

由任意多个独立的观察者共享 Werner 态的纠缠*

于欣淼 杨舒媛 贺衍†

(太原理工大学数学学院, 太原 030024)

(2022 年 10 月 25 日收到; 2023 年 1 月 10 日收到修改稿)

量子关联共享问题是量子信息理论研究中一个有趣的课题. 最近, Srivastava 等在 [Phys. Rev. A 2022 105 062413] 中证明了存在一类 T 态, 其纠缠可以被任意多个独立观察者共享. 通过选择合适的纠缠见证算子和 Bob 的非锐化测量, 本文证明了存在两量子比特纠缠的初始共享 Werner 态, 其纠缠可以被任意多个观察者 Bobs 和单个观察者 Alice 共享.

关键词: 纠缠 witness, Werner 态, 共享量子纠缠**PACS:** 03.67.Bg, 03.67.-a, 03.67.Mn**DOI:** 10.7498/aps.72.20222039

1 引言

量子关联不仅是量子力学的重要特征, 而且是各种信息任务中不可或缺的资源, 如量子隐形传态^[1]、超密编码^[2]、量子克隆^[3]、量子密码学^[4]、量子计量学^[5]和量子计算机^[6]等. 因此, 研究如何有效地利用这种资源具有重要意义.

量子关联共享问题首先由 Silva 等^[7]提出并讨论, 其场景参见图 1. 该研究证明了最多有两个 Bobs 可以与单个 Alice 违反 Clauser-Horne-Shimony-Holt (CHSH) Bell 不等式. 由此, 量子非局域性共享问题被广泛研究^[8–20]. 文献^[8]中, Brown 和 Colbeck 证明了任意多个独立的观察者 Bobs 可以与单个 Alice 共享两量子比特最大纠缠态的非局域性. 在文献^[9]中, 张廷桂和费少明证明了任意多个独立的观察者 Bobs 可以共享任意维二体纠缠纯态的非局域性. 进而也启发了对其他量子关联任务的类似研究^[21–24], 如导引^[25–27]、纠缠等.

在共享方执行了几次局部操作的情况下, 共享态如果仍是纠缠的, 这对于将纠缠作为一种资源使用的信息处理方案来说是很重要的. 目前, 对于纠缠共享问题的研究已经有所进展. Bera 等^[10]证明

了当初始共享态为两量子比特最大纠缠态时, 不超过 12 个 Bobs 可以与单个 Alice 检测到纠缠, 此时, Bobs 测量的锐度参数可能不相等; 同时, 他们还发现, 当初始共享态为非最大纠缠纯态时, 可以检测到纠缠的 Bobs 数量随着初始纠缠量的增加而减少. Srivastava 等^[28]证明了如果初始共享态是满足局部隐变量 (LHV) 模型的带参数的纠缠 T 态, 那么在上述相同场景中, 其纠缠可以被任意多次共享. 但是, 确定其他纠缠态在作为初始共享态时能否产生任意多次的纠缠共享仍是一个重要的开放性问题.

本文使用纠缠 witness (EWs)^[29]来检测纠缠, 考虑在上述场景下 (Bobs 连续且独立地进行测量), 初始共享态为纠缠的两量子比特的 Werner 态时的纠缠共享问题. 主要目的是通过选择合适的纠缠 witness 算子和 Bobs 的测量策略, 使得 Alice 能够与尽可能多的 Bobs 共享纠缠. 此外, 还考虑了 Werner 态的特殊情况, 即最大纠缠态作为初始共享态.

本文证明了存在两量子比特纠缠的 Werner 态, 当它作为初始共享态时, 其纠缠可以被任意多个观察者 Bobs 与 Alice 共享. 本文第 2 节主要回顾了 Werner 态和纠缠 witness 的概念和性质. 第 3

* 国家自然科学基金 (批准号: 12271394) 和山西省重点研发计划 (批准号: 202102010101004) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: hekanquantum@163.com

节和第 4 节介绍了本文使用的场景和测量策略. 第 5 节给出本文的主要结果. 第 6 节对全文进行总结.

2 基本概念

2.1 Werner 态

1989 年, Werner^[30] 引入了以非经典相关性为特征的混合量子态. 这类态可以用翻转算子 F 表示, F 满足 $F(|\psi_1\rangle \otimes |\psi_2\rangle) = |\psi_2\rangle \otimes |\psi_1\rangle$, 且 F 具有以下形式:

$$F = \sum_{i=0}^{d-1} \sum_{j=0}^{d-1} |i\rangle\langle j| \otimes |j\rangle\langle i|, \quad (1)$$

其中 $\{|i\rangle \otimes |j\rangle\}$ 是 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 的一组标准基. 因此, $d \times d$ 维的 Werner 态可以表示为

$$\rho = \frac{1}{d^3 - d} [(d-t)I + (dt-1)F], \quad -1 \leq t \leq 1, \quad (2)$$

其中 F 是翻转算子, I 是 Hilbert 空间 $\mathcal{H}_A \otimes \mathcal{H}_B$ 上的恒等算子.

在文献 [31] 中, 证明了当且仅当 $t \in [0, 1]$ 时 Werner 态 ρ 是可分的. 本文研究 $d = 2$ 时的情况.

2.2 纠缠 witness

纠缠 witness 的概念为在实验室中检测纠缠提供了一种有效的方法. 该方法是 Hahn-Banach^[32] 定理的一个结果, 该定理提出, 在赋范线性空间中总是存在一个泛函, 它将空间中的任何点与该空间中不包含该点的任意闭凸集分隔开. 因此, 当可分态集在包含密度矩阵的空间上形成一个闭凸集时, 对于每个纠缠态 ρ_e , 可以构造一个算子 W , 使得

$$\text{Tr}\{\rho W\} \geq 0, \quad \forall \rho \in S \quad (3)$$

$$\text{Tr}\{\rho_e W\} < 0, \quad (4)$$

其中 S 表示 ρ 和 ρ_e 所属空间中可分态的集合.

3 纠缠共享问题

考虑一个最简单的场景^[7], 如图 1 所示, 即一个两体纠缠量子态, 其一半由一个观察者 Alice (A) 所拥有, 而另一半则由 k 个观察者 Bobs 测量 (并传递), 其中 B_k 表示第 k 个观察者. 第二个系统上的多个观察者 Bobs 依次独立地作用, 以检测与第一个系统上的单个观察者 Alice 的共享纠缠. 我们的任务是最大限度地增加能够与 Alice 检测到纠缠的 Bobs 的数量. 这里考虑将两量子比特纠缠的

Werner 态作为初始共享态. 因此, A 和 B_1 共享满足 (2) 式的纠缠态. B_1 对他拥有的部分共享态进行测量并将其传递给 B_2 , 同样, B_2 执行他的测量并传递给 B_3 , 这个过程一直持续到第 k 个 Bob. 之后, Alice 执行其测量, 并将她的统计数据与所有的 Bobs 进行比较, 以确定能够检测到与她共享纠缠的 Bobs 的数量.

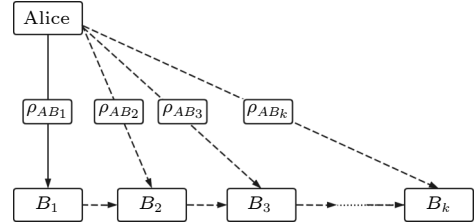


图 1 Alice 和第一个 Bob, 即 B_1 , 共享一个两体纠缠态 ρ_{AB_1} . B_1 对他所拥有的部分共享态进行测量, 然后将其传递给第二个 Bob, 即 B_2 . 测量后的状态是 ρ_{AB_2} . 之后, B_2 测量 ρ_{AB_2} , 然后再传递给 B_3 , 以此类推

Fig. 1. A bipartite entangled quantum state ρ_{AB_1} is initially shared by Alice and the first Bob (B_1). B_1 performs his measurement on his part and then passes it to the second Bob (B_2). The post-measurement state is ρ_{AB_2} . Then, B_2 measures ρ_{AB_2} on his part and passes it to B_3 and so on.

4 共享态和测量策略

在上述场景中, Alice (A) 和另一端的观察者序列中的第一个 Bob (B_1), 共享纠缠的两量子比特 Werner 态, 即

$$\rho_{AB_1} = \frac{2-t}{6} I_2 \otimes I_2 + \frac{2t-1}{6} F, \quad -1 \leq t < 0, \quad (5)$$

其中, I_2 是二维 Hilbert 空间上的恒等算子. 下面介绍 A 和 B_k , $k = 1, 2, \dots, n$, 采用的测量策略. 注意, 下文中 $\sigma_i \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 均是泡利矩阵. A 将采用 (6) 式给定的测量策略:

$$\left\{ \frac{I_2 + \sigma_i}{2}, \frac{I_2 - \sigma_i}{2} \right\}, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6)$$

B_k 将采用测量策略 $\{E_k^{(i)}, I_2 - E_k^{(i)}\}$, 其中

$$E_k^{(i)} = (I_2 + \lambda_k^{(i)} \sigma_i) / 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (7)$$

式中, $\lambda_k^{(i)} \in [0, 1]$ 是相应的锐度参数. 从而, A 和 B_k 对他们之间共享的任何态, 都可以计算出 (8) 式给出的纠缠 witness 算子 W_k ^[28] 的期望:

$$W_k = \frac{1}{4} \left[I_2 \otimes I_2 + \sum_{i=1}^3 \sigma_i \otimes \lambda_k^{(i)} \sigma_i \right]. \quad (8)$$

文献 [33,34] 证明了 $\lambda_k^{(i)} = 1$ 时, 对所有的可分态有

$\langle W_k \rangle \geq 0$, 而 $\lambda_k^{(i)} \neq 1$ 时的情况在文献 [28] 中得到了证明. 也就是说, 当 $\lambda_k^{(i)} \in [0, 1]$ 时, 对所有的可分态有 $\langle W_k \rangle \geq 0$.

B_k 在执行测量后将其所拥有的共享态的一部分传递给下一个 Bob, 即 B_{k+1} . 我们规定 A 和 B_k 在 B_k 进行测量前共享的态为 ρ_{AB_k} . 那么, 在 B_{k+1} 进行测量之前, A 和 B_{k+1} 间的共享态由 Lüders 规则给出:

$$\rho_{AB_{k+1}} = \frac{1}{3} \sum_{i=1}^3 \left[I_2 \otimes \sqrt{E_k^{(i)}} \cdot \rho_{AB_k} \cdot I_2 \otimes \sqrt{E_k^{(i)}} + I_2 \otimes \sqrt{I_2 - E_k^{(i)}} \cdot \rho_{AB_k} \cdot I_2 \otimes \sqrt{I_2 - E_k^{(i)}} \right]. \quad (9)$$

注意, 不同 Bob 采用的测量策略互不相关, 这是因为每个 Bob 都独立行动, 他们不知道前一个 Bob 的测量结果, 或者换句话说, Bobs 的测量策略是“无偏”的.

5 任意多个 Bobs 共享纠缠

本节讨论当初始共享态为两量子比特纠缠 Werner 态时, 观察者 Bobs 如何同 Alice 检测纠

缠. 首先, A 和 B_1 共享态 ρ_{AB_1} , 假定在 B_k 采用的测量策略中,

$$\lambda_k^{(1)} = 1 \text{ 且 } \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(3)} = \lambda_k, \quad (10)$$

其中 $\lambda_k \in (0, 1)$. 也就是说, 规定 λ_k 为 B_k 的测量的锐度参数.

由上文知, B_1 使用 λ_1 作为锐度参数, 如果 $\langle W_1 \rangle_{\rho_{AB_1}} < 0$, 那么观察者 A 和 B_1 可以检测到 ρ_{AB_1} 的纠缠, 即

$$\langle W_1 \rangle_{\rho_{AB_1}} = \text{Tr}(W_1 \rho_{AB_1}) = \frac{t+1}{6} + \frac{2t-1}{6} \lambda_1 < 0,$$

由此可得,

$$\lambda_1 > (-t-1)/(2t-1). \quad (11)$$

我们发现, 当 $t \in [-1, 0)$ 时, $\lambda_1 \in (0, 1)$. 因此, 我们假定 $\lambda_1 = \epsilon$, 其中 $0 < \epsilon < 1$, 注意此时仍需满足 (11) 式.

为了得到 ρ_{AB_1} 和 ρ_{AB_k} 之间的关系, 使用下面的等式:

$$\sqrt{(I_t \pm \gamma_k I_{m/2} \otimes \sigma)/2} = \left[(\sqrt{1+\gamma_k} + \sqrt{1-\gamma_k}) I_t \pm (\sqrt{1+\gamma_k} - \sqrt{1-\gamma_k}) (I_{m/2} \otimes \sigma) \right] / (2\sqrt{2}),$$

其中 $\sigma \in \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$. 从而, A 和 B_k 共享的态为

$$\begin{aligned} \rho_{AB_k} = & \frac{1}{3} \left[\frac{3+2\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2}}{2} \rho_{AB_{k-1}} + \frac{1}{2} I_2 \otimes \sigma_1 \cdot \rho_{AB_{k-1}} \cdot I_2 \otimes \sigma_1 \right. \\ & \left. + \frac{1-\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2}}{2} \left\{ I_2 \otimes \sigma_2 \cdot \rho_{AB_{k-1}} \cdot I_2 \otimes \sigma_2 + I_2 \otimes \sigma_3 \cdot \rho_{AB_{k-1}} \cdot I_2 \otimes \sigma_3 \right\} \right]. \end{aligned} \quad (12)$$

因此, 如果 $\langle W_k \rangle_{\rho_{AB_k}} < 0$, 那么 A 和 B_k 就可以检测到纠缠, 即

$$\begin{aligned} \langle W_k \rangle_{\rho_{AB_k}} = & \text{Tr}(W_k \rho_{AB_k}) = \text{Tr} \left\{ \frac{1}{12} \left[3\rho_{AB_{k-1}} + (2\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2} + 1) \rho_{AB_{k-1}} \cdot \sigma_1 \otimes \sigma_1 \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_k \left(\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2} + 1 \right) \rho_{AB_{k-1}} \cdot \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \lambda_k \left(\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2} + 1 \right) \rho_{AB_{k-1}} \cdot \sigma_3 \otimes \sigma_3 \right] \right\} \\ = & \text{Tr} \left\{ \frac{1}{12} \left[3\rho_{AB_{k-2}} + \frac{2\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2} + 1}{3} (2\sqrt{1-\lambda_{k-2}^2} + 1) \rho_{AB_{k-2}} \cdot \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \lambda_k \frac{\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2} + 1}{3} \right. \right. \\ & \left. \left. \times \left(\sqrt{1-\lambda_{k-2}^2} + 1 \right) \rho_{AB_{k-2}} \cdot \sigma_2 \otimes \sigma_2 + \lambda_k \frac{\sqrt{1-\lambda_{k-1}^2} + 1}{3} \left(\sqrt{1-\lambda_{k-2}^2} + 1 \right) \rho_{AB_{k-2}} \cdot \sigma_3 \otimes \sigma_3 \right] \right\} = \dots \\ = & \text{Tr} \left[\frac{1}{12} \left(3\rho_{AB_1} + \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3} 3\rho_{AB_1} \cdot \sigma_1 \otimes \sigma_1 + \lambda_k \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3} 3\rho_{AB_1} \cdot \sigma_2 \otimes \sigma_2 \right. \right. \\ & \left. \left. + \lambda_k \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3} 3\rho_{AB_1} \cdot \sigma_3 \otimes \sigma_3 \right) \right] < 0. \end{aligned} \quad (13)$$

计算可得,

$$\lambda_k > \frac{-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{(4t-2) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}.$$

故对给定的 $0 < \epsilon < 1$, 通过迭代规则, 我们定义序列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$, 当 $0 < \lambda_{k-1} < 1$ 时,

$$\lambda_k = (1+\epsilon) \frac{-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{(4t-2) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}, \quad (14)$$

其中 $\lambda_1 = \epsilon$; 反之, 若 λ_{k-1} 不满足上述条件, 则 λ_k 无定义. 下面求使 $0 < \lambda_k < 1$ 成立的 k 的最大值, 从而可以反映出能检测到纠缠的 Bobs 的最大数量. 首先, 分析序列 $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ 的性质.

引理 1 (14) 式中定义的序列 $\{\lambda_k\}_{k=2}^\infty$ 在其有定义的范围内是严格递增的.

当 $t \in [-1, 0)$ 时, $0 < \lambda_1 < 1$. 假设对于某个 $k \in \mathbb{N}$ 和 t 的某个范围, 有 $0 < \lambda_k < 1$. 这也意味着, $0 < \lambda_j < 1, j = 1, 2, \dots, k-1$. 进而, $k > 1$ 时,

$$\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k} = \frac{-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^k \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}} \times 1 / \left(\frac{\sqrt{1-\lambda_k^2} + 1}{3} \right).$$

因为 $0 < \lambda_j < 1, j = 1, 2, \dots, k$, 所以可以得到

$$\lambda_{k+1}/\lambda_k > 1.$$

故序列 $\{\lambda_k\}_{k=2}^\infty$ 是严格递增的.

定理 1 在图 1 场景中, Alice 和 Bobs 分别采用 (6) 式和 (7) 式的测量策略. 若初始共享态为两量子比特纠缠的 Werner 态, 即

$$\rho_{AB_1} = \frac{2-t}{6} I_2 \otimes I_2 + \frac{2t-1}{6} F, \quad -1 \leq t < 0,$$

其中, F 是翻转算子且 I_2 是二维 Hilbert 空间上的恒等算子, 那么当 $t \rightarrow -1$ 且 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 对任意的 $k \in \mathbb{N}$, (14) 式中的 λ_k 均满足 $0 < \lambda_k < 1$, 这表明存在任意多个独立的观察者 Bobs 可以与 Alice 共享其纠缠.

如果能证明对任意的 $k, k \in \mathbb{N}, 0 < \lambda_k < 1$ 都成立, 则可以说明任意数量的 Bobs 可以同 Alice 检测到纠缠. 已知 $t \in [-1, 0)$ 时, $0 < \lambda_1 < 1$. 下面考虑

$$0 < \lambda_k = (1+\epsilon) \frac{-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{(4t-2) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}} < 1.$$

只需找到使 $0 < \lambda_k < 1$ 成立的 k 的最大值. 同时, 若这样的 k 存在, 还可以得到相应的 t 的取值范围. 已知 $t \in [-1, 0)$. 若 $\lambda_k > 0$, 则

$$-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3} < 0,$$

经计算可得

$$t > \frac{-3 + \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{2 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}.$$

令

$$M_k = \frac{-3 + \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{2 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}},$$

其中 $M_1 = -1$, 则 $\{M_k\}_{k=1}^\infty$ 为一迭代序列. 因为 $0 < \lambda_i < 1, i = 1, 2, \dots, k-1$, 所以 $k \geq 2$ 时, $M_k < -1$. 这表明 $t \in [-1, 0)$ 时, $\lambda_k (k = 1, 2, \dots)$ 均大于 0. 同理, 若 $\lambda_k < 1$, 则

$$(1+\epsilon) \frac{-3 - (2t-1) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{(4t-2) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}} < 1,$$

经计算可得

$$t < \frac{3(1+\epsilon) - (1+\epsilon) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3} - 2 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}{-2(1+\epsilon) \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3} - 4 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2} + 1}{3}}.$$

令

$$N_k = \frac{3(1+\epsilon) - (1+\epsilon) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3} - 2 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3}}{-2(1+\epsilon) \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3} - 4 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3}},$$

其中 $N_1 = 0$, 那么 $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ 也为一迭代序列. 又因为

$$3(1+\epsilon) - (1+\epsilon) \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3} - 2 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3} > 0,$$

所以 $k \geq 2$ 时, N_k 恒小于 0. 用引理 1 中类似的方法, 可以证明序列 $\{N_k\}_{k=1}^\infty$ 是一个严格递减序列. 这样, 当使 $0 < \lambda_k < 1$ 成立的 k 的最大值存在时, 不妨用 k_0 表示, $k_0 \in \mathbb{N}$. 此时, 由于序列 $\{\lambda_k\}_{k=2}^\infty$ 是一个严格递增的序列 (由引理 1 可知), 那么可以得到, 当 $t \in [-1, N_{k_0})$ 时, 有 $0 < \lambda_2 < \dots < \lambda_{k_0} < 1$. 也就是说, 有 k_0 个 Bobs 可以同单个 Alice 见证纠缠.

我们发现, 当 $t \rightarrow -1$ 且 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 对于所有 $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \rightarrow 0$. 因此, 对于一个两量子比特纠缠的初始共享 Werner 态, 当 $t \rightarrow -1$ 且 $\epsilon \rightarrow 0$ 时, 其纠缠可以被任意次共享.

推论 1 当初始共享态为两量子比特最大纠缠态时, 任意多个独立的 Bobs 可以同单个 Alice 共享其纠缠.

考虑定理 1 中 $t = -1$ 的情形, 此时初始共享态为最大纠缠态, 且

$$\lambda_k = (1+\epsilon) \frac{-3 + 3 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{2\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3}}{-6 \prod_{i=1}^{k-1} \frac{\sqrt{1-\lambda_i^2}+1}{3}}.$$

图 2 给出了在不同的 ϵ 值下, 可以与单个 Alice 见证纠缠的 Bobs 的数量. 显然, 随着参数 ϵ 的减小, Bobs 的数量在增加. 在这种情况下, 如果 $\epsilon \rightarrow 0$, 也就是 $\lambda_1 \rightarrow 0$, 可以推断出对于所有的 $k \in \mathbb{N}$, $\lambda_k \rightarrow 0$. 这表明, 对于一个两量子位的最大纠缠初始共享态, 任意多个 Bobs 可以与单个 Alice 共享其纠缠.

文献 [9] 中证明了任意多个独立的观察者 Bobs 可以共享任意维二体纠缠纯态的非局域性. 由于非局域意味着纠缠, 这表明本文推论 1 得到的结果与文献 [9] 中的结果一致.

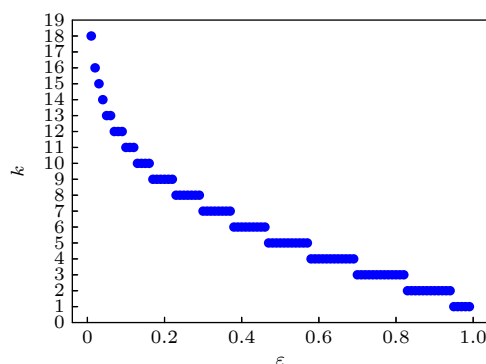


图 2 当 $t = -1$ 时初始共享态是最大纠缠态. 这里绘制了相对于参数 ϵ , 可以与单个 Alice 见证纠缠的 Bobs 的数量. 横轴表示参数 ϵ 的取值, 图中将 $(0, 1)$ 按长度 0.01 均匀分段, ϵ 取值为每段的右端点. 纵轴表示能成功检测到与单个 Alice 纠缠的 Bobs 的个数, 用 k 表示

Fig. 2. When $t = -1$, the initial shared state is the maximally entangled state. We plot here the number of Bobs who can witness entanglement with Alice, with respect to ϵ . The horizontal axis represents the value of parameter ϵ which belongs to 100 uniformly distributed points in $(0, 1)$. The vertical axis counts the number of Bobs k who can succeed in detecting entanglement with Alice.

6 结 论

本文考虑了这样一个场景^[7], 其中一个两量子位纠缠态的一半由一个名为 Alice 的观察者拥有, 而另一半由几个名为 Bob 的观察者依次独立测量. 研究了该场景下的纠缠共享问题, 证明了当两量子比特纠缠的 Werner 态作为初始共享态时, 任意数量的 Bobs 与单个 Alice 共享纠缠是可能的. 与文献 [28] 相比, 本文改变了初始共享态. 这表明, 本文找到了其他可以被任意多次共享纠缠的态. 同时还发现, 当初始共享态为 Werner 态的特殊情形, 即初始共享态为两量子比特最大纠缠态时, 其纠缠也可以被任意多次共享, 且 Bobs 的数量随着参数

的减小而增多. 此外, 还提供了 Bobs 测量的锐度的迭代边界, 它取决于初始态和前一个 Bob 执行的测量的锐度. 本文研究的对象为纠缠的 Werner 态, 若有兴趣, 可继续考虑初始共享态为更一般态时的情况, 同时还可考虑在高维甚至是多体上的纠缠共享问题.

参考文献

- [1] Bennett C H, Brassard G, Crépeau C, Jozsa R, Peres A, Wootters W K 1993 *Phys. Rev. Lett.* **70** 1895
- [2] Bennett C H, Wiesner S J 1992 *Phys. Rev. Lett.* **69** 2881
- [3] Scarani V, Lblisdir S, Gisin N, Acin A 2005 *Rev. Mod. Phys.* **77** 1225
- [4] Ekert A K 1991 *Phys. Rev. Lett.* **67** 661
- [5] Wang K, Wang X, Zhan X, Bian Z, Li J, Sanders B C, Xue P 2018 *Phys. Rev. A* **97** 042112
- [6] Ladd T D, Jelezko F, Laflamme R, Nakamura Y, Monroe C, O'Brien J L 2010 *Nature* **464** 45
- [7] Silva R, Gisin N, Guryanova Y, Popescu S 2015 *Phys. Rev. Lett.* **114** 250401
- [8] Brown P J, Colbeck R 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 090401
- [9] Zhang T G, Fei S M 2021 *Phys. Rev. A* **103** 032216
- [10] Bera A, Mal S, Sen (De) A, Sen U 2018 *Phys. Rev. A* **98** 062304
- [11] Curchod F J, Johansson M, Augusiak R, Hoban M J, Wittek P, Acin A 2017 *Phys. Rev. A* **95** 020102(R)
- [12] Cheng S, Liu L, Baker T J, Hall M J W 2021 *Phys. Rev. A* **104** L060201
- [13] Das D, Ghosal A, Sasmal S, Mal S, Majumdar A S 2019 *Phys. Rev. A* **99** 022305
- [14] Kumari A, Pan A K 2019 *Phys. Rev. A* **100** 062130
- [15] Saha S, Das D, Sasmal S, Sarkar D, Mukherjee K, Roy A, Bhattacharya S S 2019 *Quantum Inf. Process.* **18** 42
- [16] Bowles J, Baccari F, Salavrakos A 2020 *Quantum* **4** 344
- [17] Foletto G, Calderaro L, Tavakoli A, Schiavon M, Picciariello F, Cabello A, Villoresi P, Vallone G 2020 *Phys. Rev. Appl.* **13** 044008
- [18] Foletto G, Padovan M, Avesani M, Tebyanian H, Villoresi P, Vallone G 2021 *Phys. Rev. A* **103** 062206
- [19] Feng T, Ren C, Tian Y, Luo M, Shi H, Chen J, Zhou X 2020 *Phys. Rev. A* **102** 032220
- [20] Hu M J, Zhou Z Y, Hu X M, Li C F, Guo G C, Zhang Y S 2018 *npj Quantum Inf.* **4** 63
- [21] Anwer H, Muhammad S, Cherifi W, Miklin N, Tavakoli A, Bourennane M 2020 *Phys. Rev. Lett.* **125** 080403
- [22] Anwer H, Wilson N, Silva R, Muhammad S, Tavakoli A, Bourennane M 2021 *Quantum* **5** 551
- [23] Foletto G, Calderaro L, Vallone G, Villoresi P 2020 *Phys. Rev. Res.* **2** 033205
- [24] Mohan K, Tavakoli A, Brunner N 2019 *New J. Phys.* **21** 083034
- [25] Schrödinger E 1936 *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **32** 446
- [26] Einstein A, Podolsky B, Rosen N 1935 *Phys. Rev.* **47** 777
- [27] Sasmal S, Das D, Mal S, Majumdar A S 2018 *Phys. Rev. A* **98** 012305
- [28] Srivastava C, Pandit M, Sen U 2022 *Phys. Rev. A* **105** 062413
- [29] Gühne O, Tóth G 2009 *Phys. Rep.* **474** 1
- [30] Werner R F 1989 *Phys. Rev. A* **40** 4277
- [31] Horodecki M, Horodecki P 1999 *Phys. Rev. A* **59** 4206
- [32] Simmons G F 1963 *Introduction to Topology and Modern Analysis* (New York: McGraw-Hill)p224-231
- [33] Gühne O, Hyllus P, BruffD, Ekert A, Lewenstein M, Macchiavello C, Sanpera A 2002 *Phys. Rev. A* **66** 062305
- [34] Gühne O, Hyllus P, Bruss D, Ekert A, Lewenstein M, Macchiavello C, Sanpera A 2003 *J. Mod. Opt.* **50** 1079

Sharing entanglement of the Werner state by arbitrarily many independent observers^{*}

Yu Xin-Miao Yang Shu-Yuan He Kan[†]

(Department of Mathematics, Taiyuan University of Technology, Taiyuan 030024, China)

(Received 25 October 2022; revised manuscript received 10 January 2023)

Abstract

The problem of sharing quantum correlations is an interesting problem in the study of quantum information theory. Silva et al. proposed the study of sharing quantum nonlocality at first. They studied the fundamental limits on nonlocality, asking whether a single pair of entangled qubits could generate a long sequence of nonlocal correlations. At the same time, the sequential scenario was also introduced first, in which Alice and Bob each have half of a pair of entangled qubit states. The first Bob measures his half and then passes his part to a second Bob who measures again and so on. Obviously, even partial preservation of entanglement in a shared state in spite of a few sequences of local operations performed by the sharing parties can be important for information processing schemes in which entanglement is utilized as a resource. Thus, the problem of sharing quantum entanglement has also been extensively investigated. Recently, Srivastava et al. proved that there exist a class of T-states whose entanglement can be shared by arbitrarily many independent observers in [*Phys. Rev. A* 2022 **105** 062413]. Here, we want to find whether there are other entangled states that can be shared entanglement arbitrarily many times. In this paper, we consider the problem of sharing quantum entanglement when the initial shared state is a two-qubit entangled Werner state. The goal is to maximize the number of Bobs that can share entanglement with a single Alice. By suitably choosing the entanglement witness operator and the unsharp measurement settings by the Bobs, we prove that there exist two-qubit entangled initial shared Werner states whose entanglement can be detected by arbitrarily many sequential observers Bobs with a single Alice. Then, we also consider the special case of the Werner state, that is, the maximally entangled state as the initial shared state. In this case, its entanglement can also be witnessed arbitrarily many times, and the number of Bobs increases with the decrease of parameter.

Keywords: entanglement witness, Werner state, sharing quantum entanglement

PACS: 03.67.Bg, 03.67.-a, 03.67.Mn

DOI: 10.7498/aps.72.20222039

^{*} Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant No. 12271394) and the Key R&D Program of Shanxi Province, China (Grant No. 202102010101004).

[†] Corresponding author. E-mail: hekanquantum@163.com



由任意多个独立的观察者共享Werner态的纠缠

于欣淼 杨舒媛 贺衍

Sharing entanglement of the Werner state by arbitrarily many independent observers

Yu Xin-Miao Yang Shu-Yuan He Kan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 070301 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222039

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222039>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

构造纠缠目击的一般方法

General method of constructing entanglement witness

物理学报. 2018, 67(7): 070303 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172697>

基于纠缠见证的路径纠缠微波检测方法

Path-entanglement microwave signals detecting method based on entanglement witness

物理学报. 2018, 67(4): 040301 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172164>

退相位环境下Werner态在石墨烯基量子通道中的隐形传输

Teleportation of Werner state via graphene-based quantum channels under dephasing environment

物理学报. 2022, 71(7): 070304 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20211881>

量子中继过程中纠缠态的选择

Selection of entanglement state in quantum repeater process

物理学报. 2021, 70(23): 230303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20211211>

多个量子节点确定性纠缠的建立

Deterministic quantum entanglement among multiple quantum nodes

物理学报. 2019, 68(3): 034202 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20181614>

量子纠缠与宇宙学弗里德曼方程

Quantum entanglement and cosmological Friedmann equations

物理学报. 2018, 67(17): 179501 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20180813>