgado M A 2006 *Phys. Rev. Lett.* **97** 180501
- [89] Fowler A G 2011 *Phys. Rev. A* **83** 42310
- [90] Willsch D, Willsch M, Jin F, De Raedt H, Michielsen K 2018 *Phys. Rev. A* **98** 52348
- [91] Harper R, Flammia S T 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 80504
- [92] Gong M, Yuan X, Wang S, et al. 2022 *Natl. Sci. Rev.* **9** nwab011
- [93] Andersen C K, Remm A, Lazar S, Krinner S, Lacroix N, Norris G J, Gabureac M, Eichler C, Wallraff A 2020 *Nat. Phys.* **16** 875
- [94] Krinner S, Lacroix N, Remm A, et al. 2021 arXiv: 2112.03708 [quant-ph]
- [95] Sundaresan N, Yoder T J, Kim Y, Li M, Chen E H, Harper G, Thorbeck T, Cross A W, Córcoles A D, Takita M 2022 arXiv: 2203.07205 [quant-ph]
- [96] Khaneja N, Reiss T, Kehlet C, Schulte-Herbrüggen T, Glaser S J 2005 *J. Magn. Reson.* **172** 296
- [97] De Fouquieres P, Schirmer S G, Glaser S J, Kuprov I 2011 *J. Magn. Reson.* **212** 412
- [98] Hu L, Ma Y, Cai W, et al. 2019 *Nat. Phys.* **15** 503
- [99] Gao Y Y, Lester B J, Chou K S, Frunzio L, Devoret M H, Jiang L, Girvin S M, Schoelkopf R J 2019 *Nature* **566** 509
- [100] Chou K S, Blumoff J Z, Wang C S, Reinhold P C, Axline C J, Gao Y Y, Frunzio L, Devoret M H, Jiang L, Schoelkopf R J 2018 *Nature* **561** 368
- [101] Ma Y, Xu Y, Mu X, et al. 2020 *Nat. Phys.* **16** 827
- [102] Li L, Zou C L, Albert V V, Muralidharan S, Girvin S M, Jiang L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **119** 30502
- [103] Puri S, Boutin S, Blais A 2017 *npj Quantum Inf.* **3** 1
- [104] Bourassa J, Beaudoin F, Gambetta J M, Blais A 2012 *Phys. Rev. A* **86** 13814
- [105] Grimsom A L, Combes J, Baragiola B Q 2020 *Phys. Rev. X* **10** 11058
- [106] Ofek N, Petrenko A, Heeres R, et al. 2016 *Nature* **536** 441
- [107] Heeres R W, Reinhold P, Ofek N, Frunzio L, Jiang L, Devoret M H, Schoelkopf R J 2017 *Nat. Commun.* **8** 94
- [108] Gertler J M, Baker B, Li J, Shirol S, Koch J, Wang C 2021 *Nature* **590** 243
- [109] Touzard S, Grimm A, Leghtas Z, et al. 2018 *Phys. Rev. X* **8** 21005
- [110] Lescanne R, Villiers M, Peronnin T, Sarlette A, Delbecq M, Huard B, Kontos T, Mirrahimi M, Leghtas Z 2020 *Nat. Phys.* **16** 509
- [111] Grimm A, Frattini N E, Puri S, Mundhada S O, Touzard S, Mirrahimi M, Girvin S M, Shankar S, Devoret M H 2020 *Nature* **584** 205
- [112] Albert V V, Noh K, Duivenvoorden K, et al. 2018 *Phys. Rev. A* **97** 32346
- [113] Noh K, Albert V V, Jiang L 2019 *IEEE Trans. Inf. Theory* **65** 2563
- [114] Flühmann C, Nguyen T L, Marinelli M, Negnevitsky V, Mehta K, Home J P 2019 *Nature* **566** 513
- [115] de Neeve B, Nguyen T L, Behrle T, Home J P 2022 *Nat. Phys.* **18** 296
- [116] Campagne-Ibarcq P, Eickbusch A, Touzard S, et al. 2020 *Nature* **584** 368
- [117] Terhal B M, Weigand D 2016 *Phys. Rev. A* **93** 12315
- [118] Royer B, Singh S, Girvin S M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 260509
- [119] Eastin B, Knill E 2009 *Phys. Rev. Lett.* **102** 110502
- [120] Gottesman D, Chuang I L 1999 *Nature* **402** 390
- [121] Zhou X, Leung D W, Chuang I L 2000 *Phys. Rev. A* **62** 52316
- [122] Bravyi S, Kitaev A 2005 *Phys. Rev. A* **71** 22316
- [123] Meier A M, Eastin B, Knill E 2012 arXiv: 1204.4221 [quant-ph]
- [124] Chamberland C, Cross A W 2019 *Quantum* **3** 143
- [125] Chamberland C, Jochym-O'Connor T, Laflamme R 2017 *Phys. Rev. A* **95** 22313
- [126] Campbell E T, Terhal B M, Vuillot C 2017 *Nature* **549** 172
- [127] Rosenblum S, Reinhold P, Mirrahimi M, Jiang L, Frunzio L, Schoelkopf R J 2018 *Science* **361** 266
- [128] Krastanov S, Albert V V, Shen C, Zou C L, Heeres R W, Vlastakis B, Schoelkopf R J, Jiang L 2015 *Phys. Rev. A* **92** 40303
- [129] Heeres R W, Vlastakis B, Holland E, Krastanov S, Albert V V, Frunzio L, Jiang L, Schoelkopf R J 2015 *Phys. Rev. Lett.* **115** 137002
- [130] Wang W, Hu L, Xu Y, Liu K, Ma Y, Zheng S B, Vijay R, Song Y P, Duan L M, Sun L 2017 *Phys. Rev. Lett.* **118** 223604
- [131] Lloyd S, Viola L 2001 *Phys. Rev. A* **65** 10101
- [132] Shen C, Noh K, Albert V V, Krastanov S, Devoret M H,

- Schoelkopf R J, Girvin S M, Jiang L 2017 *Phys. Rev. B* **95** 134501
- [133] Hu L, Mu X, Cai W, Ma Y, Xu Y, Wang H, Song Y, Zou C L, Sun L 2018 *Sci. Bull.* **63** 1551
- [134] Cai W, Han J, Hu L, et al. 2021 *Phys. Rev. Lett.* **127** 90504
- [135] Giovannetti V, Lloyd S, Maccone L 2011 *Nat. Photonics* **5** 222
- [136] Backes K M, Palken D A, Kenany S A, et al. 2021 *Nature* **590** 238
- [137] Wang W, Wu Y, Ma Y, Cai W, Hu L, Mu X, Xu Y, Chen Z J, Wang H, Song Y P, Yuan H, Zou C L, Duan L M, Sun L 2019 *Nat. Commun.* **10** 4382
- [138] Wang W, Chen Z J, Liu X, et al. 2022 *Nat. Commun.* **13** 1
- [139] Zhou S, Zhang M, Preskill J, Jiang L 2018 *Nat. Commun.* **9** 1
- [140] Górecki W, Zhou S, Jiang L, Demkowicz-Dobrzański R 2020 *Quantum* **4** 288
- [141] Pfaff W, Axline C J, Burkhardt L D, Vool U, Reinhold P, Frunzio L, Jiang L, Devoret M H, Schoelkopf R J 2017 *Nat. Phys.* **13** 882
- [142] Muralidharan S, Li L, Kim J, Lütkenhaus N, Lukin M D, Jiang L 2016 *Sci. Rep.* **6** 1
- [143] Preskill J 2018 *Quantum* **2** 79
- [144] Endo S, Cai Z, Benjamin S C, Yuan X 2021 *J. Phys. Soc. Jpn.* **90** 32001
- [145] McArdle S, Yuan X, Benjamin S 2019 *Phys. Rev. Lett.* **122** 180501
- [146] Koh J M, Tai T, Lee C H 2022 arXiv: 2207.14322 [cond-mat.str-el]
- [147] Li Y, Benjamin S C 2016 *Phys. Rev. A* **94** 42303
- [148] Gottesman D 2016 arXiv: 1610.03507 [quant-ph]
- [149] Chao R, Reichardt B W 2018 *Phys. Rev. Lett.* **121** 50502
- [150] Ma W L, Zhang M, Wong Y, Noh K, Rosenblum S, Reinhold P, Schoelkopf R J, Jiang L 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 110503
- [151] Jahn A, Eisert J 2021 *Quantum Sci. Technol.* **6** 33002
- [152] Almheiri A, Dong X, Harlow D 2015 *J. High Energy Phys.* **2015(4)** 1
- [153] Pastawski F, Yoshida B, Harlow D, Preskill J 2015 *J. High Energy Phys.* **2015(6)** 1
- [154] Vijay S, Haah J, Fu L 2016 *Phys. Rev. B* **94** 235157
- [155] Hong Y, Young J T, Kaufman A M, Lucas A 2022 arXiv: 2205.12998 [quant-ph]

SPECIAL TOPIC —Recent advances in hardware, algorithms and software of quantum computers

Advances in quantum error correction based on superconducting quantum systems^{*}

Chen Zi-Jie¹⁾ Pan Xiao-Xuan²⁾ Hua Zi-Yue²⁾ Wang Wei-Ting²⁾
Ma Yu-Wei²⁾ Li Ming¹⁾ Zou Xu-Bo¹⁾ Sun Lu-Yan^{2)†} Zou Chang-Ling^{1)‡}

1) (*Key Laboratory of Quantum Information, Chinese Academy of Sciences,
University of Science and Technology of China, Hefei 230026, China*)

2) (*Center for Quantum Information, Institute for Interdisciplinary Information Sciences,
Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 19 September 2022; revised manuscript received 10 October 2022)

Abstract

Information processing technology based on the basic principle of quantum mechanics shows great potential applications in computing, sensing and other fields, and is far superior to classical technology. With the advance of experimental technology, quantum control technology develops rapidly. Compared with other quantum information processing platforms, the superconducting system based on solid materials has the advantages of accurate quantum controllability, excellent quantum coherence and the potential for large-scale integration. Therefore, superconducting quantum system is one of the most promising platforms for quantum information processing. The existing superconducting circuits, which can integrate about one hundred qubits, have already demonstrated the advantages of quantum systems, but further development is limited by system noise. In order to break through this bottleneck, quantum error correction technology, which is developed from the classical error correction technology, has attracted extensive attention. Here, we mainly summarize the research progress of quantum error correction in superconducting quantum systems including the basic principles of superconducting quantum systems, the quantum error correction codes, the related control techniques and the recent applications. At the end of the article, we summarize seven key problems in this field.

Keywords: quantum error correction, superconducting circuits, fault-tolerant quantum computation, bosonic codes

PACS: 03.67.Pp, 85.25.-j, 03.67.Lx, 89.70.Kn

DOI: 10.7498/aps.71.20221824

^{*} Project supported by the National Key R&D Program of China (Grant No. 2017YFA0304303), the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 92165209, 11925404, 11874342, 11922411, 12061131011), and the China Postdoctoral Science Foundation (Grant No. BX2021167).

[†] Corresponding author. E-mail: lyansun@mail.tsinghua.edu.cn

[‡] Corresponding author. E-mail: clzou321@ustc.edu.cn

基于超导量子系统的量子纠错研究进展

陈子杰 潘啸轩 华子越 王伟婷 马雨玮 李明 邹旭波 孙麓岩 邹长铃

Advances in quantum error correction based on superconducting quantum systems

Chen Zi-Jie Pan Xiao-Xuan Hua Zi-Yue Wang Wei-Ting Ma Yu-Wei Li Ming Zou Xu-Bo Sun Lu-Yan Zou Chang-Ling

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 71, 240305 (2022) DOI: 10.7498/aps.71.20221824

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.71.20221824>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

连续变量量子计算和量子纠错研究进展

Research advances in continuous-variable quantum computation and quantum error correction

物理学报. 2022, 71(16): 160305 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220635>

基于光量子态避错及容错传输的量子通信

Quantum error rejection and fault tolerant quantum communication

物理学报. 2018, 67(13): 130301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180598>

基于测量的量子计算研究进展

Research progress of measurement-based quantum computation

物理学报. 2021, 70(21): 210301 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210923>

利用超导量子电路模拟拓扑量子材料

Topological quantum material simulated with superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(22): 220302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20181857>

基于金刚石氮-空位色心自旋系综与超导量子电路混合系统的量子节点纠缠

Entanglement of quantum node based on hybrid system of diamond nitrogen-vacancy center spin ensembles and superconducting quantum circuits

物理学报. 2018, 67(7): 070302 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172634>

新型超导量子比特及量子物理问题的研究

Novel superconducting qubits and quantum physics

物理学报. 2018, 67(22): 228501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180845>