

一种简化的时域非连续伽略金阻抗边界算法*

杨谦^{1)†} 魏兵¹⁾ 李林茜¹⁾ 邓浩川²⁾

1) (西安电子科技大学物理学院, 西安 710071)

2) (北京环境特性研究所, 电磁散射重点实验室, 北京 100854)

(2022年11月2日收到; 2022年12月13日收到修改稿)

针对时域非连续伽略金 (discontinuous Galerkin time-domain, DGTD) 算法中的阻抗边界条件问题开展研究. 阻抗边界条件中的频域算符 $j\omega$ 一般在根号内部, 其在时域数值算法中的实现有一定难度. 另一方面, DGTD 算法中数值通量表达式也含有阻抗边界条件, 这也进一步增加了频域转换难度. 为了能给出简化的 DGTD 阻抗边界算法, 本文首先针对数值通量表达式进行推导, 得到一个特定函数 \tilde{Z}_R , 该函数包含频域算符 $j\omega$, 函数以外表达式不含频域算符 $j\omega$, 这样就可以仅处理 \tilde{Z}_R 的频域转换问题. 由于 \tilde{Z}_R 形式复杂, 对 \tilde{Z}_R 进行矢量匹配处理, 得到关于 $j\omega$ 的一阶有理分式, 进而得到其时域迭代式. 这一过程简明、易于实施, 还可避开矩阵计算. 本文方案经一维及三维算例验证, 精度很好, 针对特定电磁问题如涂覆层问题可大幅降低计算时间.

关键词: 阻抗边界条件, 矢量匹配, 时域非连续伽略金算法

PACS: 02.70.Dh, 74.25.nn, 92.60.Ta

DOI: 10.7498/aps.72.20222104

1 引言

大尺寸介质目标、涂层目标是计算电磁学中的研究难点, 由于目标尺度太大或涂层厚度太薄, 此类问题可归于多尺度问题, 一般消耗计算资源很高. 研究者致力于寻求此类问题的快速算法.

假设仿真目标为某种大尺寸介质, 电磁波透入深度远小于其空间尺度, 此情形下对目标离散并非必须, 目标表面电磁场可利用表面阻抗函数 \tilde{Z} 联系, 避免目标离散步骤提高计算效率. 时域数值算法可采用表面阻抗边界 (surface impedance boundary condition, SIBC) 来处理这一问题^[1]. 类似的道理, 对于薄涂层介质, 其表面的涂层厚度一般小于透入深度, 但基底介质的尺度大于透入深度. 此情形对涂层精确建模极其耗费计算资源, 也可采用传

输线阻抗边界 (transmission impedance boundary condition, TIBC) 进行近似处理^[2-7].

阻抗边界条件可用于处理如前所述的特定电磁问题, 曾被多种数值算法研究, 其关键点在于如何处理复杂的阻抗函数. Beggs 等^[8] 曾采用时域有限差分法 (finite difference time-domain method, FDTD) 研究了高电导率近似情形的 SIBC 边界, 采用了 prony 方法对阻抗函数处理. Oh 和 Schutt-Aine^[9] 曾采用 Chebyshev 近似将阻抗函数写为有理分式形式, 在 FDTD 中处理了类似的 SIBC 问题. Kobidze^[10] 采用拉普拉斯变化处理阻抗函数, 研究了一维 FDTD 问题. 阻抗函数也可以采用矢量匹配处理得到有理分式形式^[11], Yi 等^[12] 研究了无条件稳定 Laguerre FDTD 中的 SIBC 问题, 阻抗函数采用矢量匹配处理得到有理分式. Glisson^[13] 采用电场积分方程研究了 IBC 问题, Yan 和 Jin^[14]

* 国家自然科学基金 (批准号: 61901324, 62001345)、中国博士后科学基金 (批准号: 2019M653548, 2019M663928XB)、电波环境特性及模化技术国防科技重点实验室基金 (批准号: 201903002)、电磁散射重点实验室基金 (批准号: 61424090111) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: XJS200501, XJS200507, JB200501) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: qyang@xidian.edu.cn

采用双场积分方程研究了涂覆目标散射. Ylä-Oijala 等^[15]在积分方程中引入了两种基函数, 进而处理了涂覆目标散射. Gyselinck 等^[16]在有限元中引入磁矢势来处理阻抗边界问题. 在时域非连续伽略金 (discontinuous Galerkin time-domain, DGTD) 算法中也有若干研究, Li 等^[17-19]研究了 DGTD 算法中的阻抗边界方案, 对数值通量中的阻抗函数采用矢量匹配进行处理. Wang 等^[20]对基于电场波动方程形式的 DGTD 展开研究, 研究了石墨烯薄层的有理分式处理方案.

一般而言, 阻抗 \tilde{Z} 是与频率 ω 有关的复杂函数, 对于频域算法, 这一部分处理难度较低. 对于时域算法, 必须进行频时转换, 但频时转换一般很难得到解析式或者解析式非常复杂, 难以应用. 经典做法常用拉普拉斯变换, 此方法需要进行全时间步数据存储, 推导过程繁琐, 通用性较差. 矢量匹配法可用于对频域函数做有理分式近似, 通用性及精确性很好. 本文对复杂的频时转换将采用矢量匹配方案处理, 简化这一过程.

对于典型阻抗边界的处理, 在 DGTD 文献中 Li 等^[17-19]给出了一种实施方案, 这一方案需要处理与阻抗边界函数相关的数值通量, 其中数值通量系数的分子分母均含有阻抗 \tilde{Z} , 对分子分母中的阻抗函数分别处理会导致后续迭代中包含复杂的矩阵计算过程. 为降低推导难度及编程难度, 本文给出一个简化的 DGTD 方案来处理阻抗边界条件, 数值通量的计算经过优化后对修正后的系数整体进行处理, 通过矢量匹配对其进行有理分式近似, 从而得到一组简洁的时域迭代式.

本文结构如下: 1) DGTD 中处理阻抗边界的关键点是数值通量, 第 2 节给出了基于阻抗边界条件形式的数值通量表达式, 该表达式不涉及矩阵运算; 2) 实践中的材料参数复杂, 很难给出解析形式的通用方案. 第 3 节参考文献, 采用矢量匹配对数值通量表达式进行处理, 得到了简洁的一阶有理分式形式, 并给出了其时域迭代方案; 3) 不同的表面阻抗边界形式可对应不同类型的目标, 第 4 节给出了典型的 TIBC 及 SIBC 处理方案; 4) 基于本文成果, 第 5 节给出了相关算例, 包括一维算例及三维算例; 5) 给出结论.

2 DGTD 中的阻抗边界条件

本节先从简单情形展开讨论, 假设上方为自由

空间, 下方为某种介质, 电磁波从上向下入射, 如图 1. 图 1 中 \hat{n} 为指向下方法向; \mathbf{E} 代表电场; \mathbf{k} 代表电磁波传播方向; ε_0, μ_0 代表自由空间的介电系数及磁导系数; $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$ 代表下方介质的介电系数、磁导系数及电导率.

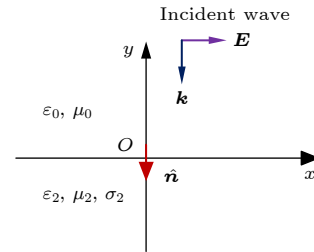


图 1 半空间示意图

Fig. 1. Plane wave incident on a lossy dielectric half-space.

可以假设透入深度远小于下方介质厚度, 则可引入阻抗边界条件来描述界面上的电磁场关系, 分界面上的阻抗边界条件为

$$\mathbf{E}_t(\omega) = -Z(\omega) \cdot [\hat{n} \times \mathbf{H}_t(\omega)]. \quad (1)$$

式中 \mathbf{E}_t 代表切向电场, Z 代表阻抗, \mathbf{H}_t 代表切向磁场. (1) 式为频域形式, 自变量为频率 ω .

请注意, 这里的法向与常见电磁教材定义相反, 因此 (1) 式右侧表达式为负号, 本文采用这一表述的用意是由于 DGTD 的计算中下方介质实际上不存在, 计算中也不会建立下方介质的计算单元模型, 其电磁特性将由阻抗边界条件承担. 而指向下方的法向已先期存在于 DGTD 的理论构架及程序中. 为便于后续的 DGTD 理论推导, 这里采用指向下方的法向表述 (即 \hat{n} 指向下侧).

由于阻抗边界对应的目标不进行离散, 因此引入一个虚拟单元 e^+ , 如图 2 中下方单元所示. 计算中就需要给出下方虚拟单元的电磁场 (准确的说, 仅给出接触面三角形的电磁场切向数据). 虚拟单元的电磁场应满足阻抗边界条件:

$$\begin{aligned} \hat{n} \times \mathbf{E}^{e^+} &= -\tilde{Z} \cdot [\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{H}^{e^+})], \\ \hat{n} \times \mathbf{H}^{e^+} &= \tilde{Y} \cdot [\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{E}^{e^+})], \quad \tilde{Y} = 1/\tilde{Z}. \end{aligned} \quad (2)$$

式中 \mathbf{E}^{e^+} 和 \mathbf{H}^{e^+} 分别代表单元 e^+ 的表面电场及磁场, \tilde{Z} 为阻抗, \tilde{Y} 为导纳.

为简化后续推导, 这里在 (2) 式的右侧引入连续条件, 令

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^{e^+} = \hat{n} \times \mathbf{H}^e, \hat{n} \times \mathbf{E}^{e^+} = \hat{n} \times \mathbf{E}^e. \quad (3)$$

将 (3) 式代入 (2) 式的右侧后得

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{e+} = -\tilde{Z} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^e)],$$

$$\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{e+} = \tilde{Y} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e)], \quad \tilde{Y} = 1/\tilde{Z}. \quad (4)$$

(4) 式中, 右侧为已知量, 左侧为待求解未知量. 仅有 (4) 式是不完备的, DGTD 中数值通量承担了电磁场的单元间数据交换任务, 其形式也需要修改, 具体如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{*e} &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e + k_E^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^{e+} - \mathbf{E}^e)] \\ &\quad + v_H^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^{e+} - \mathbf{H}^e))], \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^{*e} &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^e + k_H^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^{e+} - \mathbf{H}^e)] \\ &\quad - v_E^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^{e+} - \mathbf{E}^e))]. \end{aligned} \quad (5)$$

式中 \mathbf{E}^{*e} 和 \mathbf{H}^{*e} 分别代表单元 e 的电场通量及磁场通量; k_E^e , v_H^e , k_H^e 及 v_E^e 为通量系数, 本文采用迎风通量格式, 其系数如表 1, 表中 \tilde{Z}^{e+} 即为 (4) 式中 \tilde{Z} .

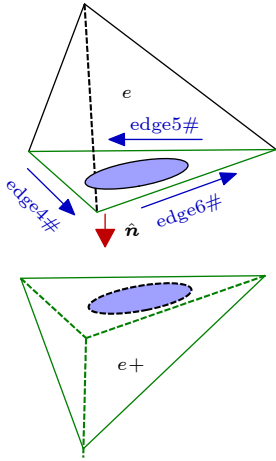


图 2 虚拟单元

Fig. 2. Virtual element.

Y^e 及 Z^e 代表当前单元参数, 一般为自由空间参数. \tilde{Z}^{e+} 及 \tilde{Y}^{e+} 为拟引入的阻抗边界相关阻抗导纳参数. 由于通量的系数中含有阻抗边界条件的复数形式阻抗, 对于时域算法很难处理, 如对 \tilde{Z}^{e+} 进行矢量匹配, 则需要分别处理分子及分母的有理分

式, 较为繁琐. 我们提出了一种新的简便方案. 首先假定 (5) 式可重写为

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^* &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E} + \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{n}} \times (f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{E})] \\ &\quad + \frac{1}{2Y^e} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{H}))], \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^* &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H} + \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{n}} \times (f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{H})] \\ &\quad - \frac{1}{2Z^e} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{E}))], \end{aligned} \quad (6)$$

式中, 采用了标准形式的通量系数. 阻抗边界的使用需要采用当前单元的数据计算得到阻抗边界上的数据, 因此为了降低时域迭代方案难度, 将 (5) 式退化到如 (6) 式形式的标准迎风通量系数式, 引入四个函数 $f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, $f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, $f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 及 $f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 表达相邻电磁场数据. 采用此表述的优势为保留标准迎风通量系数利于编程, 也无需对现有理论框架进行大改. 可以将注意力集中于对相邻单元电磁场数据的处理, 结合矢量匹配可以大大降低推导难度. 换言之, 最困难的频时转换工作全部由矢量匹配法承担就是本文的目标.

同时为了表述阻抗边界形式, 将相邻单元的电磁场数据采用函数表示为

$$\mathbf{E}^{e+} = f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}), \quad \mathbf{H}^{e+} = f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}). \quad (7)$$

这里略去了 $f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 及 $f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, 因推导过程可得出结论, $f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, $f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E})$. 接下来的任务是联合 (5) 式和 (6) 式推导 $f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, $f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E})$, $f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 及 $f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E})$. 从 (5) 式中的子项 $k_E^e (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{e+})$ 开始推导:

$$\begin{aligned} k_E^e (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{e+}) &= \frac{\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^{e+}) \\ &= - \frac{\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} \tilde{Z}^{e+} \cdot [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^e)] \\ &= \frac{1}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{H}^e))]. \end{aligned} \quad (8)$$

将 (8) 式代入 (5) 式可得

表 1 数值通量系数表达式

Table 1. Coefficients of numerical flux.

	通量系数			
	k_E^e	k_H^e	v_H^e	v_E^e
迎风通量表达式 (upwind flux)	$\frac{\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}}$	$\frac{\tilde{Z}^{e+}}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}}$	$\frac{1}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}}$	$\frac{1}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}}$

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2Y^e} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{H}^e))] \\
 = & \frac{1}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{H}^e))] \\
 & + \frac{1}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{H}^e))], \\
 & \Downarrow \\
 & \frac{1}{2Y^e} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}))] \\
 = & \frac{2}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{H}^e))] \\
 & + \frac{1}{2Y^e} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{H}^e))], \\
 & \Downarrow \\
 & [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}))] \\
 = & \left(1 - \frac{4Y^e}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}}\right) [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^e))]. \quad (9)
 \end{aligned}$$

我们采用了 whitney 型基函数, 在 DGTD 中其电磁场数据天然具备切向性质, 可将 (9) 式的法向符号 $\hat{\mathbf{n}}$ 消去, 并将导纳改为阻抗表述, 最终简化形式为

$$\mathbf{H}^{e+} = f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \left(1 - \frac{4\tilde{Z}^{e+}}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}}\right) \mathbf{H}^e. \quad (10)$$

上面为 $\mathbf{H}^{e+} = f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 推导过程. $\mathbf{E}^{e+} = f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 推导过程为

$$\begin{aligned}
 & v_{\text{H}}^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^{e+}))] \\
 = & \frac{1}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} \tilde{Y}^{e+} \cdot \hat{\mathbf{n}} \times [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e)] \\
 = & -\frac{\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e). \quad (11)
 \end{aligned}$$

将 (11) 式代入 (5) 式可得

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{n}} \times (f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{E})] \\
 = & -\frac{\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e) + \frac{\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} [\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{E}^e)], \\
 & \Downarrow \\
 & \frac{1}{2} [\hat{\mathbf{n}} \times (f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) - \mathbf{E})] = \frac{2\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}} [\hat{\mathbf{n}} \times (-\mathbf{E}^e)], \\
 & \Downarrow \\
 & \hat{\mathbf{n}} \times f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \left(1 - \frac{4\tilde{Y}^{e+}}{Y^e + \tilde{Y}^{e+}}\right) (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e). \quad (12)
 \end{aligned}$$

同理, DGTD 中其电磁场数据天然具备切向性质, 可将 (12) 式的法向符号 $\hat{\mathbf{n}}$ 消去, 并将导纳改为阻抗表述, 最终简化形式为

$$\mathbf{E}^{e+} = f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) = \left(1 - \frac{4Z^e}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}}\right) \mathbf{E}^e. \quad (13)$$

上述推导已给出 $f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 及 $f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 的表达式, $f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 及 $f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E})$ 可遵循相似步骤进行推导, 这里跳过其步骤直接给出结果:

$$\begin{aligned}
 f_1(\mathbf{H}, \mathbf{E}) &= f_3(\mathbf{H}, \mathbf{E}), \\
 f_2(\mathbf{H}, \mathbf{E}) &= f_4(\mathbf{H}, \mathbf{E}). \quad (14)
 \end{aligned}$$

由 (14) 式可见, 实际上要处理的仅有两个独立公式即 (10) 式、(13) 式. 其处理方案见下节.

3 时域迭代方案

经前文总结, 最终需要处理下式的频域转换:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{H}^{e+} &= \left(1 - \frac{4\tilde{Z}^{e+}}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}}\right) \mathbf{H}^e, \\
 \mathbf{E}^{e+} &= \left(1 - \frac{4Z^e}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}}\right) \mathbf{E}^e, \quad (15)
 \end{aligned}$$

式中, Z^e 一般为自由空间阻抗 (实数); \tilde{Z}^{e+} 为目标阻抗, 其阻抗函数一般较为复杂, 以较为简单的半空间为例 (SIBC), 其阻抗边界条件为

$$Z(\omega) = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}}. \quad (16)$$

根号内的 $j\omega$ 很难处理, 经典做法采用拉普拉斯逆变换来处理阻抗 $Z(\omega)$, 但其推导过程复杂, 当阻抗函数形式改变时需要重构理论, 且须对数据进行全时间步存储, 这些困难都限制了其应用及推广. 为提高本文方案的通用性, 我们改用另一思路, 矢量匹配 (vector fitting, VF).

矢量匹配的思路是在含 $j\omega$ 项用拉普拉斯符号 s 代替后, 将其写为一阶有理分式形式:

$$f(\omega) \approx \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - A_i} + D + sE, \quad s = j\omega, \quad (17)$$

式中, A_i , E , D , C_i 均为实数, N 为多项式级数, 此外, 有理分式中的分母中 A_i 均为负, 这代表极点在频率负轴上, 实际上数值算法不可能出现, 计算在宽频范围内将是稳定的.

现有文献一般对阻抗 \tilde{Z}^{e+} 进行矢量匹配^[17-19], 本文采用另一方式, 对 (15) 式中的系数进行修正, 定义 \tilde{Z}_R 为

$$\tilde{Z}_R = \frac{\tilde{Z}^{e+}}{Z^e + \tilde{Z}^{e+}} \approx \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - A_i} + D. \quad (18)$$

对 \tilde{Z}_R 做矢量匹配, 令 $E = 0$ 之后, 可重写 (15) 式:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^{e+} &= \left[1 - 4 \left(\sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - A_i} + D \right) \right] \mathbf{H}^e \\ &= \left[(1 - 4D) - 4 \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - A_i} \right] \mathbf{H}^e, \\ \mathbf{E}^{e+} &= \left[1 - 4 \left(1 - \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - A_i} - D \right) \right] \mathbf{E}^e \\ &= \left[(4D - 3) + 4 \sum_{i=1}^N \frac{C_i}{s - A_i} \right] \mathbf{E}^e. \end{aligned} \quad (19)$$

经拉普拉斯逆变换, 可得到 (19) 式时域迭代形式:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{H}^{e+}\}^{n-\frac{1}{2}} &= (1 - 4D) \{\mathbf{H}^e\}^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad - 4 \sum_{i=1}^N \{\mathbf{H}\mathbf{A}^e\}_i^{n-\frac{1}{2}}, \\ \{\mathbf{H}\mathbf{A}^e\}_i^{n-\frac{1}{2}} &= P_{i1} \{\mathbf{H}^e\}^{n-\frac{1}{2}} + P_{i2} \{\mathbf{H}^e\}^{n-\frac{3}{2}} \\ &\quad + P_{i3} \{\mathbf{H}\mathbf{A}^e\}_i^{n-\frac{3}{2}}, \\ \{\mathbf{E}^{e+}\}^n &= (4D - 3) \{\mathbf{E}^{e+}\}^n + 4 \sum_{i=1}^N \{\mathbf{E}\mathbf{A}^{e+}\}_i^n, \\ \{\mathbf{E}\mathbf{A}^e\}_i^n &= P_{i1} \{\mathbf{E}^e\}^n + P_{i2} \{\mathbf{E}^e\}^{n-1} \\ &\quad + P_{i3} \{\mathbf{E}\mathbf{A}^e\}_i^{n-1}, \\ P_{i1} &= -\frac{C_i}{A_i} \left[1 - \frac{1}{A_i \Delta t} (e^{A_i \Delta t} - 1) \right], \\ P_{i2} &= \frac{C_i}{A_i} \left[\frac{1}{A_i \Delta t} + e^{A_i \Delta t} \left(1 - \frac{1}{A_i \Delta t} \right) \right], \\ P_{i3} &= e^{A_i \Delta t}. \end{aligned} \quad (20)$$

式中 $\mathbf{H}\mathbf{A}^e$ 与 $\mathbf{E}\mathbf{A}^{e+}$ 分别代表磁场及电场迭代中使用的临时变量.

(20) 式的时域表达式可用于计算虚拟单元 (阻抗边界) 电磁场数据, 其具备一个优势, 在处理虚拟单元数据时不牵涉矩阵, 非常便于编制程序. 经 (20) 式计算得到的 $\{\mathbf{H}^{e+}\}^{n+\frac{1}{2}}$, $\{\mathbf{E}^{e+}\}^n$ 可代入下式计算阻抗边界处通量:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{F}\mathbf{h}^{e+}\} &= \frac{1}{2} \sum [\mathbf{M}\mathbf{f}^e] \cdot \{\mathbf{H}^{e+} - \mathbf{H}^e\}^{n-\frac{1}{2}} \\ &\quad - \frac{1}{2Y^e} \sum [\mathbf{M}\mathbf{g}^e] \cdot \{\mathbf{E}^{e+} - \mathbf{E}^e\}^{n-1}, \\ \{\mathbf{F}\mathbf{e}^e\}^n &= \frac{1}{2} \sum [\mathbf{M}\mathbf{f}^e] \cdot \{\mathbf{E}^{e+} - \mathbf{E}^e\}^n \\ &\quad + \frac{1}{2Y^e} \sum [\mathbf{M}\mathbf{g}^e] \cdot \{\mathbf{H}^{e+} - \mathbf{H}^e\}^{n-\frac{1}{2}}, \\ \mathbf{M}\mathbf{f}_{ij}^e &= \iint_{S^e} \mathbf{N}_i^e \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j^e) ds, \\ \mathbf{M}\mathbf{g}_{ij}^e &= \iint_{S^e} \mathbf{N}_i^e \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j^e)) ds, \end{aligned} \quad (21)$$

式中, \mathbf{N}_i^e , \mathbf{N}_j^e 为基函数; e 为四面体号; i, j 为矩阵元素的标号; $\{\mathbf{F}\mathbf{h}^e\}$ 和 $\{\mathbf{F}\mathbf{e}^e\}$ 分别代表 e 单元磁场及电场的通量矩阵项; $[\mathbf{M}\mathbf{f}^e]$ 和 $[\mathbf{M}\mathbf{g}^e]$ 分别代表 e 单元计算中使用的矩阵, 计算式为 (21) 式后两式, 计算中需要对基函数在三角形接触面上做面积分; \mathbf{E}^e 和 \mathbf{H}^e 代表 e 单元电磁场项; \mathbf{E}^{e+} 和 \mathbf{H}^{e+} 代表 $e+$ 单元电磁场项. (21) 式属于矩阵方程. 接下来需要与经 Maxwell 方程组推导得到的 DGTD 方程 (22) 结合进行求解:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{E}^e\} &= a_E \{\mathbf{E}^e\} + b_E [\mathbf{M}^e]^{-1} \\ &\quad \times \left\{ [\mathbf{S}^e] \{\mathbf{H}^e\}^{n-\frac{1}{2}} + \{\mathbf{F}\mathbf{h}^e\}^{n-\frac{1}{2}} \right\}, \\ \{\mathbf{H}^e\} &= a_H \{\mathbf{H}^e\} - b_H [\mathbf{M}^e]^{-1} \\ &\quad \times \left\{ [\mathbf{S}^e] \{\mathbf{E}^e\}^n + \{\mathbf{F}\mathbf{e}^e\}^n \right\}, \\ M_{ij}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \mathbf{N}_j^e d\Omega, \\ S_{ij}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j^e) d\Omega, \\ a_E &= \frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma\Delta t}{\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma\Delta t}, \quad a_H = \frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma_m\Delta t}{\mu + \frac{1}{2}\sigma_m\Delta t}, \\ b_E &= \frac{\Delta t}{\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma\Delta t}, \quad b_H = \frac{\Delta t}{\mu + \frac{1}{2}\sigma_m\Delta t}, \end{aligned} \quad (22)$$

式中, e 代表单元序号; \mathbf{M}^e 为质量矩阵; \mathbf{S}^e 为刚度矩阵; $\mathbf{F}\mathbf{h}^e$ 及 $\mathbf{F}\mathbf{e}^e$ 为数值通量项, 可由 (20) 式和 (21) 式结果计算; ε , μ , σ 及 σ_m 分别代表单元 e 的介电系数、磁导系数、电导率及导磁率; \mathbf{E}^e 及 \mathbf{H}^e 为 e 单元电磁场数据. (22) 式为蛙跳迭代式. 到此已给出完整的迭代式, 可用于阻抗边界处理.

4 SIBC 及 TIBC 的处理

前面章节描述的 IBC 方案未涉及 \tilde{Z}^e 的具体函数形式, 本文方案关键在于 (18) 式的矢量匹配处理, 下面给出两个示例.

4.1 SIBC

半空间介质可归于 SIBC 类型, 示意图如图 1 假定某介质阻抗式为

$$\tilde{Z}(\omega) = \sqrt{\frac{j\omega\mu_2}{j\omega\varepsilon_2 + \sigma_2}}. \quad (23)$$

将其代入 (18) 式, 矢量匹配中假定频率上限为 14 GHz, $\varepsilon_{2r} = 2, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0.2 \text{ s/m}$. 令阶数 $N = 20$, (18) 式拟合后结果如图 3, \tilde{Z}_R 的矢量匹配结果及原函数结果符合很好.

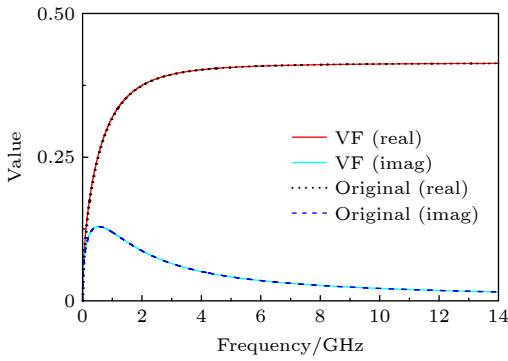


图 3 SIBC (\tilde{Z}_R)
Fig. 3. SIBC (\tilde{Z}_R).

4.2 TIBC

如图 4, 覆盖薄涂层的介质可归于 TIBC 类型. 假设薄涂层参数为 $\varepsilon_1, \mu_1, \sigma_1$, 厚度 d . 下方导体参数为 $\varepsilon_2, \mu_2, \sigma_2$. 根据传输线模型, 对于正入射电磁波, 其表面阻抗公式为

$$Z(\omega) = \eta_1 \frac{\eta_2 + j\eta_1 \tan(k_1 d)}{\eta_1 + j\eta_2 \tan(k_1 d)},$$

$$\eta_1 = \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1 + \frac{\sigma_1}{j\omega}}}, \quad \eta_2 = \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2 + \frac{\sigma_2}{j\omega}}},$$

$$k_1 = \omega \sqrt{\left(\varepsilon_1 + \frac{\sigma_1}{j\omega}\right) \mu_1}. \quad (24)$$

矢量匹配中假定频率上限为 14 GHz, 介质参数如下:

$$\varepsilon_{1r} = 2, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 0.01 \text{ s/m}, d = 2 \text{ mm},$$

$$\varepsilon_{2r} = 1, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0.2 \text{ s/m}, N = 20. \quad (25)$$

针对该组参数的 \tilde{Z}_R , 如图 5, 匹配后的实部和虚部均与原函数符合很好.

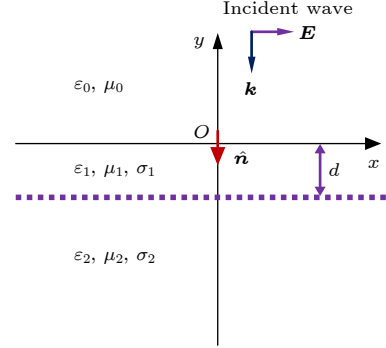


图 4 薄涂层示意图

Fig. 4. A conductive object with thin sheet.

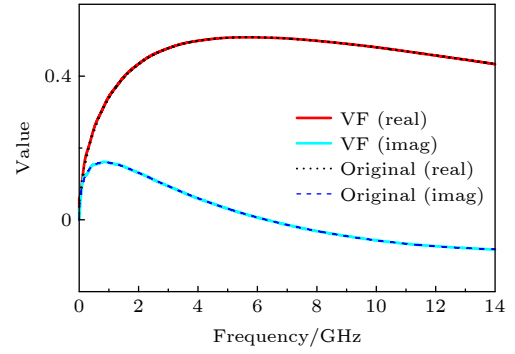


图 5 TIBC (\tilde{Z}_R)

Fig. 5. TIBC (\tilde{Z}_R).

由上面两个示例可见, 矢量匹配用于对 (18) 式的处理是成功的, 下一节将以此为基础开展仿真研究.

5 数值算例

考虑到一维情形可作为阻抗边界的基础算例验证, 因此本部分先给出一维 DGTD 算例进行验证, 然后给出三维算例.

5.1 一维 SIBC 算例

半空介质参数 $\varepsilon_{2r} = 2, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0.2 \text{ s/m}$, 与 4.1 节相同, 采用 1 维 DGTD 仿真, 反射波及入射波时域数据如图 6. 采集入射波数据及反射波数据后做傅里叶变换. 反射系数幅值及相位如图 7 和图 8. 本例中反射系数幅值误差为 0.00177, 反射系数相位误差为 0.00351, 精度均很高.

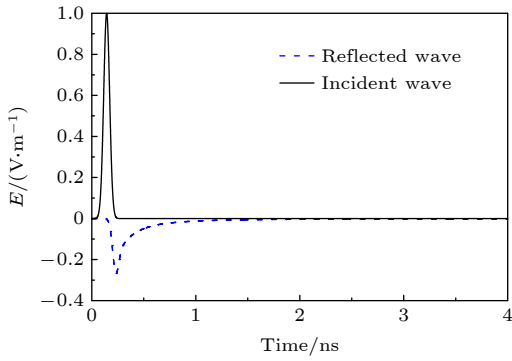


图 6 对于一维 SIBC 算例, 反射波及入射波时域数据
Fig. 6. Incident wave and reflected wave for one-dimensional SIBC example.

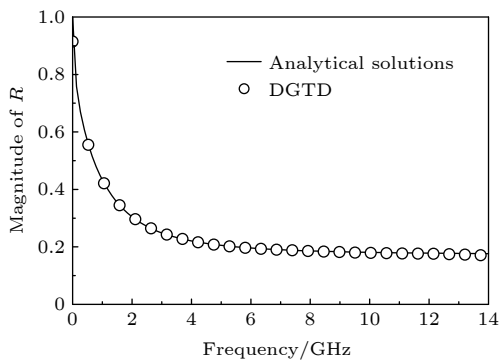


图 7 对于一维 SIBC 算例, 反射系数幅值
Fig. 7. Magnitude of the reflection coefficient for one-dimensional SIBC example.

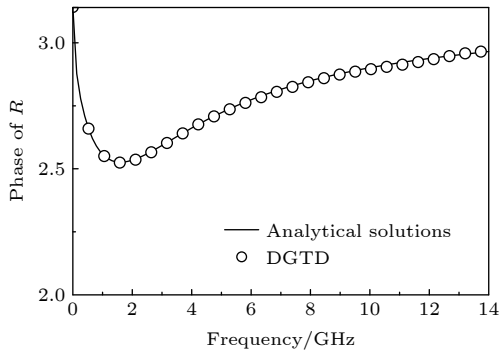


图 8 对于一维 SIBC 算例, 反射系数相位
Fig. 8. Phase of the reflection coefficient for one-dimensional SIBC example.

5.2 一维 TIBC 算例

涂覆介质示意图如图 4, 参数如下:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{1r} = 2, \quad \mu_{1r} = 1, \quad \sigma_1 = 0.01 \text{ s/m}, \quad d = 2 \text{ mm}, \\ \varepsilon_{2r} = 1, \quad \mu_{2r} = 1, \quad \sigma_2 = 0.2 \text{ s/m}. \end{aligned} \quad (26)$$

入射波及反射波时域数据如图 9. 反射系数幅

值及相位如图 10 和图 11. 本例中反射系数幅值误差为 0.00234, 反射系数相位误差为 0.00798, 精度依然很高.

就本节两个一维算例来看, 本文研究所得的反射系数及相位与解析解符合很好. 本文方案是精确有效的.

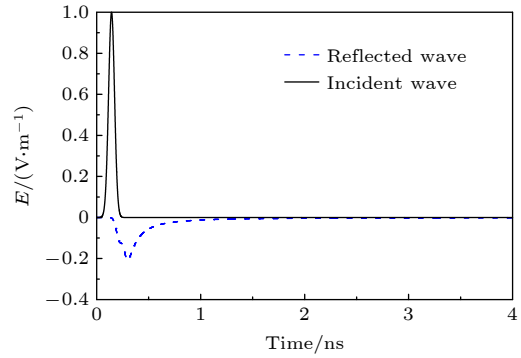


图 9 对于一维 TIBC 算例, 反射波及入射波时域数据
Fig. 9. Incident wave and reflected wave for one-dimensional TIBC example.

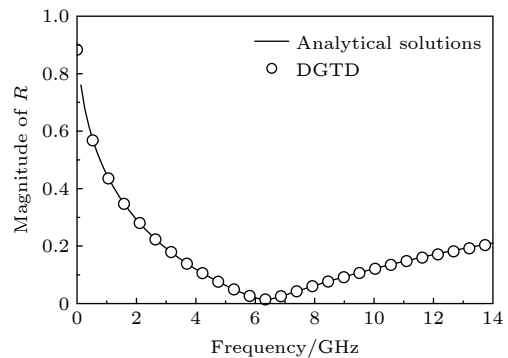


图 10 对于一维 TIBC 算例, 反射系数幅值
Fig. 10. Magnitude of the reflection coefficient for one-dimensional TIBC example.

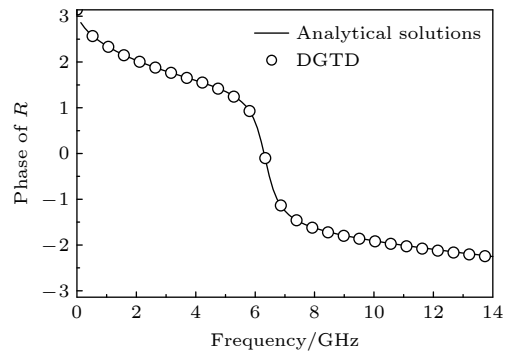


图 11 对于一维 TIBC 算例, 反射系数相位
Fig. 11. Phase of the reflection coefficient for one-dimensional TIBC example.

5.3 三维 SIBC 算例

该球为均匀介质球, 半径为 1 m, 介质参数为

$$\epsilon_{2r} = 2, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0.2 \text{ s/m}. \quad (27)$$

该参数可满足在频率范围内目标尺度大于透入深度, 沿用 SIBC 阻抗条件 (23) 式. 即对于球面上的单元均采用正入射近似. 模型中的球不离散, 采用本文理论计算球面上的电磁场.

基于以上参数, 该介质球单站 RCS 计算结果如图 12. 由图 12 可见, DGTD 结果 (虚线) 与 Mie 结果 (实线) 符合很好, 本文方案适用于三维情形. 本例的计算参数如表 2, 并给出了建模后的 DGTD (standard) 结果作为参考, DGTD (standard) 代表对球离散建模后的结果, 由表 2 可看出, 阻抗边界方案的 DGTD 精度稍低于标准版本的 DGTD 结果, 但影响不大, 精度满足需求. 因计算模型变化, 两个版本 DGTD 计算时间步有细微差异.

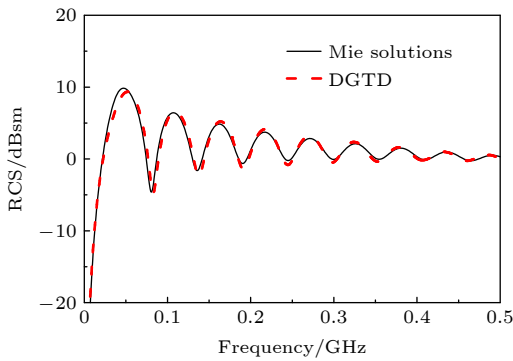


图 12 单站 RCS 结果
Fig. 12. Monostatic RCS.

本算例验证了理论的正确性, 但不足以体现本文算法的计算速度优势, 下一算例将处理涂覆目标问题.

5.4 三维 TIBC 算例

本算例为涂覆球, 此情形可利用 Mie 理论给出解析解便于对比. 模型如图 13. 图 13 中, 涂覆层厚度为 0.02 m, 图中为展示需要将薄层画得较厚. 本例仿真该球单站 RCS, 频率范围 0—0.5 GHz, 介质参数如下:

$$\begin{aligned} \epsilon_{1r} &= 20, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 0.01 \text{ s/m}, \\ \epsilon_{2r} &= 1, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0.2 \text{ s/m}. \end{aligned} \quad (28)$$

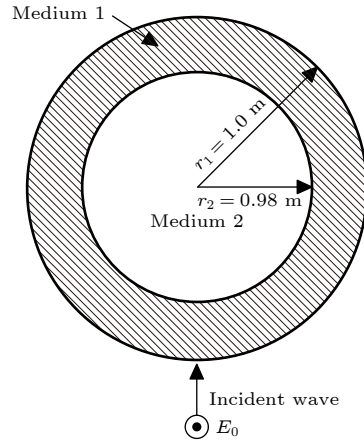


图 13 涂覆球
Fig. 13. Coated sphere.

在仿真频率范围内, 涂层厚度远小于其透入深度, 另一方面, 内部介质球的透入深度远小于其尺度. 如进行精确建模需要适应涂覆层厚度, 将耗费很高的计算资源, 采用本文理论可快速计算.

计算中球不离散, 表面电磁场数据由本文算法计算得到. 沿用 TIBC 阻抗条件 (24) 式. 对于球面上的单元均采用正入射近似. 基于以上参数, 该涂覆球单站 RCS 计算结果为图 14 所示. 本例中, DGTD(TIBC) 结果与 Mie 结果符合很好, 本例的计算参数如表 3.

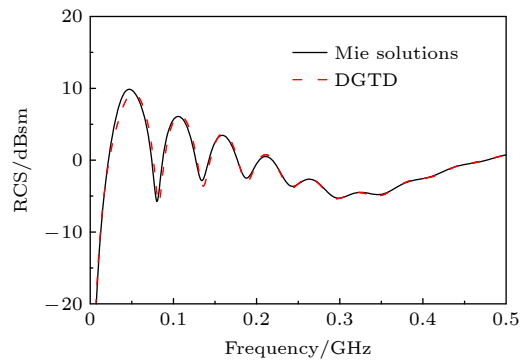


图 14 涂覆球单站 RCS 结果
Fig. 14. Monostatic RCS.

表 2 计算参数
Table 2. Calculation parameters.

	离散尺度/m	四面体数量	时间步/(10 ⁻¹¹ s)	计算时间/min	均方根误差/dB
DGTD (SIBC)	0.05	402094	0.328972	54	0.6237
DGTD (standard)	0.05	487677	0.328447	61	0.5836

表 3 计算参数
Table 3. Calculation parameters.

离散尺度/m	四面体数量	时间步/(10^{-11} s)	计算时间/min	均方根误差/dB
0.05	402094	0.328972	55	0.8782

该离散尺度由计算中的最高频率 0.5 GHz 决定 (波长/12), 如采用标准版 DGTD(需要精确建模), 则薄层处离散尺度依据计算经验需要修正为 0.002 m(涂层厚度/10). DGTD 属于显式有条件稳定算法. 精确建模会增加四面体数量并降低计算时间步. 0.002 m 为 0.05 m 的 1/25, 这代表计算时间步将会约为表 3 中时间步的 1/25, 忽略四面体数量增加的影响时, 计算时间将为本算例 25 倍. 这样的资源消耗在实践中很难承受.

6 结 论

本文提出了一种 DGTD 阻抗边界算法, 该算法经推导得到特定含阻抗 Z 的函数, 本文方案特点是对经推导后的特定函数 \tilde{Z}_R (18) 式进行有理分式近似 (FRVF). 此算法的优势是保留了数值通量的标准系数, 将复杂的频域转换问题由矢量匹配承担, 之后通过拉普拉斯逆变换得到时域迭代式. 本文提出的 DGTD 阻抗边界方案优点是阻抗边界相关迭代方程 (20) 无需处理矩阵, 理论形式简单, 易于编程. 一维算例及三维算例也表明了本文算法的精确性有效性. 本小组下一步拟基于现有成果研究可穿透薄层 (即薄层尺度小于透入深度且薄层两侧无导体情形), 该问题需要给出反射波及透射波数据, 本文工作可作为其基础.

参考文献

- [1] Senior T 1960 *Appl. Sci. Res.* **8** 418
- [2] Feliziani M 2011 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **54** 299
- [3] Nayyeri V, Soleimani M, Ramahi O M 2013 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **56** 385
- [4] Hanson G W 2008 *J. Appl. Phys.* **103** 064302
- [5] Nayyeri V, Soleimani M, Ramahi O M 2013 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **61** 6107
- [6] Shapoval O V, Gomez-Diaz J S, Perruisseau-Carrier J, Mosig J R, Nosich A I 2013 *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* **3** 666
- [7] da Costa K Q, Dmitriev V, Nascimento C M, Silvano G L 2014 *Microwave Opt. Technol. Lett.* **56** 1019
- [8] Beggs J H, Luebbers R J, Yee K S, Kunz K S 1992 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **40** 49
- [9] Oh K S, Schutt-Aine J E 1995 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **43** 660
- [10] Kobidze G 2010 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** 2394
- [11] Gustavsen B, Semlyen A 1999 *IEEE Trans. Power Delivery* **14** 1052
- [12] Yi M, Ha M, Qian Z, Aydinler A, Swaminathan M 2013 *IEEE Trans. Microwave Theory Tech.* **61** 4029
- [13] Glisson A W 1992 *Radio Sci.* **27** 935
- [14] Yan S, Jin J M 2013 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **61** 5533
- [15] Ylä-Oijala P, Kiminki S P, Järvenpää S 2010 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **58** 3997
- [16] Gyselinck J, Dular P, Geuzaine C, Sabariego R 2009 *IEEE Trans. Magn.* **45** 1280
- [17] Li P, Shi Y, Jiang L J, Bağcı H 2015 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** 5686
- [18] Li P, Jiang L J, Bağcı H 2015 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** 3065
- [19] Li P, Jiang L J, Bağcı H 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 3590
- [20] Wang P, Shi Y, Tian C Y, Li L 2018 *IEEE Antennas Wirel. Propag. Lett.* **17** 2169

A simplified impedance boundary algorithm in discontinuous Galerkin time-domain*

Yang Qian^{1)†} Wei Bing¹⁾ Li Lin-Qian¹⁾ Deng Hao-Chuan²⁾

¹⁾ (School of Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China)

²⁾ (Science and Technology on Electromagnetic Scattering Laboratory, Beijing Institute of Environmental Features, Beijing 100854, China)

(Received 2 November 2022; revised manuscript received 13 December 2022)

Abstract

Large-size conductive targets or coated targets are difficult problems in computational electromagnetics. In general, these problems can be classified as multi-scale problems. Multi-scale problems usually consume a large quantity of computational resources. A lot of efforts have been devoted to seeking for fast methods for these problems. When the skin depth is less than the size of a conductive target, the tangential component of the electric field and magnetic field over the surface of the target can be correlated by the surface impedance \tilde{Z} . The \tilde{Z} is usually a complex function of the frequency, and it can be used to formulate an impedance boundary condition (IBC) to describe iterative equations in time domain methods, avoiding the volumetric discretization of the target and improving computational efficiency. This condition is commonly known as the surface impedance boundary condition (SIBC). Similarly, for a conductor whose thickness is in the order of skin depth or less, it also has high resource requirements, if the target is of direct volume discretization. The transmission impedance boundary condition (TIBC) can be utilized instead of a coated object to reduce resource requirements. Therefore, there is no need to discretize volume.

There are few studies on the IBC scheme by using the discontinuous Galerkin time-domain (DGTD) method. Li et al. (Li P, Shi Y, Jiang L J, Bağcı H 2015 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** 5686; Li P, Jiang L J, Bağcı H 2015 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** 3065 ; Li P, Jiang L J, Bağcı H 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 3590) discussed the IBC scheme by using the DGTD, which involves complex matrix operations in the processing of IBC. In the DGTD method, numerical flux is used to transmit data between neighboring elements, and the key to the IBC scheme in DGTD is how to handle numerical flux. We propose a DGTD method with a simple form and matrix-free IBC scheme. The key to dealing with IBC in DGTD is numerical flux. Unlike the way in the literature, the impedance \tilde{Z} is not approximated by rational functions in our study. A specific function \tilde{Z}_R obtained after the derivation in this work is approximated by rational functions in the Laplace domain through using the vector-fitting (VF) method, and its time-domain iteration scheme is given. This approach avoids matrix operations. The TIBC and SIBC processing schemes are also given. The advantage of the proposed method are that the upwind flux's standard coefficients are retained and the complex frequency-time conversion problem is implemented by the vector-fitting method. The one-dimensional and three-dimensional examples also show the accuracy and effectiveness of our proposed method in this work.

Keywords: impedance boundary condition, vector-fitting method, discontinuous Galerkin time domain method

PACS: 02.70.Dh, 74.25.nm, 92.60.Ta

DOI: 10.7498/aps.72.20222104

* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61901324, 62001345), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 2019M653548, 2019M663928 XB), the Foundation of National Key Laboratory of Electromagnetic Environment, China (Grant No. 201903002), the Foundation of the Science and Technology on Electromagnetic Scattering Laboratory, China (Grant No. 61424090111), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant Nos. XJS200501, XJS200507, JB200501).

† Corresponding author. E-mail: qyang@xidian.edu.cn



一种简化的时域非连续伽略金阻抗边界算法

杨谦 魏兵 李林茜 邓浩川

A simplified impedance boundary algorithm in discontinuous Galerkin time-domain

Yang Qian Wei Bing Li Lin-Qian Deng Hao-Chuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 060202 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222104

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222104>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

您可能感兴趣的其他文章

Articles you may be interested in

基于广义交替数值通量的局部间断Galerkin方法求解二维波动方程

Two-dimensional wave equation solved by generalized alternating flux based local discontinuous Galerkin method

物理学报. 2020, 69(2): 020202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190613>

一种基于摄动理论的不连续系统Lyapunov指数算法

Lyapunov exponent algorithm based on perturbation theory for discontinuous systems

物理学报. 2021, 70(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210492>

适用复杂几何壁面的耗散粒子动力学边界条件

New dissipative particle dynamics boundary condition for complex geometry

物理学报. 2019, 68(14): 140204 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190533>

纳米颗粒布朗扩散边界条件的分子动力学模拟

Molecular dynamics simulation of Brownian diffusion boundary condition for nanoparticles

物理学报. 2021, 70(14): 148201 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20202240>

一种测量大气消光系数边界值的新方法

A new method of measuring boundary value of atmospheric extinction coefficient

物理学报. 2018, 67(5): 054205 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172008>

基于一种改进的虚拟单元法模拟包含静止/运动边界的流动问题

An improved ghost cell method for flow simulation involving static and moving boundary

物理学报. 2019, 68(12): 124703 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20190013>