量子态在两体和 k 体下基于 min 相对熵的量子关联测度*

李俊青 黄丽† 崔世杰 王银珠

(太原科技大学, 应用科学学院, 太原 030024)

(2022 年 6 月 30 日收到; 2022 年 9 月 9 日收到修改稿)

量子关联作为量子力学的奇特资源已经被应用在很多方面, 相对熵作为研究量子关联的关键概念之一, 总是被用来度量物理系统状态所包含的不确定性. 本文在已知 min 相对熵的一些基本性质的前提下, 分别提出了在两体和 k 体分划下基于 min 相对熵的关联测度的定义. 除此之外, 本文证明了该定义满足量子关联测度的一些基本性质, 包括非负性、在酉算子操作下保持不变性以及在完全正的保迹线性映射 (CPTP) 下的单调性. 介绍了量子信道的概念, 并且讨论了量子信道对 k 体分划下基于 min 相对熵的关联测度的影响. 通过提出新的关联测度以及证明量子信道对该测度的影响, 能够更好刻画物理系统状态所包含的不确定性.

关键词: 关联测度, 相对熵, k 体分划, 保迹映射, 量子系统

PACS: 03.65.–w **DOI:** 10.7498/aps.72.20221293

1 引 言

量子关联[1–8] 作为量子计算和量子信息中一种非常重要的物理资源, 通过对量子关联的研究, 能更清楚地刻画蕴含在量子态之间的非经典关联特性, 以及复合量子系统各子系统之间的关联程度. 量子纠缠作为量子关联中的重要组成部分, 首先, 关于量子纠缠态的判别问题已经提出了许多有用的纠缠判据: 约化判据[9] 、重排判据[10]、控制判据[11]、纠缠 Witness 判据[12] 等; 其次, 在刻画量子态之间的纠缠程度方面, 提出了许多纠缠测度: 形成纠缠测度[13]、concurrence 纠缠测度[14]、相对熵纠缠测度[15] 等. 但量子关联远不止纠缠, 为了更好地刻画量子态之间的关联程度, 已经提出了许多定义良好的关联测度, 如累积关联测度[16], 量子失协关联测度[17], 基于 Tsallis 熵的量子关联测度[18] 等. 相对熵作为研究量子关联非常重要的一个物理量, 目前, 人们提出了越来越多的基于相对熵的关联测度, 以便更清楚地刻画蕴含在量子态之间的关联特性以及刻画复合量子系统各子系统之间的关联程度.

在 2008 年, Datta[19] 提出了 min 相对熵的定义, 其定义如下:

$$D_{\min}(\rho \parallel \sigma) = -\log \mathrm{Tr}(\varPi_\rho \sigma),$$

其中, $\rho \geqslant 0, \sigma \geqslant 0, \mathrm{Tr}\rho \leqslant 1$, $\varPi_\rho = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k}(\varPi_{i_1}\otimes \varPi_{i_2}\otimes\cdots\otimes\varPi_{i_k})\rho(\varPi_{i_1}\otimes\varPi_{i_2}\otimes\cdots\otimes\varPi_{i_k})$, $\varPi_{i_j}$表示对第 i_j 个子系统上的量子操作, min 相对熵的性质如下:

1) 非负性. $D_{\min}(\rho \parallel \sigma) \geqslant 0, D_{\min}(\rho \parallel \sigma) = 0 \Leftrightarrow \rho = \sigma$.

2) 酉不变性. 对任意酉算子 U, $D_{\min}(\rho \parallel \sigma) = D_{\min}(U\rho U^\dagger \parallel U\sigma U^\dagger)$.

3) 在完全正的保迹映射 (CPTP) 下量子相对

* 山西省自然科学基金 (批准号: 201901D111254) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: 16688789@qq.com

熵保持单调性. 对任意满足 CPTP 的算子Ψ, 都有: $D_{\min}(\rho \parallel \sigma) \geqslant D_{\min}(\Psi(\rho) \parallel \Psi(\sigma))$.

4) 联合凸性. $D_{\min}\left(\sum_i p_i\rho_i \parallel \sum_i p_i\sigma_i\right) \leqslant \sum_i p_i D_{\min}(\rho_i \parallel \sigma_i)$, ρ_i, σ_i为任意量子态, $\sum_i p_i = 1$.

目前提出的量子关联测度比较少, 因此, 提出一个新的两体复合量子系统下的关联测度以及将关联测度由两体推到 k 体分划下是非常有意义的. 本文主要考虑在两体复合系统和 k 体分划下, 分别给出基于 min 相对熵的两体和 k 体分划下关联测度的定义, 并且证明了其满足量子关联测度的一些必要性质. 近几年, 虽然量子信道的应用越来越广泛, 但是并没有将量子信道与量子关联测度联系起来, 本文将量子信道与量子关联测度联系起来, 进而给出了量子信道对 k 体分划下的关联测度$E_k(\rho \parallel \sigma)$的影响.

2 基于两体和 k 体分划下基于 min 相对熵的关联测度

给出两体和 k 体分划下关联测度的定义之前, 首先提出一些基本定义.

定义 2.1 (完全乘积态定义) 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H_i < +\infty$, $S(H)$表示H上全体密度算子组成的集合, $\rho \in S(H)$, 如果:

$$\rho = \rho_1 \otimes \rho_2 \otimes \cdots \otimes \rho_m, \tag{1}$$

其中, $\rho_i = \mathrm{Tr}_{\overline{H_i}}(\rho)$, 则称$\rho$为完全乘积态, 记为$\rho \in S_{\text{F-P}}(H)$.

定义 2.2[20] (k 体分划的定义) 令 $H = \bigotimes_{i=1}^{n} H_i$, 其中$H_i$为第$i$子系统对应的 Hilbert 空间, $\{1,2,\cdots,k\}$是 Hilbert 空间H的一个集合, $\{A_k\}$表示$\{1,2,\cdots,k\}$的子集. 通过对集合$\{1,2,\cdots,k\}$进行 k 体分划, 得到$A_1|A_2|\cdots|A_k$, 并把其称作 Hilbert 空间H的一个 k 体分划, 当其满足下列条件:

1) $A_i \cap A_j = \emptyset\,(i,j \in \{1,2,\cdots,k\},\ i \neq j)$ 且 $\bigcup_{i=1}^{k} A_i = \{1,2,\cdots,n\}$.

2) $H^{A_1} \otimes H^{A_2} \otimes \cdots \otimes H^{A_k} = H$, 其中 $H^{A_i} = \bigotimes_{j=1}^{k_i} H_{n_{ij}}$, $A_i = \{n_{i1}, n_{i2}, \cdots, n_{ik_i}\}$且 $n_{i1} < n_{i2} < \cdots < n_{ik_i}$.

定义 2.3 (k 经典态定义) 设 $H = H_1 \otimes H_2 \otimes \cdots \otimes H_m$, $\dim H < +\infty$, $S(H)$表示H中所有量子态组成的集合, $\rho \in S(H)$, $A_1|A_2|\cdots|A_k$是 Hilbert 空间H的一个 k 体分划, 若存在$\{\varPi_{i_1}^{A_1}\}$, $\{\varPi_{i_2}^{A_2}\}$, $\{\varPi_{i_3}^{A_3}\}$, $\cdots$, $\{\varPi_{i_k}^{A_k}\}$分别是子系统H_{A_1}, $H_{A_2}, \cdots, H_{A_K}$上的正交投影组成的完备的投影测量集, 对于任意的 k 体分划$\mathbb{A}$, 记:

$$\varPi^{\mathbb{A}}(\rho) = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k} \left(\varPi_{i_1}^{A_1} \otimes \varPi_{i_2}^{A_2} \otimes \cdots \otimes \varPi_{i_k}^{A_k}\right) \times \rho \left(\varPi_{i_1}^{A_1} \otimes \varPi_{i_2}^{A_2} \otimes \cdots \otimes \varPi_{i_k}^{A_k}\right), \tag{2}$$

如果$\varPi^{\mathbb{A}}(\rho) = \rho$, 则称$\rho$为 k 经典态, 进而$\rho$可以被表示为

$$\rho = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_k} p_{i_1,i_2,\cdots,i_k} \varPi_{i_1}^{A_1} \otimes \varPi_{i_2}^{A_2} \otimes \cdots \otimes \varPi_{i_k}^{A_k}, \tag{3}$$

其中$\{p_{i_1,i_2,\cdots,i_k}\}$是概率分布. 当 $k = m$ 时, $\varPi_\rho = \sum_{i_1,i_2,\cdots,i_m} (\varPi_{i_1} \otimes \varPi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \varPi_{i_m})\rho(\varPi_{i_1} \otimes \varPi_{i_2} \otimes \cdots \otimes \varPi_{i_m})$, 若$\varPi_\rho = \rho$, 则称$\rho$为完全经典态.

本文首先考虑两体复合量子系统, 设 $H = H_1 \otimes H_2$, $\dim H < +\infty$, 其中H_1, H_2分别是与量子系统 1, 2 相对应的可分复 Hilbert 空间. 记$S(H)$表示H上全体密度算子组成的集合, $S_{\text{F-P}}(H)$表示H中所有完全乘积态组成的集合, $S_{\text{F-C}}(H)$表示H中所有完全经典态组成的集合.

定义 2.4 $H = H_1 \otimes H_2$, $\dim H < +\infty$, $\rho \in S(H)$, ρ相对于 min 相对熵的关联测度定义为

$$\begin{aligned} E(\rho \parallel \sigma) &= \min_{\sigma \in S_{\text{F-P}}} D_{\min}(\rho \parallel \sigma) \\ &= \min_{\sigma \in S_{\text{F-P}}} -\log \mathrm{Tr}(\varPi_\rho \sigma). \end{aligned} \tag{4}$$

其中, $\varPi_\rho$表示对ρ进行投影后的量子态.

定理 2.5 $H = H_1 \otimes H_2$, $\dim H < +\infty$, $\rho \in S(H)$, U_1, U_2分别是H_1, H_2上的酉算子, 有

$$E(\rho \parallel \sigma) = E(U\rho U^\dagger \parallel U\sigma U^\dagger).$$

证明 已知酉变换在迹操作中保持不变, 即:

$$\begin{aligned} &E(U\rho U^\dagger \parallel U\sigma U^\dagger) \\ =\ &\min_{\sigma \in S_{\text{F-P}}} D_{\min}(U\rho U^\dagger \parallel U\sigma U^\dagger) \\ =\ &\min_{\sigma \in S_{\text{F-P}}} -\log \mathrm{Tr}(\varPi_{U\rho U^\dagger} U\sigma U^\dagger) \\ =\ &\min_{\sigma \in S_{\text{F-P}}} -\log \mathrm{Tr}(\varPi_\rho \sigma) \\ =\ &\min_{\sigma \in S_{\text{F-P}}} D_{\min}(\rho \parallel \sigma) = E(\rho \parallel \sigma). \end{aligned}$$

引理 2.6[19] 设$\rho, \sigma \in S(H)$, min 相对熵是非负的, 即$D_{\min}(\rho \parallel \sigma) \geqslant 0$, $\rho = \sigma$当且仅当

$$D_{\min}(\rho\parallel\sigma)=0.$$

定理 2.7 $H=H_1\otimes H_2$, $\dim H<+\infty$, $\rho\in S(H)$, 则 $E(\rho\parallel\sigma)\geqslant 0$, $E(\rho\parallel\sigma)=0$ 当且仅当 $\rho\in S_{\text{F-P}}(H)$.

证明 由引理 2.6 可知 $D_{\min}(\rho\parallel\sigma)\geqslant 0$, 所以 $E(\rho\parallel\sigma)=\min_{\sigma\in S_{\text{F-P}}}D_{\min}(\rho\parallel\sigma)\geqslant 0$, 接下来证明 $E(\rho\parallel\sigma)=0$ 当且仅当 $\rho\in S_{\text{F-P}}(H)$, 已知 $\sigma\in S_{F-P}(H)$, 当 $E(\rho\parallel\sigma)=0$ 时, 有 $D_{\min}(\rho\parallel\sigma)=0$, 由引理 2.6 可知, 一定存在一个 $\rho=\sigma\in S_{\text{F-P}}(H)$, 反之, 若 $\rho\in S_{\text{-P}}(H)$, 已知 $\sigma\in S_{\text{F-P}}(H)$, 因为 $D_{\min}(\rho\parallel\sigma)\geqslant 0$, $E(\rho\parallel\sigma)$ 取 $D_{\min}(\rho\parallel\sigma)$ 的最小值, 即当 $D_{\min}(\rho\parallel\sigma)=0$ 时, 取得的 $E(\rho\parallel\sigma)=0$.

引理 2.8[19] 设 $H=H_1\otimes H_2$, $\dim H<+\infty$, ρ, $\sigma\in S(H)$, y 为一个完全正的保迹映射,

则:

$$D_{\min}(y(\rho)\parallel y(\sigma))\leqslant D_{\min}(\rho\parallel\sigma). \tag{5}$$

定理 2.9 $H=H_1\otimes H_2$, $\dim H<+\infty$, $\rho,\sigma\in S(H)$, y 为一个完全正的保迹映射, 则:

$$E(y(\rho)\parallel y(\sigma))\leqslant E(\rho\parallel\sigma). \tag{6}$$

证明 由引理 2.8 可得定理 2.9 显然成立.

定理 2.5, 2.7, 2.9 分别证明了两体下基于 min 相对熵的量子关联测度满足酉不变性、非负性、在完全正的保迹映射下的单调性, 接下来给出在 k 体分划下基于 min 相对熵的量子关联测度的定义, 并且证明这个关联测度满足酉不变性、非负性、在完全正的保迹映射下的单调性.

定义 2.10 设 $H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$, $\dim H<+\infty$, $\rho\in S(H)$, 若存在一个 k 体分划 $A_1|A_2|\cdots|A_k$, 使得 ρ 能被表示为 $\rho=\rho_1^{A_1}\otimes\rho_2^{A_2}\otimes\cdots\otimes\rho_k^{A_k}$, $\rho_i^{A_i}$ 是子空间 H^{A_i} 上的态, 则称 ρ 为 k 乘积态, ρ 在 k 体分划下基于 min 相对熵的量子关联测度定义为

$$\begin{aligned}E_k(\rho\parallel\sigma)-&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(\rho\parallel\sigma)\\=&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}-\log\operatorname{Tr}(\varPi_\rho\sigma),\end{aligned} \tag{7}$$

其中, $S_{\text{F-k}}(H)$ 表示 H 上的全体 k 乘积态, $\varPi_\rho$ 是对 ρ 的投影测量.

定理 2.11 设 $H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$, $\dim H<+\infty$, $\rho\in S(H)$, 则 $E_k(\rho\parallel\sigma)\geqslant 0, E_k(\rho\parallel\sigma)=0$ 当且仅当 $\rho\in S_{\text{F-k}}(H)$.

证明 由引理 2.6 得 $E_k(\rho\parallel\sigma)=\min\limits_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(\rho\|\sigma)\geqslant 0$, 若 $E_k(\rho\parallel\sigma)=0$, 且 $\sigma\in S_{\text{F-k}}(H)$, 则有一个 $\rho=\sigma\in S_{\text{F-k}}(H)$, 反之, $\rho\in S_{\text{F-k}}(H)$ 且 $\sigma\in S_{\text{F-k}}(H)$, 显然可得 $E_k(\rho\parallel\sigma)=0$.

定理 2.12 设 $H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$, $\dim H<+\infty$, $U=U_1\otimes U_2\otimes\cdots\otimes U_m$, $\rho\in S(H)$, 其中 U_i 为 H_i 上的酉算子, 则 $E_k(\rho\parallel\sigma)=E_k(U\rho U^\dagger\parallel U\sigma U^\dagger)$.

证明

$$\begin{aligned}&E_k(U\rho U^\dagger\parallel U\sigma U^\dagger)\\=&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(U\rho U^\dagger\parallel U\sigma U^\dagger)\\=&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}-\log\operatorname{Tr}(\Pi_{U\rho U^\dagger}U\sigma U^\dagger)\\=&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}-\log\operatorname{Tr}(\varPi_\rho\sigma)\\=&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(\rho\parallel\sigma)=E_k(\rho\parallel\sigma).\end{aligned}$$

定理 2.13 设 $H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$, $\dim H<+\infty$, $\rho\in S(H)$, y 为一个完全正的保迹

映射, 则:

$$E_k(y(\rho)\parallel y(\sigma))\leqslant E_k(\rho\parallel\sigma). \tag{8}$$

证明 由引理 2.8 可得定理 2.13 显然成立.

第 2 节定义了两体和 k 体分划下基于 min 相对熵的关联测度, 并且证明了其满足了一些关联测度必要的性质. 该关联测度的提出涉及了投影算子, 从这一想法出发, 不禁让人联想到其他物理概念能否也通过投影来定义关联测度, 进而将其归为一类. 除 min 相对熵外, 量子 Fisher 信息同样满足非负性、酉不变性、在完全正的保迹操作下的单调性等性质, 量子 Fisher 信息[21]可以表示为 $F=\operatorname{Tr}(\rho L^2)$, 将其基于量子 Fisher 信息的关联测度定义为 $E(\rho)=\min_{\{\varPi^\Omega\}}(\operatorname{Tr}(\varPi_\rho L^2)-\operatorname{Tr}(\rho L^2))$, $\varPi^\Omega$ 表示对应 Ω 系统上的正交投影组成的完备的投影测量集, 可知投影测量增加熵. 这样定义的关联测度不仅仅满足非负性、酉不变性、在完全正的保迹操作下的单调性等性质, 也满足关联测度等于零当且仅当 ρ 为经典态. 通过该发现, 可认为本文通过投影来定义的关联测度, 实际可以作为一类关联测度的定义方式, 这一发现有助于提出更多关联测度. 这些关联测度的提出都是刻画蕴含在量子态之间的非经典关联特性, 以及复合量子系统各子系统之间的关联程度.

3 量子信道对$E_k(\rho\parallel\sigma)$的影响

定义 3.1 设$H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$为主量子系统，$K=K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m$为辅助环境系统，$\dim H=\dim K<+\infty$，$\Phi_{A^k}$表示$\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$的一个量子信道，则：

$$\Phi_{A^k}=\Phi_{A_1}\otimes\Phi_{A_2}\otimes\cdots\otimes\Phi_{A_k},\tag{9}$$

其中，A^k表示H和K上所有 k 体分划，$\Phi_{A_j}(j=1,2,\cdots,k)$表示$\mathcal{B}(H_{A_j})\to\mathcal{B}(K_{A_j})$的量子信道，$\mathcal{B}(H)$表示所有有界线性算子的全体.

定义 3.2 设$H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$为主量子系统，$K=K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m$为辅助环境系统 $\dim H=\dim K<+\infty$，$\Phi_{A^k}=\Phi_{A_1}\otimes\Phi_{A_2}\otimes\cdots\otimes\Phi_{A_k}$表示$\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$的一个量子信道，则可定义以下内容：

1) 如果$\rho\in S_{\text{F-P}}(H)\ \Rightarrow\ \Phi_{A^k}(\rho)\in S_{\text{F-P}}(H)$，则称$\Phi_{A^k}$是保完全乘积态的.

2) 如果$\Phi_{A^k}(\rho)\in S_{\text{F-P}}(H)\Rightarrow\ \rho\in S_{\text{F-P}}(H)$，则称$\Phi_{A^k}$是反保完全乘积态的.

3) 如果$\Phi_{A^k}(\rho)\in S_{\text{F-P}}(H)\ \Leftrightarrow\ \rho\in S_{\text{F-P}}(H)$，则称$\Phi_{A^k}$是双边保完全乘积态的.

定理 3.3 设$H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$为主量子系统，$K=K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m$为辅助环境系统 $\dim H=\dim K<+\infty$，$\Phi_{A^k}=\Phi_{A_1}\otimes\Phi_{A_2}\otimes\cdots\otimes\Phi_{A_k}$表示$\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$的一个量子信道，则$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)\leqslant E_k(\rho\parallel\sigma)$当且仅当$\Phi_{A^k}$是保完全乘积态的.

证明 假设$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)\leqslant E_k(\rho\parallel\sigma)$，但是$\Phi_{A^k}$不是保完全乘积态的，则存在一个完全乘积态$\delta\in S_{\text{F-P}}(H)$，使得$\Phi_{A^k}(\delta)\notin S_{\text{F-P}}(H)$，则$E_k(\Phi_{A^k}(\delta)\parallel\sigma)>0$，但是$E_k(\delta\parallel\sigma)=0$，这与$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)\leqslant E_k(\rho\parallel\sigma)$是矛盾的，因此$\Phi_{A^k}$是保完全乘积态的. 反之，若$\Phi_{A^k}$是保完全乘积态的，如果$\rho\in S_{\text{F-P}}(H)$，则$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)=E_k(\rho\parallel\sigma)=0$，如果$\rho\notin S_{\text{F-P}}(H)$，则$E_k(\rho\|\sigma)>0$，令$E_k(\rho\|\sigma)=t>0$，$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\|\Phi_{A^k}(\sigma))=\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(\Phi_{A^k}(\rho)\|\Phi_{A^k}(\sigma))$，由引理 8 可知$D_{\min}(\rho\parallel\sigma)$在完全正的保迹映射下是单调的，所以：

$$\begin{aligned}&E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\Phi_{A^k}(\sigma))\\=&\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\Phi_{A^k}(\sigma))\\&<\min_{\sigma\in S_{\text{F-k}}}D_{\min}(\rho\parallel\sigma)=E_k(\rho\parallel\sigma)=t.\end{aligned}$$

定理 3.4 设$H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$为主量子系统，$K=K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m$为辅助环境系统，$\dim H=\dim K<+\infty$，$\Phi_{A^k}=\Phi_{A_1}\otimes\Phi_{A_2}\otimes\cdots\otimes\Phi_{A_k}$表示$\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$的一个量子信道，则$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)\geqslant E_k(\rho\parallel\sigma)$当且仅当$\Phi_{A^k}$是反保完全乘积态的.

证明 假设Φ_{A^k}不是反保完全乘积态的，则存在$\rho\in S_{\text{F-P}}(H)$，使得$\Phi_{A^k}(\rho)\in S_{\text{F-P}}(H)$，但$\rho\notin S_{\text{F-P}}(H)$，则$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)=0$，而$E_k(\rho\parallel\sigma)>0$，与$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)\geqslant E_k(\rho\parallel\sigma)$矛盾，所以$\Phi_{A^k}$是反保完全乘积态的，反之明显成立.

定理 3.5 设$H=H_1\otimes H_2\otimes\cdots\otimes H_m$为主量子系统，$K=K_1\otimes K_2\otimes\cdots\otimes K_m$为辅助环境系统，$\dim H=\dim K<+\infty$，$\Phi_{A^k}=\Phi_{A_1}\otimes\Phi_{A_2}\otimes\cdots\otimes\Phi_{A_k}$表示$\mathcal{B}(H)\to\mathcal{B}(K)$的一个量子信道，则$E_k(\Phi_{A^k}(\rho)\parallel\sigma)=E_k(\rho\parallel\sigma)$当且仅当$\Phi_{A^k}$是双边保完全乘积态的.

证明 由定理 3.3 和定理 3.4，定理 3.5 显然成立.

4 结 论

本文分别定义了两体和 k 体分划下基于 min 相对熵的关联测度的定义，并且证明了其满足量子关联测度的一些基本性质，包括非负性、酉不变性、在完全正的保迹操作下的单调性，说明了量子关联测度定义良好. 与已经提出的关联测度相比较，本文提出并且证明了在 k 体分划下该关联测度也是定义良好的，并且本文给出了量子信道对$E_k(\rho\parallel\sigma)$的影响，对给出的性质加以证明，从而将量子信道应用在了关联测度上.

参考文献

[1] Goh K T, Kaniewski J, Wolfe E 2018 *Phys. Rev. A* **97** 022104

[2] Rundle R, Everitt M J 2021 *J. Comput. Electron.* **20** 2180

[3] Qars J E 2021 *Commun. Theor. Phys.* **73** 176

[4] Dong Y, Ji A L, Zhang G F 2022 *Acta. Phys. Sin.* **71** 070303 (in Chinese) [董曜, 纪爱玲, 张国锋 2022 物理学报 **71** 070303]

[5] Benrass N, Aoune D, Habiballah N 2022 *Mod. Phys. Lett. A* **37** 406

[6] Cao L M, Du J J, Zhang K 2022 *Acta. Phys. Sin.* **71** 160306 (in Chinese) [曹雷明, 杜金鉴, 张凯 2022 物理学报 **71** 160306]

[7] Yang Y Y, Li L J, Ye L 2022 *Chin. Phys. B* **31** 100303

[8] Tiokang O M, Tchangnwa F N, Tchinda J D 2022 *Chin. Phys. B* **31** 110305

[9] Sarkar P J 2020 *Pure. Appl. Algebra.* **224** 789

[10] Chen K, Wu L G 2002 *Quantum. Inf. Comput.* **3** 193

[11] Anstock F, Schorbach V A 2020 *J. Phys. Conf. Ser.* **1618** 022062

[12] Lewenstein M, Kraus B, Cirac J I 2000 *Phys. Rev. A* **62** 2310

[13] Gao X H, Albeverio S, Chen K 2008 *Front. Comput. Sci. Chi.* **2** 114

[14] Bordbar M, Naderi N, Chamgordani M A 2020 *India. J. Phys.* **2** 901

[15] Duan Z B, Niu L F, Wang Y Y 2017 *Int. J. Theor. Phys.* **56** 1929

[16] Oliveria A D, Buksman E, Lacalle J D 2014 *Int. J. Mod. Phys. B* **28** 1450050

[17] Baba H, Mansour M, Daoud M 2022 *J. Russ. Laser. Res.* **43** 124

[18] Sumiyoshi, ABE 2003 *Phys. Rev. A* **312** 336

[19] Datta N 2009 *Ieee. T. Inform. Theory.* **55** 2816

[20] Wang Y Z, Hou J C 2015 *Quantum. Inf. Process.* **14** 3711

[21] Liu J, Jing X Q, Zhong W 2014 *Commun. Theor. Phys.* **61** 45

Quantum correlation measure based on min relative entropy for two-partition and k-partition*

Li Jun-Qing Huang Li † Cui Shi-Jie Wang Yin-Zhu

(*School of Applied Sciences*, *Taiyuan University of Science and Technology*, *Taiyuan* 030024, *China*)

(Received 30 June 2022; revised manuscript received 9 September 2022)

Abstract

As a peculiar resource of quantum mechanics, quantum correlation has been applied to many aspects. In quantum information processing and quantum computing, the quantum correlation plays an extremely important role, and it has been a subject of further studies, principally due to the general belief that it is a fundamental resource for different quantum information processing tasks. In addition, correlation measure is a very important physical quantity in studying the quantum correlation. A well-defined correlation measure needs to have some necessary properties. By proving these necessary properties, we can deepen our understanding of correlation measure. As one of the key concepts of quantum information theory, relative entropy is always used to measure the uncertainty contained in the state of physical system. In order to better understand the properties and applications of correlation measure based on relative entropy, in this paper, according to the properties of the min relative entropy, we give the quantum correlation measure based on min relative entropy for two-partition and k-partition. Furthermore, we prove that it satisfies some necessary properties of quantum correlation measures, including the nonnegativity, the invariance under local unitary operators, and the monotonicity under completely positive trace-preserving. By proving these properties, we show that the given correlation measure is well-defined. Security of communication has received much attention since ancient times. In today's society, the internet, instant messaging and e-commerce applications are all related to the information security, and the information security is related to the vital interests of everyone. The information encryption is one of the important methods to ensure information security. As an important way to ensure information security, quantum channel has received more and more attention. At the end of the paper, we introduce the concept of quantum channel, and discuss the influence of quantum channel on the correlation measure based on min relative entropy under k-partition. By proposing a new correlation measure and proving the effect quantum channel on the measure, we can better describe the uncertainty contained in the state of physical system.

Keywords: correlation measure, relative entropy, k-partition, trace mapping, quantum systems

PACS: 03.65.–w **DOI:** 10.7498/aps.72.20221293

* Project supported by Natural Science Foundation of Shanxi Province, China (Grant No. 20190D111254).

† Corresponding author. E-mail: 16688789@qq.com

物理学报 Acta Physica Sinica

Chinese Physical Society

Institute of Physics, CAS

量子态在两体和k体下基于min相对熵的量子关联测度

李俊青　黄丽　崔世杰　王银珠

Quantum correlation measure based on min relative entropy for two-partition and k-partition

Li Jun-Qing　Huang Li　Cui Shi-Jie　Wang Yin-Zhu

引用信息 Citation: Acta Physica Sinica, 72, 010302 (2023)　DOI: 10.7498/aps.72.20221293

在线阅读 View online: https://doi.org/10.7498/aps.72.20221293

当期内容 View table of contents: http://wulixb.iphy.ac.cn
