

二维平面激波折射的理论计算方法

贾雷明^{1)†} 王智环¹⁾²⁾ 王澍霏¹⁾ 钟巍¹⁾ 田宙¹⁾

1) (西北核技术研究所, 西安 710024)

2) (清华大学工程物理系, 北京 100084)

(2022年10月24日收到; 2022年12月23日收到修改稿)

围绕二维平面激波与物质界面作用, 建立了流场波系结构的理论计算方法. 首先分析了界面两侧激波独自沿界面传播过程, 识别了两类正规折射和三类非正规折射; 然后, 根据两侧扰动沿界面传播的相对快慢, 得到了三种不同的作用情形. 与已有的 Catherasoo 方法相比, 此方法: 1) 考虑了激波波后紧邻波阵面流场中扰动对界面附近折射的影响, 区分了扰动的强弱及其是否可以追赶上激波阵面; 2) 除了少数情形外, 大都基于 Euler 方程精确解描述流场中波系相互作用. 利用该方法对马赫数 1.17 的激波与空气/SF₆ 界面作用进行计算, 得到的波系结构与数值结果、已有实验数据基本一致, 透射波阵面与水平方向夹角吻合程度优于 Catherasoo 结果; 给出了反射波参数、界面偏折角度等, 而 Catherasoo 方法不能计算这些参数. 对于马赫数 2.00 的激波, 通过比较不同介质密度比和界面倾角下的理论与数值结果, 发现此方法对波系类型的识别比 Catherasoo 方法更为准确, 且识别了波后强扰动追赶上激波形成三波结构的折射类型, 后者无法识别此类型. 上述结果表明, 新方法具有良好的适用性, 对波系类型的识别较已有方法的准确度更高, 可获取更为丰富的波系结构信息.

关键词: 激波, 正规/非正规折射, 波系结构, 理论计算**PACS:** 47.40.-x, 47.35.-i, 47.54.Bd**DOI:** 10.7498/aps.72.20222042

1 引言

当平面激波以一定角度入射到物质界面时, 激波会在界面处发生折射, 形成透射波、反射波等, 物质界面也会发生偏折, 诱发丰富的流动现象.

激波折射可分为正规和非正规两大类, 每一类又包括多种不同类型的波系结构. 在入射激波与界面交点附近, 若入射激波、透射波和反射波阵面均保持平直、且与界面相交于同一点, 此类折射称为正规折射, 其中反射波可能为激波或稀疏波. Taub^[1], Polachek^[2] 和 Henderson^[3] 等借鉴 von Neumann 三波理论^[4], 假定交点附近不同区域内流场参量均匀, 且跨越界面压力和法向速度连续, 建立了理想完全气体中正规折射的理论计算方法. Jahn^[5]

和 Abd-El-Fattah 等^[6] 开展平面激波与界面作用激波管实验, 获取了不同工况条件下正规折射流场发展的纹影图像, 验证了上述理论方法的合理性. 基于该理论, Henderson^[3] 和 Abd-El-Fattah 等^[6] 借助激波极曲线, 分析了波系结构随初始参数的变化; 随后, Flores 和 Holt^[7] 以及 Henderson 等^[8] 将理论推广到激波与空气/水界面作用的情形.

除正规折射之外, 其余的折射则为非正规折射, 此时流场中出现复杂波系结构、非均匀流场或弯曲的激波阵面等特征, 具有多种不同的类型. Jahn^[5] 最早提出, 当正规折射所满足的物理准则不再成立时, 诸如反射波与透射波后流场无法满足界面相容条件、入射波后流动相对于折射点为亚声速或者透射波超越入射波传播等情形, 折射类型则由正规过渡为非正规, Abd-El-Fattah 等^[6] 也提出了

† 通信作者. E-mail: jjaleiming@nint.ac.cn

类似的准则. Henderson^[9] 则从扰动传播快慢角度提出, 当入射波速度大于透射波速度时, 若反射波赶上入射波, 则非正规折射发生; 当入射波速度小于透射波速度时, 若透射波沿界面赶上入射波, 则非正规折射发生.

起初, 人们利用激波管实验开展非正规折射机制研究. Jahn^[5] 通过改变激波的强度和入射角度, 获取了平面激波在固壁处倾斜的空气/CH₄ 和空气/CO₂ 界面上发生非正规折射时的流场纹影图像. Abd-El-Fattah 等则研究了不同强度激波与“快-慢”界面 (He/CO₂、空气/SF₆^[10]) 和“慢-快”界面 (CO₂/He, CO₂/CH₄^[11]) 的作用, 其中“慢”与“快”表征的是界面两侧介质声速或激波速度相对大小^[3,9,12-14].

伴随着数值技术的发展, 计算流体力学也随之兴起. Henderson 等^[13] 通过数值求解 Euler 方程组, 研究了平面激波与 CO₂/CH₄ 界面作用随激波强度、入射角的变化规律, 发现在带约束前驱波的非正规折射情形中, 存在一束以折射点为中心的稀疏波. Nourgaliev 等^[15] 则模拟了激波与空气/SF₆ 界面作用, 结果与 Abd-El-Fattah 和 Henderson^[10] 实验数据一致. 之后, Henderson 和 Puckett^[14] 又研究了流场中仅包含入射波、透射波和物质界面的情形, 即所谓的“双波”系统, 此时反射波退化为马赫波.

之后, 人们改变激波强度、界面构型, 开展了大量的实验和数值模拟工作, 所获取的流场波系和界面演化也愈加丰富^[16-22].

与正规折射情形相比, 由于受到波后扰动的影响, 非正规折射中流场波系结构更加复杂. 对于不同的激波强度、入射角和介质物性参数, 波后扰动可能具有不同的强弱类型, 而且可能来自于不同区域, 甚至是边界处. 借助于经典的激波和普朗特-迈耶流动理论, 并不足以描述非正规折射中的复杂作用, 目前还缺乏精确理论计算方法, 需要引入一定的物理近似.

对于二维平面激波与固壁处倾斜界面作用, Henderson^[3] 借助激波极曲线定性讨论了不同激波强度、介质参数下非正规折射波系结构. Abd-El-Fattah 等^[6] 针对带自由前驱波的非正规折射, 假定入射波和透射波后流体速度相等, 且将透射波后高压流体膨胀导致前驱波形成的过程简化为一维流动, 建立了透射波和前驱波参数的理论计算方法, 但由于所采用假设相较于实际情况大大简

化, 计算结果与实验数据存在较大偏差. Abd-El-Fattah 和 Henderson^[10] 针对入射波受到波后亚声速稀疏波作用而逐渐发生弯曲的情形, 假定入射波阵面保持平直, 建立与入射波和界面的交点固连的坐标系, 利用该坐标系中的流场参数建立入射波和透射波极曲线, 假定在波后稀疏波作用下, 流体状态先沿入射波极曲线变化到声速点, 然后按照普朗特-迈耶流动进行膨胀, 其状态曲线与透射波极曲线的交点即为透射波后状态. 但是, 在某些情形下, 入射波声速点位于透射波极曲线外侧, 因此上述两条极曲线无法相交, 解并不存在. 对于二维平面激波与直角构型界面作用, Georgievskii 等^[23,24] 假定入射波、透射波始终保持平直, 并且透射波与前驱波在界面处组成双波结构, 忽略波后稀疏波作用, 同时将前驱波与入射波作用所形成的五波结构简化为三波结构, 分别利用双波和三波理论求解波阵面信息.

上述理论研究工作仅关注了特定的折射波系结构, 并对波系结构及其相互作用进行了极大的简化. 突破性的工作是由 Catherasoo 和 Sturtevant^[25] 完成的, 他们将几何激波动力学 (geometric shock dynamics, GSD) 理论^[26,27] 推广到波前流场非均匀的情形, 建立了二维平面激波与界面作用的理论计算方法, 适用于任意的正规或非正规折射类型. 但是, 由于 GSD 理论基于波阵面几何效应来近似描述激波传播, 无法准确考虑紧邻波后扰动对于激波传播的影响, 因此 Catherasoo 方法在波系类型识别和求解方面还存在一定的不足^[13,28].

鉴于流场发展是流场扰动相互作用的结果, 而激波在界面折射时所受到的扰动主要来自于波后以及界面另一侧的流场. 本文针对二维平面激波与物质界面作用, 从扰动传播角度出发, 分析流场中波系发展物理图像, 基于流体动力学理论建立流场中波系结构的理论计算方法.

2 理论方法

构建二维平面激波与物质界面作用图像, 见图 1. 初始静止流场中存在物质界面 P_1OP_2 , 其中 OP_1 与 x 轴呈一定夹角 $\varphi (0 \leq \varphi \leq 90^\circ)$, OP_2 与 y 轴平行. 界面两侧为介质 1 和 2, 均为理想完全气体, 密度和比热比分别为 ρ_1 和 γ_1 , ρ_2 和 γ_2 . 竖直平面激波 I_1 从左向右传播, 并在 $t = 0$ 时与界面 OP_2

作用, 形成反射波 R 和透射激波 I_2 , 它们的参数可利用一维 Riemann 问题求解方案^[29]精确计算.

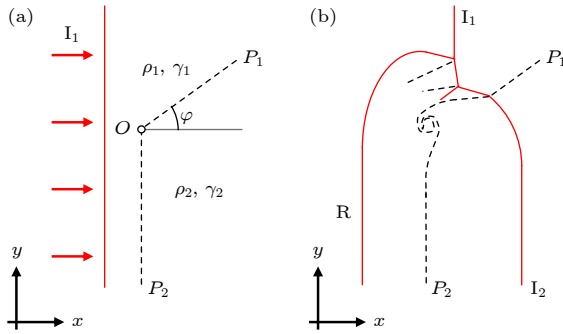


图 1 二维平面激波与物质界面作用示意图 (a) $t < 0$; (b) $t > 0$
 Fig. 1. Schematic diagram of the interaction of two-dimensional planar shock wave with material interface: (a) $t < 0$; (b) $t > 0$.

在 $t > 0$ 时, 波 I_1 和 I_2 继续向右传播, 并在界面 OP_1 附近发生相互作用, 流场中形成了更为丰富的波系结构, 见图 1(b). 由于初始流场无特征时间和空间尺度, 流动可以看作是自相似的, 即随时间发展流场波系结构的几何构型保持不变、尺寸等比增大, 但欲获取波系结构的精确解仍需借助于数值计算方法. 本文则基于流体动力学理论, 建立流场波系结构的近似理论计算方法, 基本思路为: 首先针对波 I_1, I_2 独自沿界面 OP_1 折射进行分析, 并获取不同扰动传播的速度; 然后, 依据界面两侧扰动传播快慢, 分析波 I_1, I_2 同时沿界面 OP_1 传播时流场中的波系作用, 进而计算得到波系结构.

2.1 波 I_1 独自沿界面 OP_1 折射

记与波 I_1 未扰动阵面和界面 OP_1 交点固连的坐标系为 \mathfrak{R} , 且两者作用形成反射波 R_1 和透射激波 T_1 . 改变流场初始参数, 各波的类型和参数会发生变化. 其中, 波 R_1 可能是激波或稀疏波. 在坐标系 \mathfrak{R} 中, 波 I_1 后流动可能为超声速或亚声速, 因此波 R_1 可能与波 I_1 相交于界面 OP_1 上的一点, 也可能沿界面 OP_1 超越波 I_1 并与其作用. 另外, 若波 T_1 具有更高的传播速度, 它也可能沿界面 OP_1 超越波 I_1 , 并沿界面发生折射, 所形成的透射波 (称为“前驱波”) 再与波 I_1 作用.

因此, 可以根据波 R_1, T_1 是否沿界面 OP_1 超越波 I_1 以及波 R_1 是稀疏波还是激波等, 将波 I_1 独自沿界面 OP_1 折射划分为五种不同的类型, 见图 2,

分别记为 RRS, RRE, IRS, IRE 和 IRP, 其中 RR, IR 分别表示正规、非正规; S, E 分别表示反射波为激波、稀疏波; P 表示前驱波. 接下来, 对每种折射的发生条件和求解方法进行阐述.

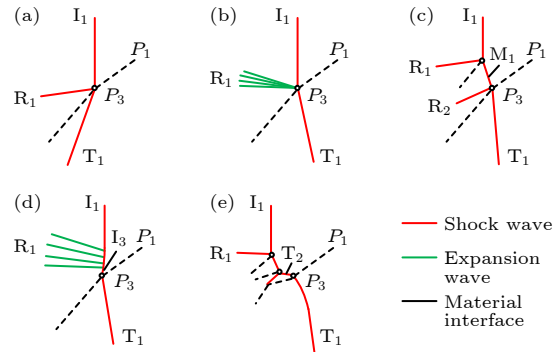


图 2 波 I_1 沿界面 OP_1 的折射类型 (a) RRS; (b) RRE; (c) IRS; (d) IRE; (e) IRP
 Fig. 2. Various refraction types of shock wave I_1 along the interface OP_1 : (a) RRS; (b) RRE; (c) IRS; (d) IRE; (e) IRP.

1) RRS 类型

当波 R_1, T_1 均未沿界面 OP_1 超越波 I_1 , 且波 R_1 为激波时, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生正规折射, 见图 2(a), 此时波 I_1, R_1, T_1 与界面 OP_1 相交于同一点, 将该折射类型记为 RRS. 利用正规折射理论, 即可求得波 R_1 和 T_1 的参数.

2) RRE 类型

当波 R_1, T_1 均未沿界面 OP_1 超越波 I_1 , 且波 R_1 为稀疏波时, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生正规折射, 见图 2(b), 此时, 波 I_1, R_1, T_1 与界面 OP_1 相交于同一点, 将该折射类型记为 RRE. 利用正规折射理论, 即可求得波 R_1 和 T_1 的参数.

3) IRS 类型

当波 T_1 未沿界面 OP_1 超越波 I_1 , 但波 R_1 沿界面超越波 I_1 并与其作用, 且波 R_1 为激波时, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生非正规折射, 见图 2(c). 此时, 在坐标系 \mathfrak{R} 中, 波 I_1 后流体速度接近或小于声速, 而波 R_1 为激波且相对当地流体以超声速传播, 因此波 R_1 会追赶上 I_1 , 两者作用形成新的激波 M_1 和物质界面, 波 M_1 沿界面 OP_1 发生折射, 将该折射类型记为 IRS.

在界面上方, 波 I_1, R_1 和 M_1 形成三波结构, 在与三波交点固连的坐标系中, 流体穿过波 I_1, R_1 和 M_1 后流动方向发生偏折, 记偏折角度分别为 δ_{I1}, δ_{R1} 和 δ_{M1} , 见图 3, 图中箭头表示流动方向. 对于任意的驻斜激波, 偏折角度 δ 满足:

$$\tan \delta = \pm \sqrt{\frac{2\gamma \cdot (Ma^+)^2}{(\gamma + 1)\xi + (\gamma - 1)}} \cdot \frac{\xi - 1}{\gamma \cdot (Ma^+)^2 - (\gamma - 1)}, \quad (1)$$

式中, Ma^+ 为波前流动马赫数, ξ 为波后与波前压力之比, 本文约定偏折角度以沿逆时针方向为正, 反向为负. 根据(1)式, 即可计算得到 δ_{I_1} , δ_{R_1} 和 δ_{M_1} . 另外, 在波 R_1 和 M_1 之间的流场区域, 跨越物质界面, 流场压力和法向速度保持连续, 满足界面相容条件.

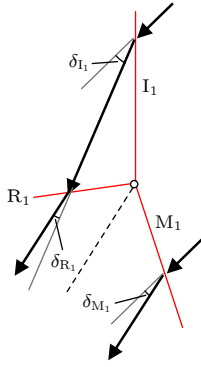


图 3 波 I_1 , R_1 和 M_1 组成三波结构
Fig. 3. Three wave structures of I_1 , R_1 and M_1 .

接下来, 分析波 M_1 沿界面 OP_1 的折射, 记两者交点为 P_3 . 若该折射为非正规类型, 则反射波 R_2 势必会追赶上波 R_1 并与之作用, 形成新的反射波 R_1 , 因此波 M_1 发生正规折射, 可利用正规折射理论描述.

最后, 假定波 M_1 阵面保持平直, 联立前述三波点以及点 P_3 附近流动关系式, 得到各波参数满足的方程组, 但方程数目比待求参数少一个, 需要再补充一个关系式. 鉴于波 R_2 是波 I_1 后流场中的扰动与 I_1 作用形成的, 而这些扰动也应参与到波 R_1 与 I_1 的作用中, 那么波 R_2 应为马赫波, 即点 P_3 附近的折射为双波结构, 有

$$p_{M_1} = p_{R_2}, \quad (2)$$

式中, p_{M_1} , p_{R_2} 分别为波 M_1 和 R_2 后流场压力. 至此, 联立(1)和(2)式即可计算流场中各波参数.

4) IRE 类型

当波 T_1 未沿界面 OP_1 超越波 I_1 , 但波 R_1 沿界面超越波 I_1 并与之作用, 且波 R_1 为稀疏波时, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生非正规折射, 见图 2(d). 此时, 在坐标系 \mathcal{R} 中, 波 I_1 后流体速度为亚声速, 而波 R_1 为稀疏波且相对当地流体以声速传播, 因此

波 R_1 会追赶上 I_1 , 两者发生作用, 将该折射类型记为 IRE.

在波 R_1 作用下, 波 I_1 后流体向界面下方膨胀, 波 I_1 的强度逐渐减小, 阵面逐渐向后弯曲, 此时流动是二维非定常的, 正规理论不再适用, 本文借助 GSD 理论进行求解. 记波 R_1 与 I_1 相互作用后形成的紧邻界面的波阵面为 I_3 , 波 I_3 与界面 OP_1 相交于点 P_3 . 图 4 给出了相邻时刻 t_1 和 t_2 波 R_1 与 I_1 作用示意图, 其中 θ_{I_3} 为波 I_3 传播方向与 x 轴夹角, β_{I_3} 为波 I_3 与波 R_1 交点轨迹与 x 轴夹角.

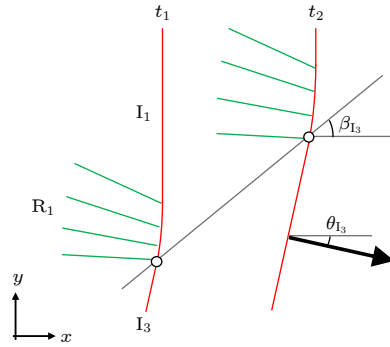


图 4 不同时刻波 I_1 与 R_1 作用
Fig. 4. Interaction between I_1 and R_1 at different times.

根据 GSD 理论, 有

$$\theta_{I_3} = \theta_{I_1} + \int_{Ma_{I_1}}^{Ma_{I_3}} \frac{1}{Ac_G} dMa, \quad (3)$$

$$\beta_{I_3} = \theta_{I_3} + \arctan \sqrt{-1/\eta(Ma_{I_3})}, \quad (4)$$

式中, θ_{I_1} 为波 I_1 传播方向与 x 轴夹角, 且 $\theta_{I_1}=0$; Ma_{I_1} , Ma_{I_3} 分别为波 I_1 , I_3 马赫数; A , c_G , η 均为马赫数 Ma 的函数, 其中

$$\frac{dA}{dMa} = \eta(Ma) \frac{A}{Ma}, \quad c_G = \sqrt{-\frac{Ma}{A} \frac{dMa}{dA}},$$

$$\eta(Ma) = -\frac{2(Ma^2 - 1) + \sqrt{\eta_1 \eta_2}}{\eta_1(Ma^2 - 1)} \times \left[2Ma^2 + \sqrt{\frac{\eta_1}{\eta_2}} (Ma^2 + 1) \right],$$

$$\eta_1 = 2\gamma Ma^2 - (\gamma - 1), \quad \eta_2 = 2 + (\gamma - 1) Ma^2.$$

在界面附近, 波 I_3 与波 R_1 交点轨迹应与波 I_3 后界面平行, 否则沿界面会继续有新的扰动形成并与波 I_3 作用. 记界面穿越波 I_3 后偏折角度为 δ_{I_3} , 则有

$$\beta_{I_3} = \varphi + \delta_{I_3}. \quad (5)$$

δ_{I_3} 可按(1)式进行计算. 另外, 波 I_3 与透射波 T_1

相交于点 P_3 , 且波后流场压力相等. 联立 (1) 式和 (3)—(5) 式, 即可计算波 I_3 和 T_1 参数.

5) IRP 类型

当波 T_1 沿界面 OP_1 超越波 I_1 传播时, 波 T_1 沿界面发生折射形成前驱波 T_2 , 波 T_2 继续与波 I_1 作用形成五波或四波结构, 见图 2(e), 将该折射类型记为 IRP. 虽然波 T_1 沿界面的折射可以借助于 GSD 理论近似描述, 但波 T_1 的参数暂无法理论求解. 考虑到波 I_2 也位于介质 2 中, 那么它势必会沿界面 OP_1 超越波 I_1 , 此时波 T_2 则是由波 I_2 沿界面 OP_1 折射产生的, 而波 I_2 沿界面折射可根据 2.2 节理论方法进行计算.

2.2 波 I_2 独自沿界面 OP_1 折射

界面 OP_1 与 x 轴夹角 φ 满足 $0 \leq \varphi \leq 90^\circ$, 波 I_2 传播方向平行于或者远离界面 OP_1 , 因此波 I_2 独自沿界面 OP_1 的折射始终为非正规折射, 可能的折射类型为 IRE 和 IRP, 见图 5.

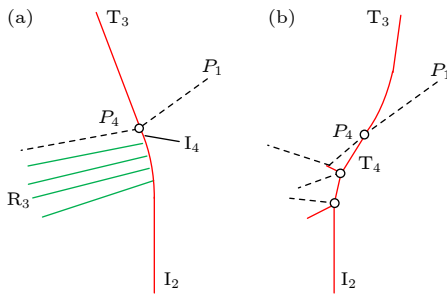


图 5 波 I_2 沿界面 OP_1 的折射类型 (a) IRE; (b) IRP
Fig. 5. Various refraction types of shock wave I_2 along the interface OP_1 : (a) IRE; (b) IRP.

对于 IRE 类型, 见图 5(a), 反射稀疏波 R_3 沿波 I_2 阵面向下方传播, 与图 2(d) 的情形相似但传播方向相反. 记波 R_3 与 I_2 作用后形成的紧邻界面的波阵面为 I_4 , 波 I_4 参数满足关系式:

$$\theta_{I4} = \theta_{I2} - \int_{Ma_{I2}}^{Ma_{I4}} \frac{1}{Ac_G} dMa, \quad (6)$$

$$\beta_{I4} = \theta_{I4} - \arctan \sqrt{-1/\eta (Ma_{I4})} = \varphi + \delta_{I4}. \quad (7)$$

式中, θ_{I2} , θ_{I4} 为波 I_2 和 I_4 传播方向与 x 轴夹角, 且 $\theta_{I2} = 0$; Ma_{I2} , Ma_{I4} 分别为波 I_2 , I_4 马赫数; β_{I4} 为波 I_4 与波 R_3 交点轨迹与 x 轴夹角; δ_{I4} 为界面穿越波 I_4 后的偏折角度. 另外, 波 I_4 与透射波 T_3 相交于点 P_4 , 且波后流场压力相等. 联立 (1) 式和 (5)—(7) 式, 即可计算波 I_4 和 T_3 参数.

对于 IRP 类型, 见图 5(b), 在该情形下波 I_1 会超越波 I_2 传播, 并在界面折射形成透射波 T_4 与 I_2 作用, 其中波 I_1 的折射可根据 2.1 节理论计算, 进而计算整体的波系结构.

2.3 波 I_1 和 I_2 沿界面 OP_1 作用

记波 I_1 , I_2 未扰动阵面与界面 OP_1 的交点分别为 P_3^* 和 P_4^* , 各波独自沿界面折射时前沿波阵面与界面的交点分别为 P_3 和 P_4 . 这些点沿界面的运动速度 D_3^* , D_4^* , D_3 和 D_4 , 表征了流场中不同扰动沿界面的传播速度. 其中, D_3^* , D_4^* 可直接利用波 I_1 , I_2 阵面运动速度计算. 针对 RRE, RRS, IRE, IRS 等折射类型, 则依据前文理论方法计算得到波阵面参数, 再计算 D_3 , D_4 . 当波 I_1 独自沿界面发生 IRP 折射时, 尽管无法准确计算 D_3 , 但通常有 $D_3^* < D_3 < D_4^*$ 和 $D_3^* < D_3 < D_4$; 当波 I_2 独自沿界面发生 IRP 折射时, 则有 $D_4^* < D_4 < D_3^*$ 和 $D_4^* < D_4 < D_3$.

根据上述速度的相对大小, 可以将作用划分为三种不同的情形. 第一种情形, $D_3 > D_4$ 且 $D_3 > D_4^*$, 此时界面下方扰动传播落后于界面上方的扰动, 波 I_1 独自沿界面 OP_1 折射, 所形成的透射波 T_1 再与波 I_2 发生相互作用. 图 6 给出了几种典型的波系结构示意图. 其中, 波 I_1 折射类型仅可能为 RRE, RRS, IRE 或 IRS, 可基于前文理论方法求解. 波 T_1 与波 I_2 作用则属于典型的双激波作用, 当两者相向运动时, 形成的反射波 R_3 , R_4 通常是激波, 可利用斜激波关系式和界面相容条件进行求解; 当两者远离时, 波 R_3 , R_4 可能是稀疏波, 由于其波前流场是亚声速, 普朗特-迈耶流动理论不再适用, 需借助 GSD 理论近似计算波 R_3 与 T_1 , R_4 与 I_2 的相互作用.

第二种情形, $D_4 > D_3$ 且 $D_4 > D_3^*$, 此时界面下方扰动传播超越界面上方的扰动, 波 I_2 独自沿界面 OP_1 折射, 所形成的透射波 T_2 与波 I_1 相向运动并发生相互作用. 图 7 给出了典型的波系结构示意图, 可利用前文所述激波折射和双激波作用理论计算波系参数.

在第一、二种情形中, 扰动从界面一侧的流场传播到另一侧. 除此之外, 则属于第三种情形, 即界面两侧扰动均会跨越界面向另一侧运动, 波 I_1 , I_2 在界面附近的传播发生相互影响. 此类情形介于第一、二种情形之间, 本文借鉴 Catherasoo 思路进

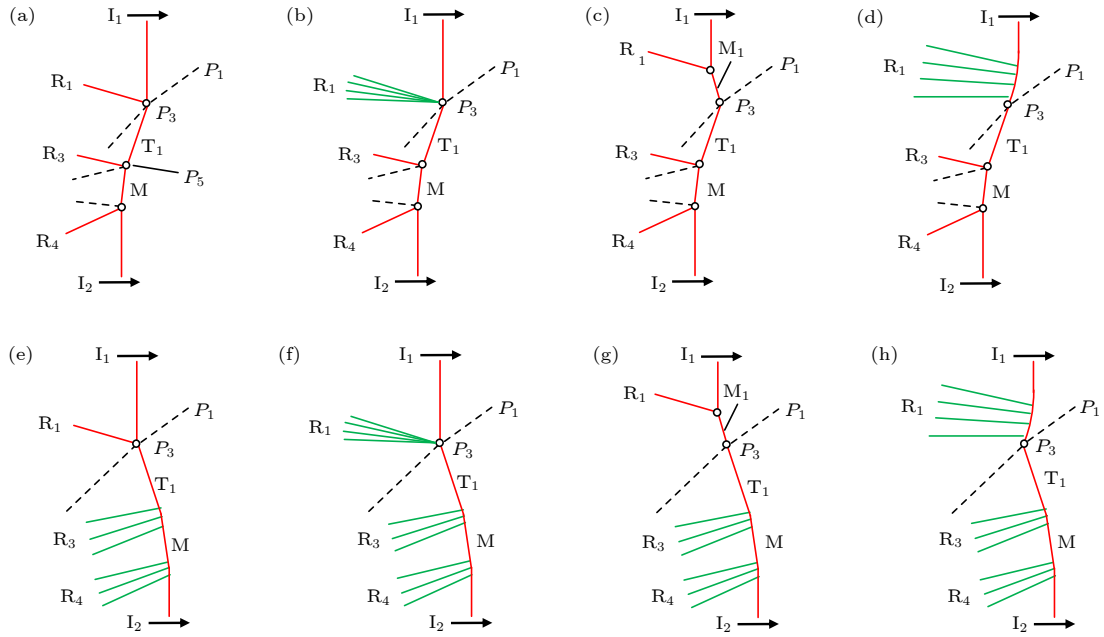


图 6 第一种情形下波 I_1, I_2 沿界面 OP_1 的相互作用

Fig. 6. Interaction of I_1 and I_2 along the interface OP_1 under case 1.

行求解. 以 $D_4^* > D_3^*$ 为例, 根据 GSD 简单波跨越界面的传播行为, 波系结构存在两种不同的类型, 见图 8. 波 I_2 在波后稀疏波的作用下强度衰减、波阵面弯曲, 波后稀疏波可能包括沿 I_2 阵面向上传播的 R_3 和向下传播的 R_4 , 见图 8(a), 也可能仅包含向下传播的 R_4 , 见图 8(b). 波 I_1 与跨越界面的扰动作用形成三波结构.

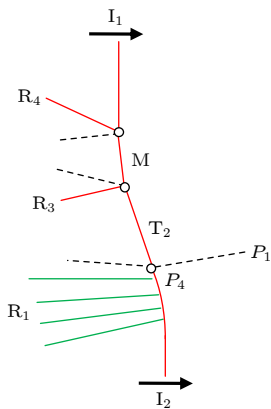


图 7 第二种情形下波 I_1, I_2 沿界面 OP_1 的相互作用

Fig. 7. Interaction of I_1 and I_2 along the interface OP_1 under case 2.

记界面上、下两侧紧邻界面的波阵面分别为 M_1 和 I_5 , 为了建立两者参数之间的关系, 将 GSD 理论中的激波动力关系式推广到波前流场声速 c 和比热比 γ 非均匀的情形,

$$\frac{dMa}{Ma} = \frac{\nu^2 (1 - g \tan^2 \chi)}{\tan^2 \chi - \nu^2} \frac{dc}{c} - \frac{\nu^2 f \tan^2 \chi}{\tan^2 \chi - \nu^2} d\gamma, \quad (8)$$

式中, χ 表示激波传播方向与界面的夹角,

$$\nu^2 = \frac{1}{Ma^2} \frac{Ma^2 - 1}{\lambda},$$

$$\lambda = \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) \left(1 + 2\mu + \frac{1}{Ma^2} \right),$$

$$f = \left(1 + \frac{2}{\gamma + 1} \frac{1 - \mu^2}{\mu} \right) \frac{\mu - \gamma}{\gamma(\gamma + 1)},$$

$$\mu = \left[\frac{(\gamma - 1) Ma^2 + 2}{2\gamma Ma^2 - (\gamma - 1)} \right]^{1/2}.$$

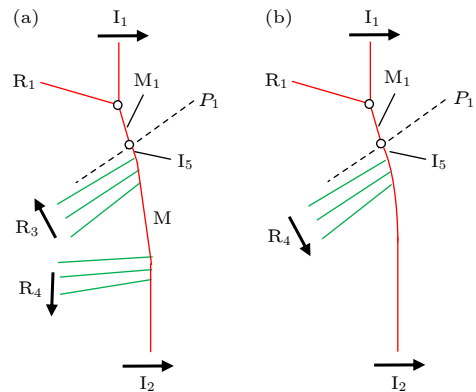


图 8 第三种情形下波 I_1, I_2 沿界面 OP_1 的相互作用

Fig. 8. Interaction of I_1 and I_2 along the interface OP_1 under case 3.

沿跨越物质界面的方向对 (8) 式积分, 即可建立波 M_1 和 I_5 之间的参数关系. 而波 M_1 和 I_5 又分别与波 I_1 和 I_2 作用, 由此实现了界面上下两侧流场中扰动的耦合.

至此, 本文针对二维平面激波与物质界面作用, 分析了流场中的波系发展, 建立了完整的波系结构理论计算方案.

2.4 本文理论方法与 Catherasoo 理论方法的不同之处

Catherasoo 理论方法是根据 GSD 简单波能否跨越物质界面传播, 对流场作用的波系类型进行划分, 实质上是考虑物质界面一侧流场中的扰动是否可以影响另一侧流场的发展. 在此基础上, 本文理论方法又对与激波位于界面同一侧的扰动进行了分析, 区分扰动强弱以及其是否可以追赶上激波阵面, 因此较前者可以更加全面地识别流场中的波系类型.

同时, Catherasoo 完全基于 GSD 理论计算激波前沿阵面运动, 无法获取波后流场中的波系信息, 诸如反射波. 本文方法除了处理激波阵面在波后稀疏波作用下逐渐弯曲的情形外, 大都采用 Euler 方程精确解来描述不同波、界面之间的作用, 诸如斜激波关系式、界面相容条件和普朗特-迈耶关系式等, 因此, 可以获取给定波系结构更为准确和丰富的参数. 后文将通过两种方法的计算结果进行对比, 进一步阐释两者的不同.

3 结果与讨论

选取不同的工况条件, 利用本文理论方法对流场中波系结构进行计算, 并将计算结果与实验数据、数值模拟结果和 Catherasoo 理论方法结果进行对比, 检验本文理论方法的合理性.

3.1 Luo 激波管实验

Luo 等 [18] 利用激波管, 开展了马赫数为 1.17 的平面激波与空气中正方形 SF_6 气泡作用实验. 在气泡下方区域的波系未传播到达上方区域之前, 流场中波系发展可利用本文方法加以分析. 取点 O 与坐标系原点重合且 $\varphi = 0$, 初始时刻流场压力为 1.01×10^5 Pa, 空气和 SF_6 密度分别为 1.18 kg/m^3 和 4.88 kg/m^3 , 比热比分别为 1.40, 1.11, 波 I_1 后压力为 1.45×10^5 Pa.

图 9 给出了理论与数值计算得到的 $t = 0.10 \text{ ms}$ 时刻流场波系结构, 与文献 [18] 中实验图像基本一致, 其中数值模拟采用 ANSYS Autodyn Euler 求解器计算, 网格尺寸为 0.05 mm . 在该工况下, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生 IRE 类型折射, 透射波 T_1 与波 I_2 作用形成波 M 和反射波 R_3, R_4 . Catherasoo 方法仅能计算流场中激波前沿阵面即波 T_1 和 M 的信息, 本文方法还可同时给出波 R_3, R_4 以及波后物质界面的信息.

记波 M 与 T_1 相交于点 P_5 , 与 I_2 相交于点 P_6 , 波 T_1 阵面、点 P_5 轨迹、点 P_6 轨迹等与初始界面

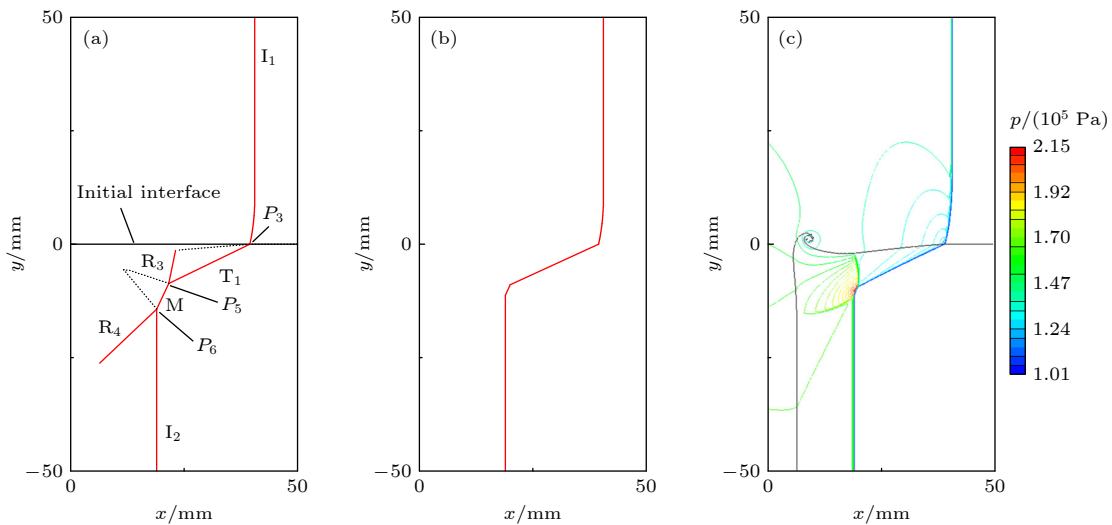


图 9 $t = 0.10 \text{ ms}$ 时刻波系结构 (a) 本文方法; (b) Catherasoo 方法; (c) 数值结果

Fig. 9. Wave structure at $t = 0.10 \text{ ms}$: (a) Our own method; (b) Catherasoo's method; (c) numerical results.

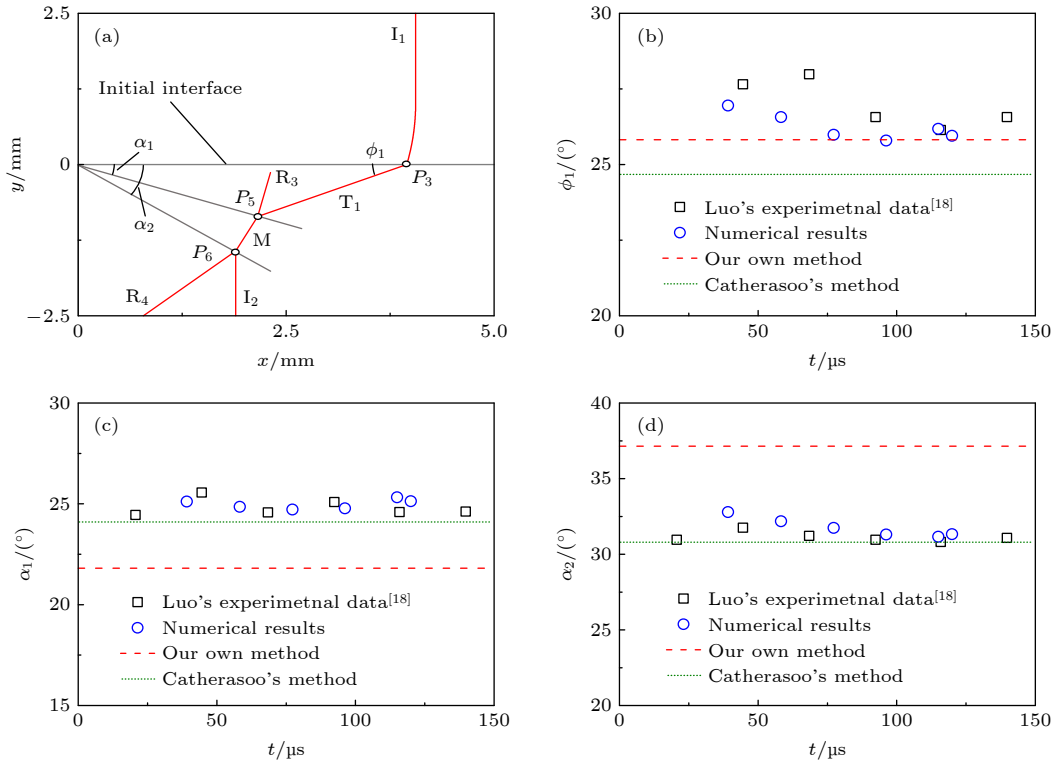


图 10 波系结构参量随时间变化 (a) 波系结构; (b) ϕ_1 ; (c) α_1 ; (d) α_2

Fig. 10. Variation of wave structure parameters with time: (a) Wave structure; (b) ϕ_1 ; (c) α_1 ; (d) α_2 .

OP_1 的夹角分别记为 ϕ_1 , α_1 和 α_2 , 见图 10(a). Luo 等^[18] 从实验图像中测量了夹角 ϕ_1 , α_1 和 α_2 的数值, 见图 10(b)—(d), 图中还给出了理论与数值结果. 本文方法和 Catherasoo 方法均基于流动自相似, 波系结构尺寸随时间等比增大, 所得各夹角数值则不随时间变化, 实验数据和数值结果也大致体现了这一趋势.

对于 IRE 类型折射, Catherasoo 方法利用 (8) 式描述物质界面两侧激波参数关系, 本文方法则采用了界面两侧流场压力连续的条件, 两者所得 ϕ_1 值分别为 24.7° 和 25.8° , 见图 10(b), 本文理论结果与实验结果更为接近, 与其平均值偏差为 -4.30% , 优于 Catherasoo 结果的 -8.55% .

本文方法计算得到 $\alpha_1 = 21.8^\circ$ 和 $\alpha_2 = 37.2^\circ$, 其中 α_1 较实验数据偏小, 而 α_2 则偏大, 与实验数据平均值偏差分别为 -12.1% 和 19.3% ; Catherasoo 方法计算得到 $\alpha_1 = 24.1^\circ$ 和 $\alpha_2 = 30.8^\circ$, 与实验数据平均值偏差分别为 -2.85% 和 -1.06% . 由此可见, 对于波 T_1 和 I_2 作用, 本文方法和 Catherasoo 方法结果具有较为明显的差别, 并且 Catherasoo 方法结果更接近实验数据, 见图 10(c) 和图 10(d). 导致这种差别的原因可能有两个方面: 一是本文方法

和 Catherasoo 方法计算得到的波 T_1 参数不一致; 二是本文方法和 Catherasoo 方法在求解波 T_1 与 I_2 作用时的理论方法不同.

首先, 分析波 T_1 参数不一致的影响. 表 1 列出了波 T_1 后流场压力 p_{T1} 以及速度沿 x 和 y 方向分量 u_{T1} 和 v_{T1} 的理论计算结果, 基于表中所列波 T_1 参数, 分别利用本文方法和 Catherasoo 方法重新计算波 T_1 与 I_2 作用, 结果见表 2, 表中还给出了波 M 后流场压力 p_M . 对于相同的波 T_1 参数, 本文方法得到的 p_M 均明显大于 Catherasoo 方法, 而 p_M 越大, 波 M 传播速度也越大, 点 P_5 和 P_6 沿波 M 阵面运动速度也就越快, 因此, 本文方法得到的 α_1 比 Catherasoo 方法结果小, α_2 则比 Catherasoo 方法结果大. 对于不同的波 T_1 参数, 同一理论方法结果的偏差则明显小于相同波 T_1 参数下不同理论方法结果的偏差, 这表明与波 T_1 参数不一致相比, 理论方法的不同具有更显著的影响.

表 1 波 T_1 参数的理论计算结果
Table 1. Theoretical results for parameters of T_1 .

计算方法	$p_{T1}/(10^5 \text{ Pa})$	$u_{T1}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$	$v_{T1}/(\text{m}\cdot\text{s}^{-1})$
本文	1.32	15.8	-32.6
Catherasoo	1.21	9.95	-21.6

表 2 波 T_1 与 I_2 作用的理论计算结果

 Table 2. Theoretical results for interaction between T_1 and I_2 .

波 T_1 参数	计算方法	$\alpha_1/(\circ)$	$\alpha_2/(\circ)$	$p_M/(10^5 \text{ Pa})$
$p_{T1} = 1.32 \times 10^5 \text{ Pa}$	本文	21.8	37.2	2.45
	Catherasoo	24.9	32.0	2.23
$p_{T1} = 1.21 \times 10^5 \text{ Pa}$	本文	21.3	36.6	2.37
	Catherasoo	24.1	30.8	2.17

在计算波 T_1 与 I_2 作用时, 本文方法和 Catherasoo 方法均基于图 10(a) 中的五波结构开展计算, 且均假定波 M 阵面保持平直, 两者的区别仅在于对点 P_5 和 P_6 附近各波关系的描述: 前者基于斜激波关系式 (1) 式和界面相容条件构建三波理论, 来建立波 T_1 , M 和 R_3 以及波 M, R_4 和 I_2 之间的关系; 后者则直接利用 GSD 理论建立波 T_1 和 M、波 M 和 I_2 之间参数关系, 忽略了 R_3 和 R_4 的影响,

$$\tan(\theta_M - \theta_{T1}) = \frac{\sqrt{(Ma_M)^2 - (M_{T1})^2} \sqrt{(A(M_{T1}))^2 - (A(Ma_M))^2}}{A(Ma_M) Ma_M + A(M_{T1}) M_{T1}}, \quad (9)$$

$$\tan(\theta_{I2} - \theta_M) = \frac{\sqrt{Ma_{I2}^2 - Ma_M^2} \sqrt{(A(Ma_M))^2 - (A(Ma_{I2}))^2}}{A(Ma_{I2}) Ma_{I2} + A(Ma_M) Ma_M}, \quad (10)$$

式中, Ma_{T1} , Ma_M , Ma_{I2} 分别为波 T_1 , M 和 I_2 的马赫数; θ_{T1} , θ_M , θ_{I2} 则为各波传播方向与 x 轴夹角; A 同 (3) 式. 三波理论中斜激波关系式和界面相容条件均是依据流体动力学方程得到的精确解, 而 GSD 理论则是基于波阵面几何效应近似描述激波传播, 本身是一种近似理论, 因此对于三波结构求解, 三波理论比 GSD 理论更为精确.

选取波 T_1 参数 $p_{T1} = 1.32 \times 10^5 \text{ Pa}$, 分别利用三波理论和 GSD 理论, 计算点 P_5 附近波 M 与 T_1 传播方向夹角 $|\theta_M - \theta_{T1}|$, 以及点 P_6 附近波 M 与 I_2 传播方向夹角 $|\theta_M - \theta_{I2}|$ 随波 M 后流场压力 p_M 的变化, 见图 11, 可以发现, 三波理论和 GSD 理论计算结果的相对大小随着 p_M 的增大发生变化. 以图 11(a) 为例, 当 $p_M \leq 2.60 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, 对于相同的 p_M , GSD 理论得到的 $|\theta_M - \theta_{T1}|$ 大于三波理论结果, 表明为了使波 M 阵面相对于波 T_1 阵面偏折相同的角度, 依据 GSD 理论得到的波 M 强度小于三

波理论结果; 当 $p_M \geq 2.60 \times 10^5 \text{ Pa}$ 时, 情况则恰好相反. 图 11(b) 也展现了类似的变化规律. 本节所考虑的工况正好位于图 11 中左侧区域, 这与表 2 中 p_M 的三波理论计算结果大于 GSD 理论结果是一致的.

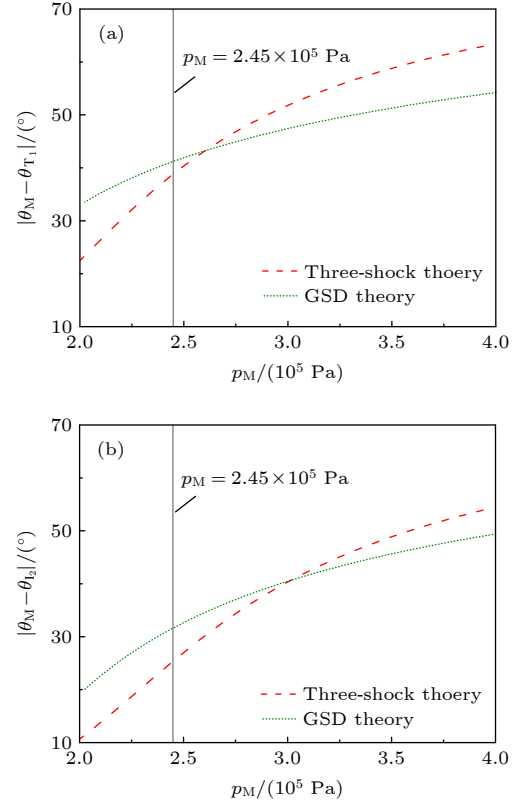


图 11 $|\theta_M - \theta_{T1}|$ 和 $|\theta_M - \theta_{I2}|$ 随 p_M 的变化 (a) $|\theta_M - \theta_{T1}|$; (b) $|\theta_M - \theta_{I2}|$.
Fig. 11. Variations of $|\theta_M - \theta_{T1}|$ and $|\theta_M - \theta_{I2}|$ with p_M : (a) $|\theta_M - \theta_{T1}|$; (b) $|\theta_M - \theta_{I2}|$.

基于前述分析, 在计算波 T_1 与 I_2 作用时, 原则上本文方法得到的 α_1 和 α_2 应该更为准确, 但图 10(c) 和图 10(d) 中却显示 Catherasoo 方法结果与实验数据更为接近. 考虑到流场发展是不同波相互作用的结果, 而实际流场中的波系远比图 10(a) 中更为复杂, 见图 9(c), 在波后流场中还存在大量的压缩波或稀疏波. 初始时刻, 波 I_1 与界面 OP_2 作用形成的反射波 R 为激波, 其波后压力 $p_R = 1.61 \times 10^5 \text{ Pa}$, 大于波 I_1 后压力, 其后方区域内的流体势必会向上膨胀, 并诱导产生反射稀疏波在波 R 后区域内传播, 这些稀疏波会在一定程度上对界面下方波 T_1 与 I_2 的作用起到衰减作用. 本文方法和 Catherasoo 方法均无法考虑此稀疏效应的影响, 因此本文方法得到的波 M 强度偏高, 导致

了 α_1 理论结果较实验数据偏小, α_2 则偏大; 但 Catherasoo 方法由于采用 GSD 近似理论, 所得到的波 M 强度比本文方法偏低, α_1 和 α_2 的结果才显得与实验数据更为接近, 这种“接近”是由于 GSD 理论自身的近似引起的, 并非是考虑了真实流场中的稀疏效应. 由图 11 可知, GSD 理论结果与三波理论结果的相对大小会随着波参数发生变化, 在某些工况条件下, 本文方法会优于 Catherasoo 方法, 后文的数据也表明了这一点.

另外, 图 10 中数值计算得到的 ϕ_1 , α_1 和 α_2 值与实验数据基本吻合, 平均值偏差分别为 -2.76%, 0.70% 和 1.99%, 而理论与数值结果对比情况也与

前述结论一致, 验证了数值模拟的合理性. 接下来, 利用数值方法针对不同类型工况开展计算, 并与理论结果进行对比.

3.2 入射波 I_1 马赫数 $Ma_{I1} = 2.00$, 界面两侧介质密度之比 $\rho_2/\rho_1 = 0.25$

选取波 I_1 马赫数 $Ma_{I1}=2.00$, 波后压力 $p_{I1} = 4.50 \times 10^5$ Pa, 初始时刻介质 1, 2 密度分别为 1.00 kg/m^3 和 0.25 kg/m^3 , 比热比均为 1.40, 波前流场压力为 1.00×10^5 Pa. 此时, 波 I_1 与竖直界面 OP_2 作用形成反射稀疏波 R, 且波 R 后压力 $p_R = 2.87 \times 10^5$ Pa, 波 I_2 传播速度为 1206.96 m/s , 大于

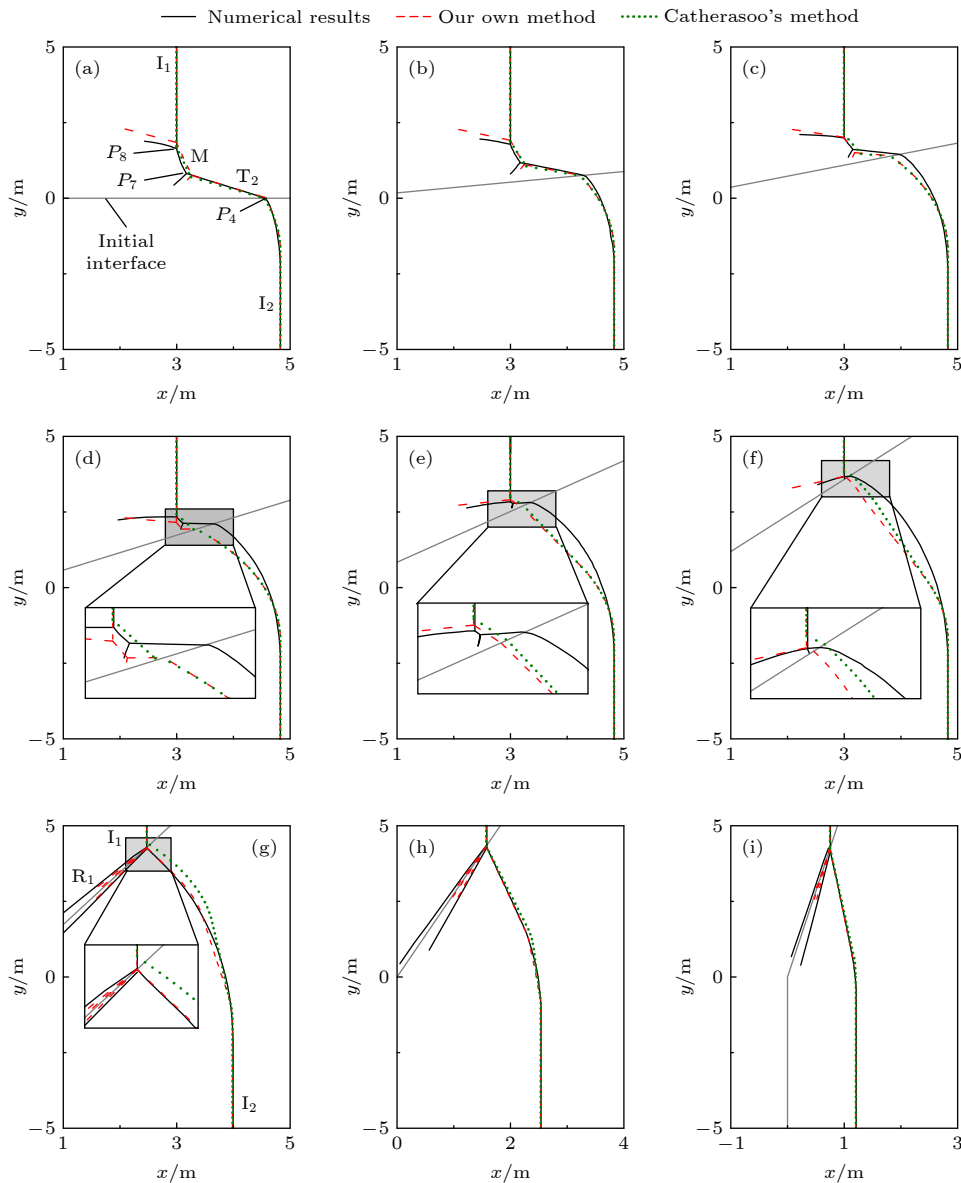


图 12 不同 φ 值下的波系结构 ($Ma_{I1} = 2.00$, $\rho_2/\rho_1 = 0.25$) (a)–(i) 分别对应 $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$

Fig. 12. Wave structures for different φ ($Ma_{I1} = 2.00$, $\rho_2/\rho_1 = 0.25$). Panels (a)–(i) correspond to $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$, respectively.

波 I_1 传播速度 (748.33 m/s). 针对 φ 取 $0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$ 等不同工况, 利用本文方法计算得到了流场中波系结构, 见图 12. 图 12 中黑色实线、红色虚线和绿色点线分别表示数值模拟、本文方法和 Catherasoo 方法结果, 并对部分图中灰色区域进行了放大, 图 12(a)–(f) 对应时刻 $t = 4.00$ ms, 图 12(g)–(i) 分别对应 $t = 3.30, 2.10, 1.00$ ms. 数值计算网格尺寸为 5.00 mm.

当 $0^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$ 时, 流场中波系结构类型与 3.1 节情形类似, 见图 12(a)–(d), 但此时是波 I_2 而非 I_1 独自沿界面 OP_1 发生 IRE 类型折射, 所形成的透射波 T_2 再与波 I_1 作用形成五波结构. 为便于后文进一步的比较, 将此波系类型简记为 WI-1. 随着 φ 逐渐增大, 波 I_2 阵面与界面 OP_1 之间的夹角不断增大, 波 I_2 后稀疏波的衰减作用逐渐变强, 导致透射波 T_2 强度减弱, 界面上方五波结构也不断减小, 理论与数值结果体现出了相同的变化趋势. 由于本文方法和 Catherasoo 方法均利用 GSD 理论描述波 I_2 在波后稀疏波作用下逐渐弯曲的过程, 并且忽略了波后更远处扰动的影响, 因此界面下方波 I_2 阵面的弯曲部分与数值结果并不完全重合, 见图 12(c) 和图 12(d).

记波 M 与波 T_2 相交于点 P_7 , 波 M 与波 I_1 相

交于点 P_8 , 波 T_2 阵面、点 P_7 轨迹、点 P_8 轨迹等与初始界面 OP_1 的夹角分别记为 ϕ_2, α_3 和 α_4 , 见图 13, 点 P_7 与 P_8 间距离记为 d_{7-8} , 点 P_4 的位移记为 r_4 . 表 3 列出了本文方法与 Catherasoo 方法得到的各变量数值及其与数值结果的相对偏差. 在 $0^\circ \leq \varphi \leq 30^\circ$ 范围内, 与 Catherasoo 方法相比, 除了 α_4 外, 本文方法所得结果大都与数值结果更为接近, 尤其是在 $\varphi = 30^\circ$ 工况下, Catherasoo 方法得到的 α_3 和 d_{7-8} 的偏差接近或超过 100%. 随着 φ 增加, 理论与数值结果偏差也整体呈现增大趋势.

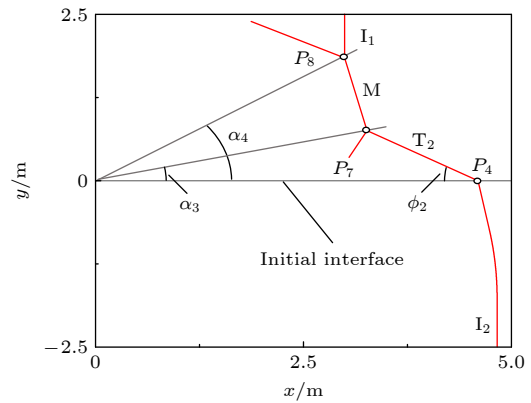


图 13 波系结构变量示意图

Fig. 13. Diagram for wave structure parameters.

表 3 不同 φ 值下波系结构变量 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$)

Table 3. Wave structure parameters for different φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$).

$\varphi/(^\circ)$	计算方法	ϕ_2		α_3		α_4		d_{7-8}		r_4	
		结果/ $^\circ$	偏差/%	结果/ $^\circ$	偏差/%	结果/ $^\circ$	偏差/%	结果/m	偏差/%	结果/m	偏差/%
0	本文	29.4	-4.42	13.0	-10.1	31.7	10.6	1.13	34.2	4.60	0.86
	Catherasoo	28.4	-7.89	12.2	-15.6	29.5	3.01	1.02	22.0	4.54	-0.31
10	本文	29.4	-4.62	8.97	-14.3	22.6	8.86	0.84	34.0	4.33	-0.51
	Catherasoo	28.2	-8.54	7.89	-24.6	22.1	6.53	0.87	38.9	4.29	-1.33
20	本文	29.4	-5.12	5.33	-25.4	13.9	2.43	0.54	33.0	4.09	-3.34
	Catherasoo	28.1	-9.28	3.97	-44.4	15.4	12.8	0.72	77.5	4.06	-3.89
30	本文	29.4	-9.64	2.01	-54.1	5.74	-27.5	0.24	2.59	3.88	-8.68
	Catherasoo	28.1	-13.7	0.37	-91.7	9.12	15.0	0.59	148.7	3.86	-9.00
40	本文	—	—	—	—	4.17	25.9	—	—	4.16	-5.15
	Catherasoo	—	—	—	—	5.02	51.4	—	—	4.22	-3.88
50	本文	—	—	—	—	0.82	22.7	—	—	4.74	-1.27
	Catherasoo	—	—	—	—	1.99	197.9	—	—	4.86	1.22
60	本文	—	—	—	—	—	—	—	—	4.94	-0.06
	Catherasoo	—	—	—	—	0.71	—	—	—	5.05	2.12
70	本文	—	—	—	—	—	—	—	—	4.60	-0.85
	Catherasoo	—	—	—	—	—	—	—	—	4.60	-0.85
80	本文	—	—	—	—	—	—	—	—	4.31	-0.98
	Catherasoo	—	—	—	—	—	—	—	—	4.31	-0.98

当 $\varphi = 40^\circ$ 时, 见图 12(e), 数值结果表明流场波系类型仍为 WI-1. 但是, 本文方法和 Catherasoo 方法得到的波系类型则发生变化, 此时界面两侧流场相互影响, 界面上方为三波结构, 与图 8(b) 相同, 将该波系类型简记为 WI-2. 当 $\varphi = 50^\circ$ 时, 见图 12(f), 数值结果表明波 I_1 和 I_2 沿界面的相互作用相较于之前的工况更加靠近界面, 界面上方仍存在两波作用, 但是通过分析流场压力云图 (见图 14) 发现, 该波系类型与 WI-1 并不相同: 在 $\varphi = 40^\circ$ 工况中, 受到波 I_1 后稀疏波的作用, 界面下方紧邻激波阵面后的压力沿着波阵面由上往下单调变化; 在 $\varphi = 50^\circ$ 工况中, 紧邻激波阵面后的压力沿着波阵面则是先减小后增大, 表明界面下方存在两组亚声速稀疏波, 该波系类型与图 8(a) 有一些相似, 但是其界面上方并非三波结构, 将此波系类型简记为 WI-3. 本文方法和 Catherasoo 方法得到的波系类型, 则与图 8(a) 相同, 将该波系类型简记为 WI-4.

在 $\varphi = 40^\circ$ 和 50° 工况下, 波系类型的理论结果与数值结果不一致, 原因可能有如下两点: 1) 本文方法和 Catherasoo 方法均利用 GSD 理论近似计算波 I_2 阵面在波后稀疏波作用下的弯曲, 当 φ 值较大时所得到的透射波 T_2 强度偏小, 减弱了界面上方激波作用; 2) 本文方法和 Catherasoo 方法均未考虑波后更远处流场扰动对于折射点附近作用的影响, 诸如界面不稳定性诱发的涡旋结构、波 I_1 后流体向波 R 后膨胀等. 此时, 理论计算得到的波系中不包含点 P_7 , 故表 3 中仅列出了 α_4 和 r_4

的结果. 对于 α_4 , 本文方法明显优于 Catherasoo 方法; 对于 r_4 , 本文方法则略差于 Catherasoo 方法.

当 $\varphi = 60^\circ$ 时, 见图 12(g), 本文方法得到的波系结构与数值结果基本重合. 此时波 I_1 独自沿界面发生 RRE 类型的折射, 形成反射稀疏波 R_1 和透射激波 T_1 , 本文方法和数值模拟得到的波 R_1 后压力均为 3.26×10^5 Pa. 在界面下方, 波 T_1 与 I_2 作用, 由于两波彼此远离, 相互作用所形成的反射波为稀疏波, 它们追赶上波 T_1 和 I_2 , 并使 T_1 和 I_2 的波阵面逐渐发生弯曲, 整个波系类型与图 6(f) 相同, 将此波系类型简记为 WI-5. 而 Catherasoo 方法则未能准确识别流场中波系类型, 所给出的波系类型仍为 WI-4, 与数值结果并不一致. 此时, 波系结构中不再包含点 P_7, P_8 , 故表 3 中仅列出了 r_4 的结果, 与 Catherasoo 方法相比, 本文方法计算得到的 r_4 与数值结果更为接近.

当 $\varphi = 70^\circ$ 和 80° 时, 见图 12(h) 和图 12(i), 流场中波系类型仍为 WI-5, 本文方法与 Catherasoo 方法得到的波系结构与数值结果基本一致, 两种方法计算得到的 r_4 与数值结果偏差也一致.

图 15 给出了 $\phi_2, \alpha_3, \alpha_4, d_{7-8}$ 和 r_4 等变量的理论与数值结果的相对偏差绝对值随 φ 的变化. 整体而言, 对于 ϕ_2, α_3 , 本文方法优于 Catherasoo 方法; 对于 α_4, d_{7-8} 和 r_4 , 除了 $\varphi = 0^\circ$ 以外, 本文方法大都优于 Catherasoo 方法, 或与之接近.

接下来, 在图 12 所考虑工况的基础上, 对 φ 取值适当细化, 尤其是在波系类型发生变化的范围

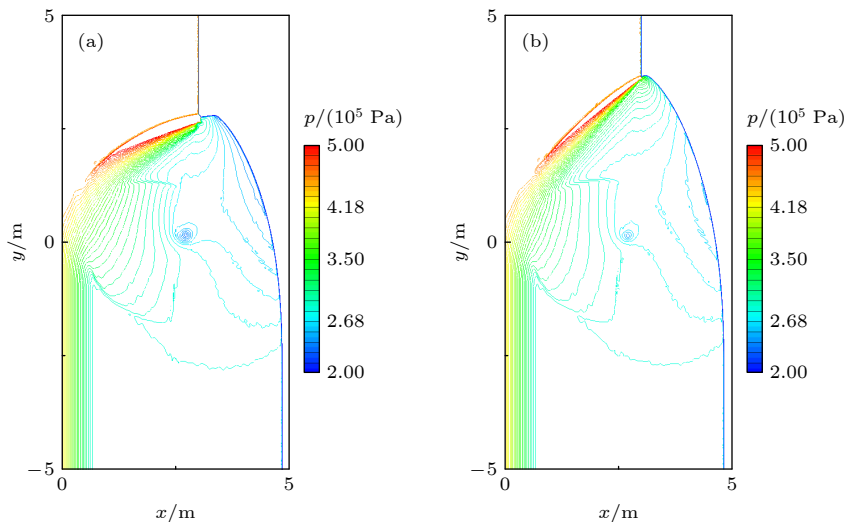


图 14 $t = 4.00$ ms 时流场压力分布数值结果 ($Ma_{i1} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$): (a) $\varphi = 40^\circ$; (b) $\varphi = 50^\circ$.
Fig. 14. Numerical results for field pressure at $t = 4.00$ ms ($Ma_{i1} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$): (a) $\varphi = 40^\circ$; (b) $\varphi = 50^\circ$.

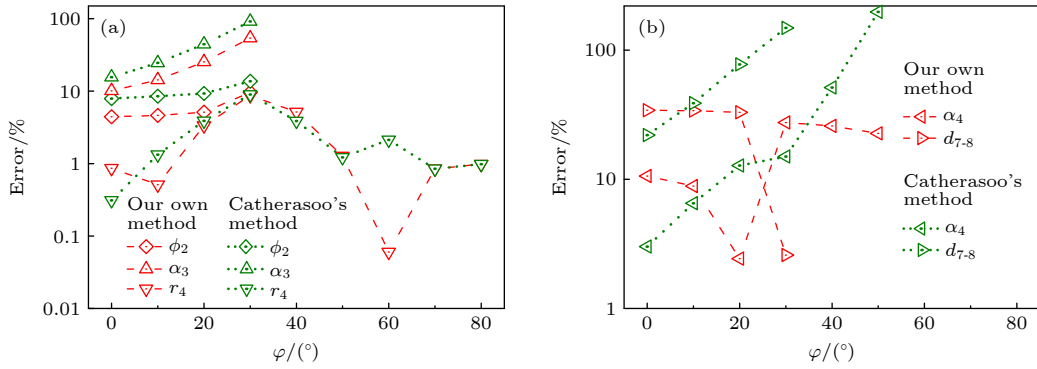


图 15 偏差绝对值随 φ 的变化 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$) (a) ϕ_2, α_3 和 r_4 ; (b) α_4 和 d_{7-8} .

Fig. 15. Variation of absolute value of deviations with φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$): (a) ϕ_2, α_3 and r_4 ; (b) α_4 and d_{7-8} .

内, 将 φ 取值间隔由 10° 减小为 1° , 计算得到流场波系类型随 φ 的变化, 见图 16. 随着 φ 的增大, 理论方法和数值模拟均给出了四种波系类型, 但是在 WI-1 和 WI-4 两种类型之间, 理论方法得到 WI-2 类型, 而数值模拟则给出 WI-3 类型, 两种波系类型的区别在于界面上方的波系结构, 前者为三波结构, 而后者为五波结构, 表明在处理此类波系时理论方法与实际还存在一定偏差, 这可能是由于理论方法暂无法考虑波后稍远位置处的流场扰动所致. 在 $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ 范围内 (间隔取为 1°), 本文方法得到的波系类型与数值结果一致时的 φ 值占比约为 80.2%, 而 Catherasoo 方法则为 73.6%; 同时, 本文方法还准确识别了 WI-4 到 WI-5 类型的转变. 因此, 在此类工况条件下, 本文方法对波系类型的识别比 Catherasoo 方法更为准确.

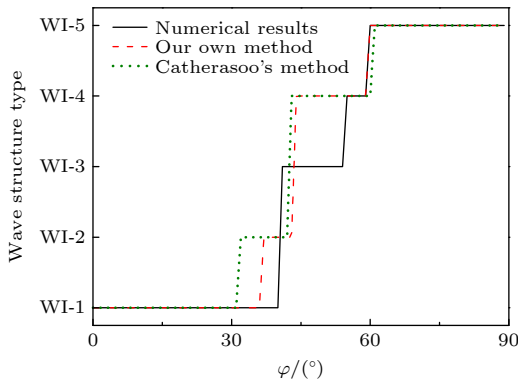


图 16 波系结构类型随 φ 的变化 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$)

Fig. 16. Variation of wave structure types with φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 0.25$).

3.3 入射波 I_1 马赫数 $Ma_{11} = 2.00$, 界面两侧介质密度之比 $\rho_2/\rho_1 = 4.00$

选取与 3.2 节相同的参数, 但取介质 2 密度为

4.00 kg/m^3 . 此时, 波 I_1 与垂直界面 OP_2 作用形成反射激波 R, 且波 R 后压力 $p_R = 6.83 \times 10^5 \text{ Pa}$; 波 I_2 传播速度为 454.14 m/s , 小于波 I_1 传播速度. 图 17 给出了 φ 取 $0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$ 时的流场波系结构, 图 17(a)–(e) 对应时刻 $t = 6.00 \text{ ms}$, 图 17(f)–(i) 分别对应 $t = 5.00, 3.50, 2.00, 1.00 \text{ ms}$.

当 $\varphi = 0^\circ$ 和 10° 时, 见图 17(a) 和图 17(b), 理论计算得到波 I_1 独自沿界面 OP_1 折射时点 P_3 的速度分别为 712.39 和 760.00 m/s , 均大于波 I_2 阵面沿界面传播速度. 因此, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生 IRE 类型折射, 所形成的透射激波再与波 I_2 作用形成波 M, R_3 和 R_4 . 本文方法和 Catherasoo 方法得到的波系类型与数值结果基本一致, 将此波系类型简记为 WII-1.

参照前文图 10(a), 仍记波 M 与波 T_1 相交于点 P_5 , 波 M 与波 I_2 相交于点 P_6 , 波 T_1 阵面、点 P_5 轨迹、点 P_6 轨迹等与初始界面 OP_1 的夹角分别记为 ϕ_1, α_1 和 α_2 , 点 P_5 与 P_6 之间的距离记为 d_{5-6} , 点 P_3 的位移记为 r_3 . 表 4 列出了本文方法与 Catherasoo 方法得到的各变量结果及其与数值结果相对偏差. 在 $\varphi = 0^\circ$ 和 10° 工况下, 与 Catherasoo 方法相比, 除了 ϕ_1 和 α_2 外, 本文方法所得结果与数值结果更为接近.

当 $\varphi = 20^\circ$ 和 30° 时, 见图 17(c) 和图 17(d), 波 I_1 沿界面发生 IRS 类型的折射, 此时波 I_1 后流场中的强扰动追赶上波 I_1 并与之作用形成了三波结构, 而在界面下方, 透射波与 I_2 作用形成了五波结构, 整体波系类型与图 6(c) 相同, 将此波系类型简记为 WII-2. 本文方法能够很好地识别该类型, 而 Catherasoo 方法由于未细致考虑波后扰动影响, 因此并不能识别这一波系类型. 将界面上方三波点

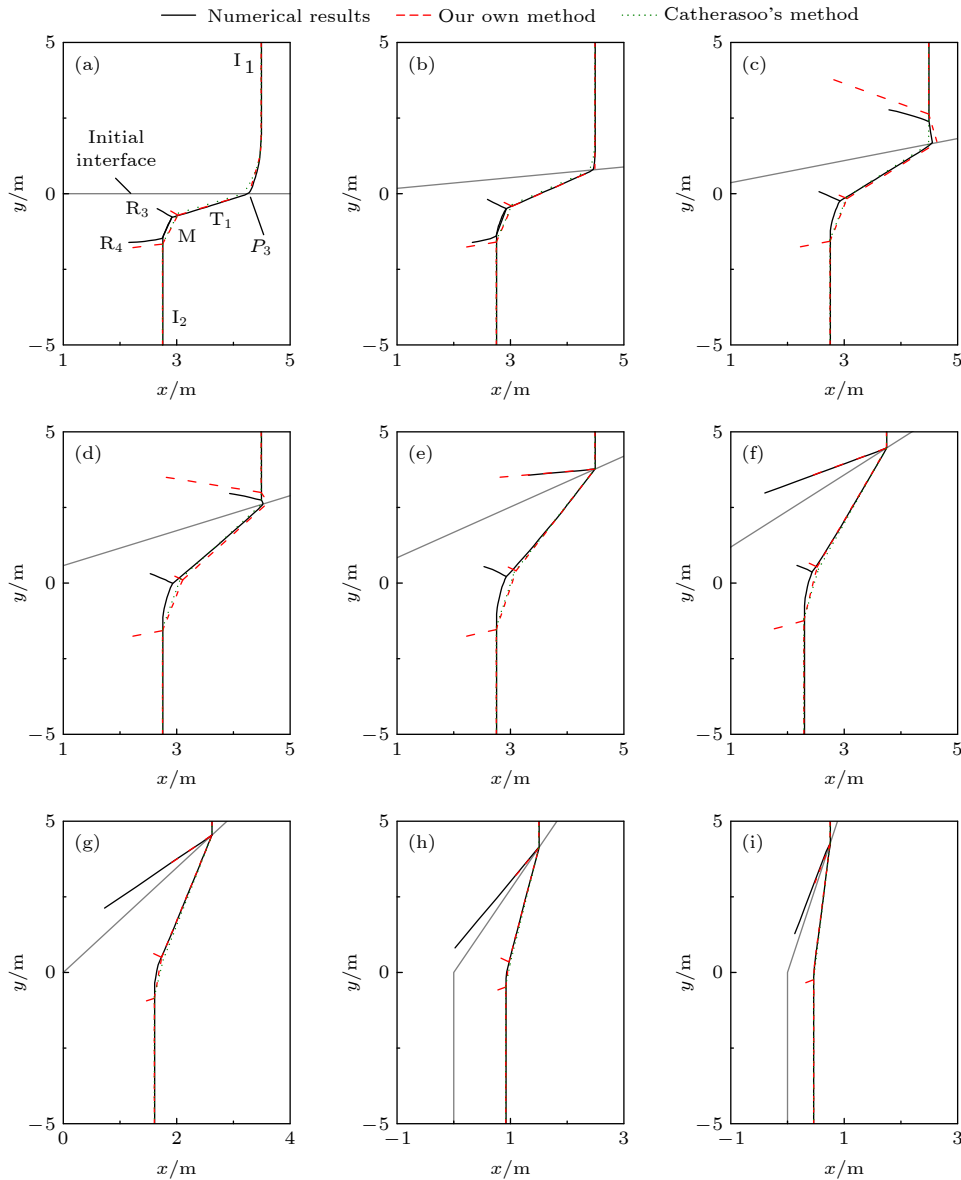


图 17 不同 φ 值下的波系结构 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$) (a)–(i) 分别对应 $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$

Fig. 17. Wave structures for different φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$). Panels (a)–(i) correspond to $\varphi = 0^\circ, 10^\circ, \dots, 80^\circ$, respectively.

轨迹与初始界面 OP_1 的夹角记为 α_5 , 对于 $\varphi = 20^\circ$ 和 30° , 本文方法得到 α_5 分别为 10.4° 和 3.7° , 数值计算得到的 α_5 分别为 8.1° 和 1.4° , 理论结果相对于数值结果的偏差分别为 28.4% 和 163.6% . 这可能是因为本文方法对流场波系进行了适当简化, 假定各波之间区域内流场参量均匀, 而实际上不同流场区域内仍存在更为复杂的波系作用, 见图 18, 由此造成理论与数值结果的较大偏差, 尤其是 $\varphi = 30^\circ$ 工况. 此时, 数值结果显示波 R_4 变为连续的压缩波, 故无法准确判读波 M 与 I_2 交点轨迹, 表 4 中针对 α_2 和 d_{5-6} 仅给出了理论结果. 与 Catherasoo 方法相比, 本文方法能够准确识别

流场波系类型, 所得到的 ϕ_1, α_1 与数值结果也更为接近.

随着 φ 继续增大, 波 I_1 沿界面运动速度也进一步增大. 当 $\varphi \geq 40^\circ$ 时, 波 I_1 沿界面 OP_1 发生正规折射, 形成反射激波和透射激波, 此时的折射类型为 RRS, 透射激波与波 I_2 作用形成五波结构, 见图 17(e)–(i), 理论与数值结果基本一致, 将此波系类型记为 WII-3. 本文方法计算得到的 ϕ_1 与数值结果更为接近, 而 Catherasoo 方法计算得到的 α_1 与数值结果较为接近. 当 $\varphi \geq 60^\circ$ 时, 数值结果显示波 R_3 也变为连续的压缩波, 无法准确判读波 M 与 T_1 轨迹, 故表中针对 α_1 仅给出理论结果.

表 4 不同 φ 值下波系结构变量 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$)
Table 4. Wave structure parameters for different φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$).

$\varphi/(\circ)$	计算方法	ϕ_1		α_1		α_2		d_{5-6}		r_3	
		结果/ (\circ)	偏差/%	结果/ (\circ)	偏差/%	结果/ (\circ)	偏差/%	结果/m	偏差/%	结果/m	偏差/%
0	本文	29.6	-2.32	13.3	-11.4	31.2	11.3	0.99	40.4	4.27	0.83
	Catherasoo	29.4	-3.02	12.0	-20.0	31.0	10.5	1.04	48.1	4.17	-1.61
10	本文	29.5	-2.64	17.8	-9.35	40.2	8.18	1.22	31.2	4.56	0.69
	Catherasoo	29.8	-1.64	16.8	-14.2	39.6	6.55	1.23	32.5	4.46	-1.51
20	本文	29.4	-1.14	23.0	-6.63	49.8	—	1.44	—	4.94	1.78
	Catherasoo	30.2	1.73	22.0	-10.9	48.8	—	1.44	—	4.78	-1.53
30	本文	29.5	3.20	28.0	-6.96	59.7	—	1.71	—	5.32	1.96
	Catherasoo	29.9	4.53	27.4	-9.10	58.4	—	1.66	—	5.19	-0.68
40	本文	27.5	3.74	32.6	-9.07	69.2	—	1.97	—	5.86	0.14
	Catherasoo	27.4	3.07	33.4	-6.81	67.9	—	1.84	—	5.86	0.14
50	本文	22.8	1.86	38.1	-8.40	78.5	—	1.79	—	5.82	-0.16
	Catherasoo	23.3	4.49	39.9	-3.99	77.2	—	1.65	—	5.82	-0.16
60	本文	17.6	0.12	44.0	—	88.0	—	1.36	—	5.24	0.01
	Catherasoo	18.3	3.71	46.8	—	86.5	—	1.22	—	5.24	0.01
70	本文	12.0	0.36	50.1	—	97.7	—	0.84	—	4.38	-0.45
	Catherasoo	12.5	4.35	54.0	—	95.8	—	0.73	—	4.38	-0.45
80	本文	6.10	-0.64	56.4	—	107.5	—	0.45	—	4.31	-0.73
	Catherasoo	6.35	3.47	60.9	—	105.0	—	0.39	—	4.31	-0.73

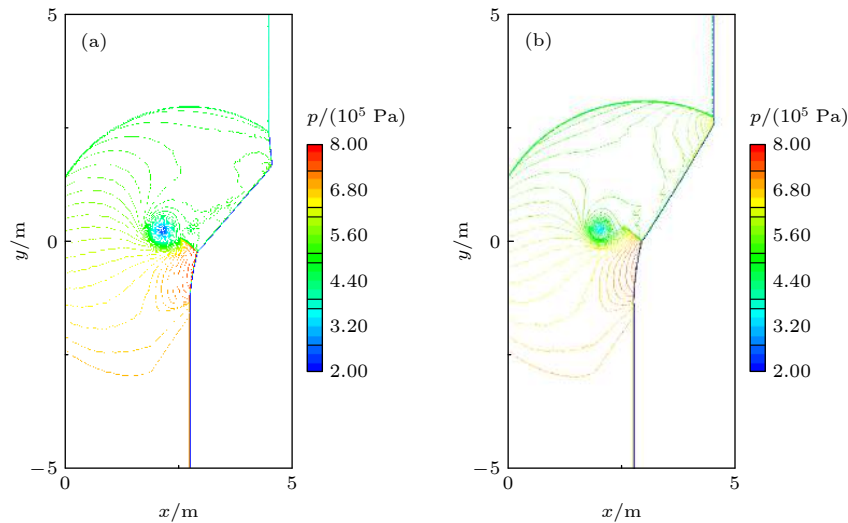


图 18 $t = 6.00$ ms 时流场压力分布数值结果 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$) (a) $\varphi = 20^\circ$; (b) $\varphi = 30^\circ$
Fig. 18. Numerical results for field pressure at $t = 6.00$ ms ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$): (a) $\varphi = 20^\circ$; (b) $\varphi = 30^\circ$.

图 19 给出了 $\phi_1, \alpha_1, \alpha_2, d_{5-6}$ 和 r_3 等变量的理论与数值结果的相对偏差绝对值随 φ 的变化. 整体而言, 对于 ϕ_1, α_1 和 d_{5-6} , 除个别工况外, 本文方法结果均优于 Catherasoo 方法; 对于 α_2 , Catherasoo 方法结果则优于本文方法; 对于 r_3 , 本文方法与 Catherasoo 方法结果较为接近.

接下来, 在图 17 所考虑工况的基础上, 对 φ 取值适当细化, 尤其是在波系类型发生变化的范围

内, 将 φ 取值间隔由 10° 减小为 1° , 计算得到流场波系类型随 φ 的变化, 见图 20. 随着 φ 的增加, 本文方法和数值模拟均给出三种相同的波系类型, 而且本文方法可以准确识别 WII-1 到 WII-2 的转变, 但对于 WII-2 到 WII-3 转变的识别则与数值结果存在一定偏差, 转变点对应的 φ 值相差约 6° . Catherasoo 方法则仅得到了 WII-1 和 WII-3 两种波系类型. 在 $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ 范围内 (间隔取为 1°), 本文方

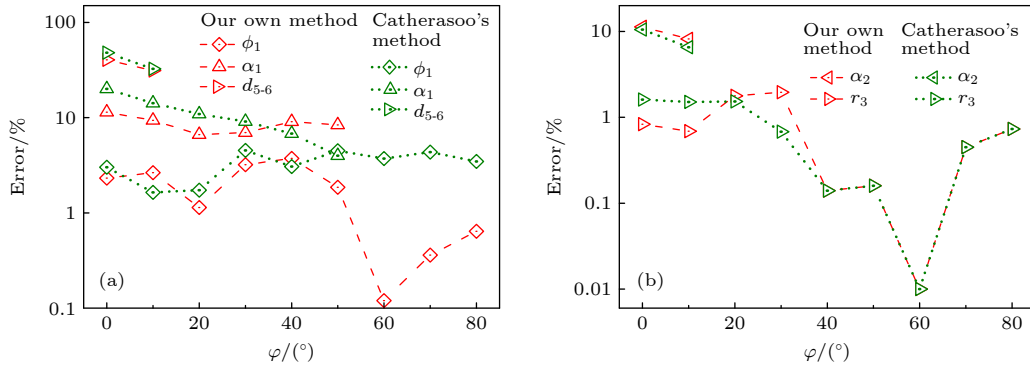


图 19 偏差绝对值随 φ 的变化 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$) (a) ϕ_1, α_1 和 d_{5-6} ; (b) α_2 和 r_3

Fig. 19. Variation of absolute value of deviations with φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$): (a) ϕ_1, α_1 and d_{5-6} ; (b) α_2 and r_3 .

法得到的波系类型与数值结果一致时的 φ 值占比约为 93.4%，而 Catherasoo 方法则为 79.1%。因此，在此类工况条件下，本文方法对波系类型的识别比 Catherasoo 方法更为准确。

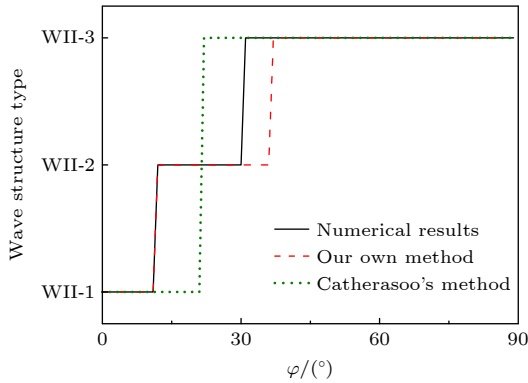


图 20 波系结构类型随 φ 的变化 ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$)

Fig. 20. Variation of wave structure types with φ ($Ma_{11} = 2.00, \rho_2/\rho_1 = 4.00$).

3.4 理论方法的适用性及不足

文中所考虑的工况包括了波 I_1 传播速度大于波 I_2 以及波 I_2 传播速度大于波 I_1 等两类情形，每类情形中又考虑了不同的界面倾角 φ ，基本上涵盖了不同的作用类型。针对不同工况，本文理论方法均能计算得到流场中波系结构。而且，本文理论方法在构建时并未对流场参量加以限制，表明其具有良好的适用性。

同时，本文方法还存在以下不足，主要包括：

1) 尽管考虑了折射点附近紧邻激波阵面后扰动的影响，但暂时无法考虑波阵面后方更远处流场扰动的影响，诸如波 R 后流体与波 I_1 后流体作用、流场不稳定性诱发的涡旋结构等；2) 仅考虑了流场中主要的激波和稀疏波结构，假定不同波之间流场参

量均匀分布，且所有波阵面始终保持平直，忽略了流场中更为丰富的波系影响；3) 基于 GSD 理论近似描述激波阵面在波后稀疏波作用下逐渐弯曲的过程，当稀疏效应越强时，偏差也越大；4) 基于 GSD 理论在非均匀流场情形下的推广，近似描述界面两侧扰动相互影响时界面两侧激波关系。由此，导致了理论结果与数值结果和已有实验数据之间还存在一定的偏差。

4 结论

激波与物质界面作用，属于典型的多介质、强非线性动力学问题，蕴含丰富的物理现象。针对二维平面情形下平面激波与物质界面作用，本文首先通过分析界面两侧流场扰动传播情况，来识别界面附近波系作用类型，然后借助流体动力学和 GSD 理论，建立了不同情形下流场波系结构的理论计算方法。

与已有的 Catherasoo 理论方法相比，本文理论方法考虑了激波波后紧邻波阵面的流场扰动对折射的影响，区分了扰动类型及其是否可以追赶上激波阵面，由此识别了五类激波独自沿界面折射类型和三种界面两侧激波相互作用情形。除了利用 GSD 理论近似描述激波阵面在波后稀疏波作用下逐渐弯曲以及界面两侧扰动相互作用的情形外，本文理论方法均基于 Euler 方程精确解来构建波系中各波参数关系。

设定不同的工况，利用本文方法计算流场波系结构，并与已有实验数据、数值结果和 Catherasoo 方法结果进行对比。针对马赫数为 1.17 的平面激波与空气中 SF_6 气泡作用，本文方法得到的波系结构与已有实验数据、数值结果基本一致，所给

出的界面附近透射激波阵面与水平界面夹角比 Catherasoo 方法结果更为准确, 而 Catherasoo 方法给出的界面下方双激波作用的波系结构变量则与实验和数值结果更为吻合. 针对入射激波马赫数 2.00、界面两侧介质密度之比 $\rho_2/\rho_1 = 0.25$ 和 4.00, 以及界面与水平方向夹角 $0^\circ \leq \varphi \leq 90^\circ$ 等系列工况, 本文方法均能够计算得到流场中的波系结构, 具有很好的适用性, 且识别了界面上方为三波结构的折射类型 IRS, Catherasoo 方法则无法识别此类型; 在界面两侧流场扰动相互影响的情形中, 本文方法结果与数值结果还存在一定偏差.

与 Catherasoo 方法相比, 本文方法对波系结构类型的识别更为准确, 对波系结构变量的计算略有改善. 针对双激波作用结构, 尽管两种方法均采用相同的波系构型, 且均未考虑波后更远位置处流场扰动的影响, 但是本文方法基于 Euler 方程组精确解构建的三波理论计算波系参数, Catherasoo 方法则基于近似的 GSD 理论计算波系参数, 两种理论结果的偏差依赖于工况条件, 从而使得本文方法和 Catherasoo 方法结果与实验或数值结果的吻合程度也与具体工况条件相关.

本文的研究工作加深了对激波与物质界面作用机理认识, 可为更复杂作用情形中理论计算方法的建立提供参考. 后续可针对本文方法本身存在的不足, 进一步加以改进.

参考文献

- [1] Taub A H 1947 *Phys. Rev.* **72** 51
- [2] Polachek H, Seeger R J 1951 *Phys. Rev.* **84** 922
- [3] Henderson L F 1966 *J. Fluid Mech.* **26** 607
- [4] Ben-Dor G, Igra O, Elperin T 2001 *Handbook of Shock Waves* (Vol. 2) (London: Academic Press) pp71,72
- [5] Jahn R G 1956 *J. Fluid Mech.* **1** 457
- [6] Abd-El-Fattah A M, Henderson L F, Lozzi A 1976 *J. Fluid Mech.* **76** 157
- [7] Flores J, Holt M 1982 *Phys. Fluids* **25** 238
- [8] Henderson L F, Jia-Huan M, Akira S, Kazuyoshi T 1990 *Fluid Dyn. Res.* **5** 337
- [9] Henderson L F 1992 *Shock Waves* **2** 103
- [10] Abd-El-Fattah A M, Henderson L F 1978 *J. Fluid Mech.* **86** 15
- [11] Abd-El-Fattah A M, Henderson L F 1978 *J. Fluid Mech.* **89** 79
- [12] Henderson L F 1989 *J. Fluid Mech.* **198** 365
- [13] Henderson L F, Colella P, Puckett E G 1991 *J. Fluid Mech.* **224** 1
- [14] Henderson L F, Puckett E G 2014 *Shock Waves* **24** 553
- [15] Nourgaliev R R, Sushchikh S Y, Dinh T N, Theofanous T G 2005 *Int. J. Multiphas. Flow* **31** 969
- [16] Zhai Z G, Wang M H, Si T, Luo X S 2014 *J. Fluid Mech.* **757** 800
- [17] Wang M H, Si T, Luo X S 2015 *Shock Waves* **25** 347
- [18] Luo X S, Wang M H, Si T, Zhai Z G 2015 *J. Fluid Mech.* **773** 366
- [19] Zhai Z G, Li W, Si T, Luo X S, Yang J M, Lu X Y 2017 *Phys. Fluids* **29** 016102
- [20] Igra D, Igra O 2018 *Phys. Fluids* **30** 056104
- [21] Sadin D V, Davidchuk V A 2020 *J. Eng. Phys. Thermophys.* **93** 474
- [22] Onwuegbu S, Yang Z 2022 *AIP Adv.* **12** 025215
- [23] Georgievskii P, Levin V, Sutyurin O 2010 *Fluid Dyn.* **45** 281
- [24] Georgievskiy P, Levin V, Sutyurin O 2012 *Proceedings of the 15th International Symposium on Flow Visualization Minsk, Belarus, June 25-28, 2012* p1
- [25] Catherasoo C J, Sturtevant B 1983 *J. Fluid Mech.* **127** 539
- [26] Whitham G B 1957 *J. Fluid Mech.* **2** 145
- [27] Whitham G B 1959 *J. Fluid Mech.* **5** 369
- [28] Schwendeman D W 1988 *J. Fluid Mech.* **188** 383
- [29] Toro E F 2009 *Riemann Solvers and Numerical Methods for Fluid Dynamics* (3rd Ed.) (Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag) pp115–151

On theoretical calculation method for two-dimensional planar shock wave refractions

Jia Lei-Ming^{1)†} Wang Zhi-Huan¹⁾²⁾ Wang Shu-Fei¹⁾
Zhong Wei¹⁾ Tian Zhou¹⁾

1) (*Northwest Institute of Nuclear Technology, Xi'an 710024, China*)

2) (*Department of Engineering Physics, Tsinghua University, Beijing 100084, China*)

(Received 24 October 2022; revised manuscript received 23 December 2022)

Abstract

A theoretical calculation method for wave structures in the flow resulting from the interaction between the two-dimensional planar shock and the material interface is developed. First, the propagation of the shock wave on either side of the interface is analyzed, and two regular refraction types and three irregular ones are identified. Then, according to the relative speed of the perturbations on either side, three different interaction cases are established. Compared with the existing Catherasoo's method, this method is improved in the following aspects: 1) the influence of the perturbation in the post-shock flow field on the interaction is taken into account, including its type and whether it can catch up and interact with the shock front; 2) the interactions between different waves are calculated mostly based on the exact solutions of the Euler equations, except those involving post-shock subsonic rarefaction waves. This method has been used to investigate the interaction of a Mach number 1.17 shock with an air/SF₆ interface, and give wave structures that accord with numerical results and existing experimental data. The angle between the transmitted shock and the horizontal direction is obtained to be in better agreement with experimental data than Catherasoo's result, and more parameters are obtained, such as the reflected wave and the interface deflection angle. For cases involving a Mach number 2.00 shock with different material density ratios and interface inclination angles, comparisons between theoretical and numerical results show that our method can obtain the type of wave structure more accurately than Catherasoo's method, and identify a refraction type in which the post-shock strong perturbation catches up with the shock front and a three-wave structure is formed, whereas Catherasoo's method cannot handle this case. Thus, the results show that the improved method in this work has better applicability and higher accuracy than the existing method in identifying the type of wave structure, and can also provide more information about the wave structures.

Keywords: shock wave, regular/irregular refraction, wave structures, theoretical calculation

PACS: 47.40.-x, 47.35.-i, 47.54.Bd

DOI: [10.7498/aps.72.20222042](https://doi.org/10.7498/aps.72.20222042)

† Corresponding author. E-mail: jialeiming@nint.ac.cn



二维平面激波折射的理论计算方法

贾雷明 王智环 王澍霏 钟巍 田宙

On theoretical calculation method for two-dimensional planar shock wave refractions

Jia Lei-Ming Wang Zhi-Huan Wang Shu-Fei Zhong Wei Tian Zhou

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 064701 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222042

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222042>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

激波冲击作用下液膜破碎的气液两相流

Gas-liquid two-phase flow of liquid film breaking process under shock wave

物理学报. 2020, 69(24): 244702 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20201051>

纵向磁场抑制Richtmyer-Meshkov不稳定性机理

Mechanism of longitudinal magnetic field suppressed Richtmyer-Meshkov instability

物理学报. 2020, 69(18): 184701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200363>

三维空腔流动波系建模及模态演化

Waves model of three-dimensional cavity flow and its oscillation mode evolution

物理学报. 2022, 71(19): 194301 <https://doi.org/10.7498/aps.71.20220922>

冲击波诱导水中纳米气泡塌陷的分子动力学分析

Molecular dynamics analysis of shock wave-induced nanobubble collapse in water

物理学报. 2021, 70(13): 134702 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210058>

二维黑磷对太赫兹波调控特性的理论研究

Theoretical study on the modulation characteristics of THz wave by two-dimensional black phosphorus

物理学报. 2020, 69(17): 174205 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20200105>

玻色-爱因斯坦凝聚体中的淬灭孤子与冲击波

Quenched solitons and shock waves in Bose-Einstein condensates

物理学报. 2021, 70(18): 180303 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210564>