

# 一种强鲁棒性的时域非连续伽略金可穿透薄层算法\*

杨谦<sup>1)†</sup> 魏兵<sup>1)</sup> 李林茜<sup>1)</sup> 邓浩川<sup>2)</sup>

1) (西安电子科技大学物理学院, 西安 710071)

2) (电磁散射重点实验室, 北京 110000)

(2022年11月21日收到; 2023年1月29日收到修改稿)

本文研究了时域非连续伽略金算法 (discontinuous Galerkin time-domain, DGTD) 中的可穿透薄层问题, 薄层问题属于多尺度问题, 精确建模资源消耗太高难以实施, 可采用近似方案. 研究发现采用等效表面电流激励易产生发散, 为提高计算方案鲁棒性, 研究了电磁场修正方案, 这一方案允许采用参数很大的薄层 (高介电系数), 其计算方法简便易行. 此外, 还给出了多层介质薄层的仿真方案, 并对相关数值算例进行验证, 结果说明了本文算法的精确性和有效性, 本文方案可用于复杂薄层电磁问题的快速求解.

**关键词:** 可穿透薄层, 多尺度问题, 时域非连续伽略金算法**PACS:** 02.70.Dh, 74.25.nn, 92.60.Ta**DOI:** 10.7498/aps.72.20222230

## 1 引言

薄层问题在一些工程问题中较为常见, 例如涂覆目标或介质罩. 假如薄层后方介质的透入深度远小于介质尺度, 可采用传输线阻抗边界解决<sup>[1-3]</sup>. 当薄层的两侧均为自由空间或者后方介质的透入深度大于或与该介质尺度相当时, 传输线阻抗边界条件并不适用. 此类问题需要给出入射波及反射波数据, 也被称为可穿透薄层问题.

处理可穿透薄层问题时需要给出两侧的电波数据, 表面阻抗边界条件或者传输线阻抗边界条件并不适用. 这一方面研究者们展开了很多工作. 例如在时域有限差分法 (the finite difference time-domain method, FDTD) 中采用亚网格来处理薄层问题<sup>[4]</sup>. 考虑到精确建模是一种成本很高的计算

方式, 即便采用局域时间步或者其他优化方式也很难快速求解. 为快速求解, 可对薄层进行近似处理, 采用另外的边界条件来描述薄层. 例如引入极化电流得到的经典可穿透薄层边界条件<sup>[5-7]</sup>. 随着研究的深入, 研究者也研究了不同类型的薄层问题. 例如导电类型薄层、弯曲薄层等<sup>[8-10]</sup>. 在数值算法中, 也有研究者引入新的薄层边界条件<sup>[11,12]</sup>. 此外对于薄层的几何特征而言, FDTD 对平面类型薄层表现很好, 对于弯曲薄层需要设计复杂插值拟合修正方案.

时域非连续伽略金算法 (discontinuous Galerkin time-domain, DGTD) 是一种新型有限元算法, 具备非结构网格建模及显式时域迭代的优势, 目前处于快速发展阶段<sup>[13-15]</sup>. 对于 DGTD 算法, 薄层问题也是一个难点, 精确建模非常消耗计算资源, 即便引入局域时间步方案也很难快速处理<sup>[16]</sup>.

\* 国家自然科学基金 (批准号: 61901324, 62001345)、中国博士后科学基金 (批准号: 2019M653548, 2019M663928XB)、电波环境特性及模化技术国防科技重点实验室基金 (批准号: 201903002)、电磁散射重点实验室基金 (批准号: 61424090111) 和中央高校基本科研业务费 (批准号: XJS200501, XJS200507, JB200501) 资助的课题.

† 通信作者. E-mail: [qyang@xidian.edu.cn](mailto:qyang@xidian.edu.cn)

DGTD 采用非结构网格, 还需注意薄层区域与周围普通区域的离散尺度相差太大会严重影响单元(四面体)质量, 进而影响计算时间及精度. 引入相应的薄层边界是较为可行的快速求解方案. DGTD 还具备几何拟合特性的优势, 假如薄层模型是弯曲的, 可以建立一个相匹配的共形几何模型来处理薄层, 从而避免复杂的插值修正方案.

本文研究低耗介质薄层, 对于低耗介质薄层, 电流激励方案在介电系数较大时易发散, 其鲁棒性较差. 为解决这一问题, 采用电磁场修正方案在 DGTD 中处理薄层问题, 计算非常稳定. 另外, 工程问题可能遇到多层介质薄层. 本文也给出了多层薄层的仿真方案, 并给出了相关算例作为验证. 本文分为 4 个部分, 首先介绍了单层介质层的 DGTD 仿真方案和多层介质层的 DGTD 仿真方案, 然后给出数值算例, 最后论证了本方案的正确性.

## 2 单层介质层的 DGTD 仿真方案

半空间阻抗边界可应用于趋肤深度远小于目标尺度的问题, 例如均匀介质目标或涂覆目标. 工程实践中可能还会遇到一类特殊问题, 薄层的内外两侧均为自由空间或者某种透入深度远大于介质尺度的介质层. 该类电磁问题需要给出透射波及反射波数据才能得到完整的电磁问题解, 其示意图见图 1.

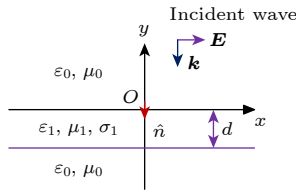


图 1 薄涂层示意图

Fig. 1. Plane wave incident on a thin layer.

当介质层厚度远小于待分析电磁波长时可称为薄层问题. 此外本工作基于数值算法 DGTD, 待处理的薄层问题还需遵循以下假设: 1) 薄层厚度远小于透入深度; 2) 薄层曲率半径远大于薄层透入深度及薄层厚度<sup>[17]</sup>. 很明显此情形不太适合精确建模, 精确建模耗费资源过高, 采用近似方案是顺理成章的选择.

图 1 中薄层两侧标注为了自由空间, 需要指出, 本文方案也支持将上侧或下侧空间设置为其他

介质. 假设薄层的介电系数为

$$\epsilon_{\text{Layer}} = \epsilon_1 + \frac{\sigma_1}{j\omega}, \quad (1)$$

式中,  $\epsilon_{\text{Layer}}$  代表薄层复介电系数,  $\epsilon_1$  为介电系数,  $\sigma_1$  为电导率. 后续推导中基于边界条件只考虑切向电磁场分量, 可忽略法向电磁场分量的影响, 并沿用文献 [17] 中的假设: 1) 薄层厚度远小于透入深度; 2) 薄层曲率半径远大于薄层透入深度及薄层厚度. 基于此假设接下来可对切向电磁场进行近似处理.

当薄层厚度很薄, 可假设切向电场在薄层中不变. 基于电磁波理论, 电磁波传播中, 在薄层介质中存在极化电流, 推导过程为

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_t &= \epsilon_0 \mathbf{E}_t + \mathbf{P}_t, \\ &\Downarrow \\ \mathbf{P}_t &= (\epsilon_{\text{Layer}} - \epsilon_0) \mathbf{E}_t, \\ &\Downarrow \\ \mathbf{J}_{\text{IP}} &= j\omega(\epsilon_{\text{Layer}} - \epsilon_0) \mathbf{E}_t, \end{aligned} \quad (2)$$

式中, 电场  $\mathbf{E}_t$ 、电极化强度  $\mathbf{P}_t$ 、电位移矢量  $\mathbf{D}_t$ 、极化电流  $\mathbf{J}_{\text{IP}}$  均为切向量. 将极化电流乘以薄层厚度  $d$  得到近似表面电流  $\mathbf{J}_s$ :

$$\mathbf{J}_s = j\omega(\epsilon_{\text{Layer}} - \epsilon_0)d\mathbf{E}_t. \quad (3)$$

这一条件被称为近似边界条件 (approximate boundary condition), 该条件在数值算法中应用广泛, 当电导率较低时对薄层问题精确度很好. 对本文所研究的 DGTD 算法, (3) 式的引入有两种方案, 即等效电流方案和电磁场修正方案.

### 2.1 等效电流方案

(3) 式代表了表面电流, 在 DGTD 算法中, 可通过数值通量引入表面电流激励<sup>[18-20]</sup>, 其公式如下:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^* &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}^e + k_{\text{E}}^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^{e+} - \mathbf{Z}^{e+} \mathbf{J}_s - \mathbf{E}^e)] \\ &\quad + v_{\text{H}}^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^{e+} - \mathbf{H}^e))], \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^* &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}^e + k_{\text{H}}^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}^{e+} - \mathbf{H}^e)] \\ &\quad - v_{\text{E}}^e [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}^{e+} - \mathbf{Z}^{e+} \mathbf{J}_s - \mathbf{E}^e))], \\ k_{\text{E}}^e &= \frac{Y^{e+}}{Y^e + Y^{e+}}, \quad v_{\text{H}}^e = \frac{1}{Y^e + Y^{e+}}, \\ k_{\text{H}}^e &= \frac{Z^{e+}}{Z^e + Z^{e+}}, \quad v_{\text{E}}^e = \frac{1}{Z^e + Z^{e+}}, \end{aligned} \quad (4)$$

式中  $\mathbf{E}^*$  和  $\mathbf{H}^*$  代表  $e$  号单元通量项, 加上标\*.  $\hat{\mathbf{n}}$  代表单元外法向.  $k_{\text{E}}^e$ ,  $v_{\text{H}}^e$ ,  $k_{\text{H}}^e$ ,  $v_{\text{E}}^e$  为通量系数.  $\mathbf{E}^e$

和  $\mathbf{H}^e$  代表  $e$  号单元电场及磁场.  $\mathbf{E}^{e+}$  和  $\mathbf{H}^{e+}$  代表与  $e$  号单元相邻的  $e+$  单元的电场及磁场, + 符号在本文中代表相邻.  $Z^{e+}$  与  $Y^{e+}$  即为薄层介质的阻抗与导纳.  $\mathbf{J}_S$  为 (3) 式得到的表面电流, 通过  $\mathbf{J}_S$  可将薄层引入计算, 无需对薄层建模. 经 (3) 式转换得到的时域迭代式为

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^n &= \frac{1}{2}(\mathbf{E}_t^{e+} + \mathbf{E}_t^e)^n, \\ \mathbf{J}_S^{n+1/2} &= T_1 \mathbf{E}_t^{n+1} - T_2 \mathbf{E}_t^n, \\ T_1 &= d \left[ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\Delta t} + \frac{\sigma_1}{2} \right], \\ T_2 &= d \left[ \frac{(\varepsilon_1 - \varepsilon_0)}{\Delta t} - \frac{\sigma_1}{2} \right], \end{aligned} \quad (5)$$

式中  $\mathbf{E}_t^e$  代表  $e$  号单元电场,  $\mathbf{E}_t^{e+}$  代表相邻的  $e+$  单元电场.  $\mathbf{E}_t^n$  代表两个单元之间薄层中的切向电场, 采用两侧电场平均处理.  $n$  代表电场为整数时间步采样,  $\mathbf{J}_S^{n+1/2}$  代表经计算后得到的薄层表面电流,  $n+1/2$  代表表面电流半整数时间步采样. (5) 式可引入 (4) 式, 经整理后得到 DGTD 迭代方案供计算. 研究发现该方案在参数较大时可能产生发散现象.

假设薄层两侧为自由空间, 薄层参数为

$$\varepsilon_{1r} = 20, \quad \mu_{1r} = 1, \quad \sigma_1 = 0, \quad d = 0.2 \text{ mm}. \quad (6)$$

采用一维 DGTD 计算, 模型离散尺度 12.5 mm, 图 2 为其反射透射系数结果.

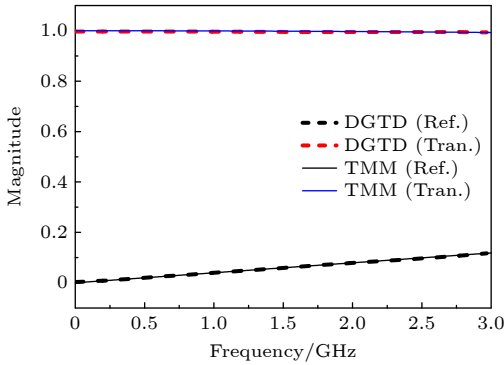


图 2 一维 DGTD 反射透射结果

Fig. 2. The reflection and transmission coefficients (1D-DGTD).

DGTD 结果与传输矩阵法 (transfer matrix method, TMM) 符合很好. 但在程序测试中发现, 薄层的相对介电系数  $\varepsilon_{1r}$  不能设置太大. 例如对于本例计算模型, 当其他参数不变,  $\varepsilon_{1r} = 30$  就会发散. 其原因是等效电流是一个额外的激励源, 等效

电流在激励处激发出的电磁波与入射波叠加, 这一特性在参数较小时两种波叠加可形成正常反射波与透射波数据. 当介电系数较大时, 由 (5) 式可看出电场电流耦合会起到放大作用易使计算发散. 另外这一特性并非 DGTD 独有, 按照前文方案测试了一维 FDTD, 在  $\varepsilon_{1r} = 30$  也出现了发散现象. 注意到 FDTD 的相关文献也并未采用电流激励类型的薄层方案, 可得出结论, 等效电流的计算方案鲁棒性较差, 为解决这一问题, 提出电磁场修正方案.

## 2.2 电磁场修正方案

在 (3) 式中的表面电流还可以采用薄层两侧磁场差值表述, 重写为

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_S &= j\omega(\varepsilon_{\text{Layer}} - \varepsilon_0)d\mathbf{E}_t, \\ &\Downarrow \\ \hat{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) &= -j\omega(\varepsilon_{\text{Layer}} - \varepsilon_0)d[\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{E})], \\ &\Downarrow \\ -\hat{n} \times (\mathbf{H}^+ - \mathbf{H}^-) &= \left[ \frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \sigma_1 \right] \\ &\quad \times d[\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{E})]. \end{aligned} \quad (7)$$

在 DGTD 使用了 Whitney 矢量基函数, 该基函数在面上具有切向特性, 与前文理论自洽, (7) 式中也采用了切向电磁场表述. 在 (7) 式中, 在已知薄层两侧磁场时, 可用来计算薄层中的电场. 在应用这一条件时电场及磁场分量均应置于薄层两侧表面, 这时差分迭代式精度最高.

由于 DGTD 具备非结构网格特性, 且电磁场可选择同一组矢量基函数, 电磁场分量空间位置也相同, (7) 式在 DGTD 中可取得较高的精度. DGTD 薄层示意图见图 3.

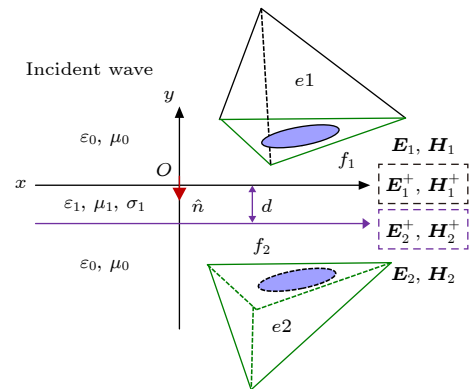


图 3 薄层-四面体示意图 (DGTD)

Fig. 3. Thin layer-tetrahedrons schematic (DGTD).

如图 3 所示, 假设薄层被嵌入两个相邻的四面体  $e1$  与  $e2$  之间 (图中将其分开绘图), 相邻面为  $f1$  与  $f2$ .  $e1$  的电磁场数据为  $\mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ ,  $e2$  的电磁场数据为  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2$ . 薄层两侧的电场分别为  $\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+$  与

$\mathbf{E}_2^+, \mathbf{H}_2^+$ . 这里沿用前面的假定, 认为薄层内电场恒定 ( $\mathbf{E}_1^+ = \mathbf{E}_2^+$ ).

首先分析  $\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+$ , 相关的数值通量公式如下:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1^* &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1 + k_E^{e1} [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1)] + v_H^{e1} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1^+ - \mathbf{H}_1))], \\ \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1^* &= \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{H}_1 + k_H^{e1} [\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_1^+ - \mathbf{H}_1)] - v_E^{e1} [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{E}_1^+ - \mathbf{E}_1))], \\ k_E^{e1} &= \frac{Y^{e+}}{Y^{e1} + Y^{e1+}}, \quad v_H^{e1} = \frac{1}{Y^{e1} + Y^{e1+}}, \quad k_H^{e1} = \frac{Z^{e1+}}{Z^{e1} + Z^{e1+}}, \quad v_E^{e1} = \frac{1}{Z^{e1} + Z^{e1+}}, \\ Z^{e1} &= \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}, \quad Y^{e1} = \frac{1}{Z^{e1}}, \quad Z^{e1+} = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_1}}, \quad Y^{e1+} = \frac{1}{Z^{e1+}},\end{aligned}\quad (8)$$

式中  $\mathbf{E}_1^*$  和  $\mathbf{H}_1^*$  代表  $e1$  号单元通量项, 加上标\*.  $Z^{e+}$  与  $Y^{e+}$  即为薄层介质的阻抗与导纳. 假定已知  $\mathbf{E}_2, \mathbf{H}_2, \mathbf{E}_1, \mathbf{H}_1$ . 需要求解  $\mathbf{E}_1^+, \mathbf{H}_1^+$ . 对 (7) 式继续推导, 其对应形式如下:

$$\begin{aligned}\left[ \frac{\partial}{\partial t} (\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \sigma_1 \right] d [\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1^+)] &= -\hat{\mathbf{n}} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1), \\ [\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{E}_1^+)]^{n+1} &= T_1 [-\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1)]^{n+\frac{1}{2}} + T_2 [\hat{\mathbf{n}}_{12} \times (\hat{\mathbf{n}}_{12} \times \mathbf{E}_1^+)]^n, \\ T_1 &= \frac{1}{d [(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \Delta t + \sigma_1 / 2]}, \quad T_2 = \frac{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \Delta t - \sigma_1 / 2]}{[(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) / \Delta t + \sigma_1 / 2]},\end{aligned}\quad (9)$$

式中  $\hat{\mathbf{n}}_{12}$  指从 1 指向 2 的方向, 在图 3 中指向下方. (9) 式在 DGTD 中需要进行矩阵化处理, 对应的矩阵形式为

$$\begin{aligned}\{E^{e1+}\}^{n+1} &= T_1 \left\{ -[Mg^{e1}]^{-1} \{Mf^{e1}\} \{H^{e2} - H^{e1}\} \right\}^{n+\frac{1}{2}} + T_2 \{E^{e1+}\}^n, \\ Mf_{ij}^{e1} &= \iint_{S_e} \mathbf{N}_i^{e1} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j^{e1}) ds, \quad Mg_{ij}^{e1} = \iint_{S_e} \mathbf{N}_i^{e1} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j^{e1})) ds,\end{aligned}\quad (10)$$

式中  $\mathbf{N}_i^e$  及  $\mathbf{N}_j^e$  为矢量基函数,  $i$  及  $j$  代表了矩阵的下标.  $e1$  及  $e2$  代表两侧的单元.  $\{E^{e1+}\}^{n+1}$  即为虚拟的薄层电场计算结果.

此外还需要给出磁场式, 采取近似, 令

$$\{H^{1+}\}^{n+\frac{1}{2}} = \{H^1\}^{n+\frac{1}{2}}, \quad \{H^{2+}\}^{n+\frac{1}{2}} = \{H^2\}^{n+\frac{1}{2}}. \quad (11)$$

采取 (11) 式近似可满足 (7) 式—(9) 式自治.  $\{H^{e1+}\}^{n+\frac{1}{2}}$  及  $\{E^{e1+}\}^{n+1}$  由 (10) 式和 (11) 式计算得到, 可代入 (12) 式继续计算 DGTD 中的数值通量项:

$$\begin{aligned}\{Fh^{e1}\}^{n+\frac{1}{2}} &= k_H^{e1} \sum [Mf^{e1}] \cdot \{H^{e1+} - H^{e1}\}^{n+\frac{1}{2}} - v_E^{e1} \sum [Mg^{e1}] \cdot \{E^{e1+} - E^{e1}\}^n, \\ \{Fe^{e1}\}^{n+1} &= k_E^{e1} \sum [Mf^{e1}] \cdot \{E^{e1+} - E^{e1}\}^{n+1} + v_H^{e1} \sum [Mg^{e1}] \cdot \{H^{e1+} - H^{e1}\}^{n+\frac{1}{2}}, \\ Mf_{ij}^{e1} &= \iint_{S_e} \mathbf{N}_i^{e1} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j^{e1}) ds, \quad Mg_{ij}^{e1} = \iint_{S_e} \mathbf{N}_i^{e1} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{N}_j^{e1})) ds.\end{aligned}\quad (12)$$

相关的 DGTD 时域迭代式为

$$\begin{aligned}
 \{\mathbf{E}^e\}^{n+1} &= a_E \{\mathbf{E}^e\}^n + b_E [\mathbf{M}^e]^{-1} \left\{ [\mathbf{S}^e] \{\mathbf{H}^e\}^{n+\frac{1}{2}} + \{\mathbf{F}h^e\}^{n+\frac{1}{2}} \right\}, \\
 \{\mathbf{H}^e\}^{n+\frac{3}{2}} &= a_H \{\mathbf{H}^e\}^{n+\frac{1}{2}} - b_H [\mathbf{M}^e]^{-1} \left\{ [\mathbf{S}^e] \{\mathbf{E}^e\}^{n+1} + \{\mathbf{F}e^e\}^{n+1} \right\}, \\
 M_{ij}^e &= \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot \mathbf{N}_j^e d\Omega, \quad S_{ij}^e = \iiint_{\Omega^e} \mathbf{N}_i^e \cdot (\nabla \times \mathbf{N}_j^e) d\Omega, \\
 a_E &= \frac{\varepsilon - \frac{1}{2}\sigma\Delta t}{\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma\Delta t}, \quad a_H = \frac{\mu - \frac{1}{2}\sigma_m\Delta t}{\mu + \frac{1}{2}\sigma_m\Delta t}, \quad b_E = \frac{\Delta t}{\varepsilon + \frac{1}{2}\sigma\Delta t}, \quad b_H = \frac{\Delta t}{\mu + \frac{1}{2}\sigma_m\Delta t},
 \end{aligned} \tag{13}$$

式中,  $e$  代表单元编号,  $\mathbf{M}^e$  为质量矩阵,  $\mathbf{S}^e$  为刚度矩阵,  $\mathbf{F}h^e$  及  $\mathbf{F}e^e$  为数值通量项.  $\mathbf{E}^e$  及  $\mathbf{H}^e$  分别代表电磁场项.  $e_1$  及  $e_2$  具有对偶性, 参考 (8) 式—(10) 式,  $\mathbf{E}_2^+$  相关迭代式为

$$\begin{aligned}
 [\hat{n}_{21} \times (\hat{n} \times \mathbf{E}_2^+)]^{n+1} &= T_1 [-\hat{n}_{21} \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2)]^{n+\frac{1}{2}} + T_2 [\hat{n}_{21} \times (\hat{n}_{21} \times \mathbf{E}_2^+)]^n, \\
 &\Downarrow \\
 \{\mathbf{E}^{e2+}\}^{n+1} &= T_1 \left\{ -[\mathbf{M}g^{e2}]^{-1} \{[\mathbf{M}f^{e2}] \{H^{e1} - H^{e2}\}\} \right\}^{n+\frac{1}{2}} + T_2 \{\mathbf{E}^{e2+}\}^n, \\
 Mf_{ij}^{e2} &= \iint_{S^e} \mathbf{N}_i^{e2} \cdot (\hat{n} \times \mathbf{N}_j^{e2}) ds, \quad Mg_{ij}^{e2} = \iint_{S^e} \mathbf{N}_i^{e2} \cdot (\hat{n} \times (\hat{n} \times \mathbf{N}_j^{e2})) ds,
 \end{aligned} \tag{14}$$

式中  $\hat{n}_{21}$  代表从 2 指向 1 的方向, 在图 3 中指向上方.

上述方案对薄层两侧介质并无特定要求, 允许一侧介质为非自由空间, 后文将给出相关算例.

### 3 多层介质层的 DGTD 仿真方案

工程应用中经常会遇见多层复合材料, 此类材料总体厚度依然很小, 其内部可能存在多层不同介质. 这一情形可基于第 2 节进行推广. 其示意图见图 4.

假设薄层为多层结构, 每层的极化电流可表达为

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_{L1} &= j\omega(\varepsilon_{\text{Layer}1} - \varepsilon_0)\mathbf{E}, \\
 \mathbf{J}_{L2} &= j\omega(\varepsilon_{\text{Layer}2} - \varepsilon_0)\mathbf{E}, \\
 &\dots
 \end{aligned} \tag{15}$$

相应地, 将每层的等效表面电流累加可得:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{J}_S &= \mathbf{J}_{L1}d_1\mathbf{E} + \mathbf{J}_{L2}d_2\mathbf{E} + \dots = \sum_{n=1}^{NL} \mathbf{J}_{Ln}d_n\mathbf{E} \\
 &= \left[ j\omega \sum_{n=1}^{NL} (\varepsilon_{\text{Layer } n}d_n - \varepsilon_0d_n) + \sum_{n=1}^{NL} \sigma_n d_n \right] \mathbf{E},
 \end{aligned} \tag{16}$$

式中  $NL$  为层数. 后续步骤与 2.2 节类似, 例如 (9) 式中的  $T_1$  和  $T_2$  系数修改为

$$\begin{aligned}
 T_1 &= \left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{NL} (\varepsilon_{\text{Layer } n}d_n - \varepsilon_0d_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NL} \sigma_n d_n \right]^{-1}, \\
 T_2 &= \frac{\left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{NL} (\varepsilon_{\text{Layer } n}d_n - \varepsilon_0d_n) - \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NL} \sigma_n d_n \right]}{\left[ \frac{1}{\Delta t} \sum_{n=1}^{NL} (\varepsilon_{\text{Layer } n}d_n - \varepsilon_0d_n) + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{NL} \sigma_n d_n \right]}.
 \end{aligned} \tag{17}$$

后续方案不变, 这一修正在程序中是非常易于实现的.

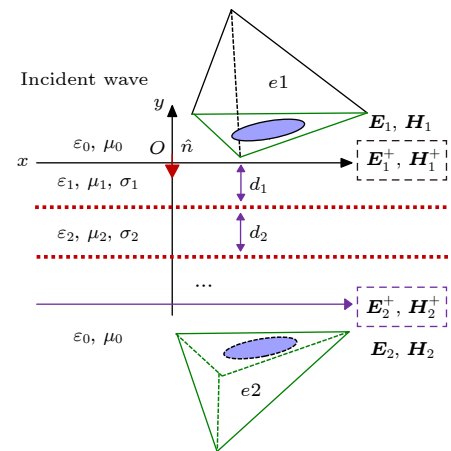


图 4 多薄层-四面体示意图 (DGTD)

Fig. 4. Thin layers-tetrahedrons schematic (DGTD).

## 4 数值算例

考虑到一维情形可作为可穿透薄层算法的基础算例验证, 因此本部分先给出一维 DGTD 算例进行验证, 然后给出三维算例. DGTD 采用非结构网格, 三维情形只需设置与薄层共形的网格即可, 无需设计插值方案.

### 4.1 一维 DGTD 单层薄层

首先假设薄层两侧均为自由空间, 令薄层参数见 (6) 式. DGTD 离散尺度为 12.5 mm, 反射透射系数如图 5 所示.

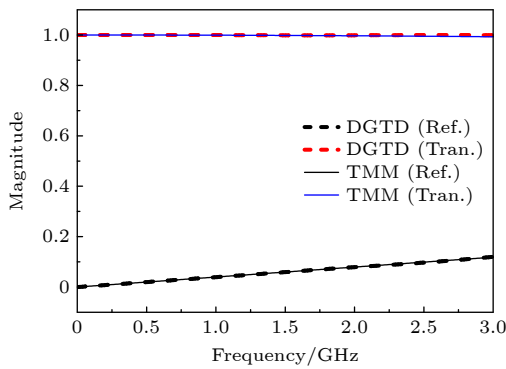


图 5 一维 DGTD 反射透射结果

Fig. 5. The reflection and transmission coefficients (1D-DGTD).

反射系数和透射系数的均方根误差分别为 0.00082 和 0.0029, DGTD 结果与传输矩阵法 (transfer matrix method, TMM) 符合很好. 该算例表明本文方案在参数较小时可给出正确结果. 修改薄层参数为

$$\epsilon_{1r} = 1000, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 2, d = 0.2 \text{ mm}. \quad (18)$$

沿用相同的计算模型 (离散尺度为 12.5 mm), 反射透射系数如图 6 所示.

反射系数和透射系数的均方根误差分别为 0.0012 和 0.0019, 由本例可见, 本文提出的方案对高介电系数薄层结果也符合解析解.

假设薄层一侧为自由空间, 另一侧为介质层. 薄层 (图 7 中 Thin layer1) 参数依然为  $\epsilon_{1r} = 1000, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 2, d = 0.2 \text{ mm}$ . 介质层 (见图 7 中 Layer2) 参数为  $\epsilon_{2r} = 5, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0, d = 25 \text{ mm}$ . 计算模型的离散尺度为 12.5 mm. 模型示意图如图 7 所示.

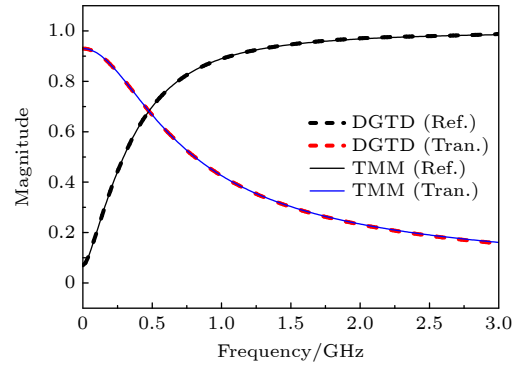


图 6 一维 DGTD 反射透射结果

Fig. 6. The reflection and transmission coefficients (1D-DGTD).

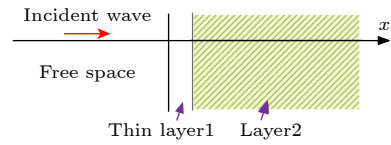


图 7 一维模型示意图

Fig. 7. One-dimensional model schematic.

该例中薄层不离散, 采用本文方案, 介质层较厚需要离散. DGTD 的反射透射系数结果如图 8 所示.

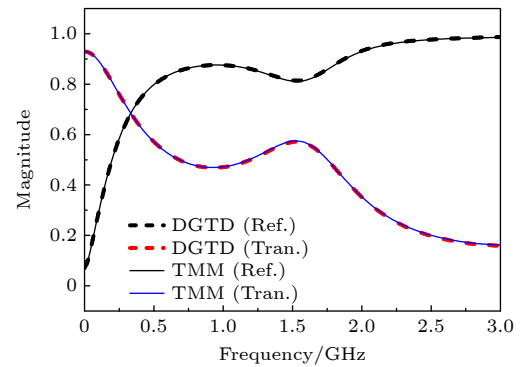


图 8 一维 DGTD 反射透射结果

Fig. 8. The reflection and transmission coefficients (1D-DGTD).

反射系数和透射系数的均方根误差分别为 0.0015 和 0.0020. 由上述结果可知, 本文给出的方案效果很好, 适用于高介电系数薄层问题, 也可用于分析薄涂层介质问题.

### 4.2 一维 DGTD 双层薄层

首先假设薄层两侧均为自由空间, 模型如图 9 所示.

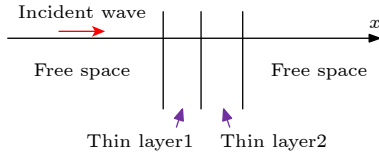


图 9 双薄层示意图

Fig. 9. Thin layers schematic.

令薄层参数为

$$\begin{aligned} \epsilon_{1r} &= 800, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 1, d = 0.05 \text{ mm}, \\ \epsilon_{2r} &= 600, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 2, d = 0.15 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (19)$$

DGTD 离散尺度为 12.5 mm, 反射透射系数如图 10 所示. 其反射系数和透射系数的均方根误差分别为 0.0013 和 0.0015.

令假设薄层一侧为自由空间, 另一侧为厚介质层, 示意图如图 11. 该例薄层采用近似方案, 厚介质层需要建立模型, 参数为

$$\begin{aligned} \epsilon_{1r} &= 800, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 1, d = 0.05 \text{ mm}, \\ \epsilon_{2r} &= 600, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 2, d = 0.15 \text{ mm}, \\ \epsilon_{3r} &= 5, \mu_{3r} = 1, \sigma_3 = 0, d = 25 \text{ mm}. \end{aligned} \quad (20)$$

其反射透射系数结果如图 12 所示, 其反射系数和透射系数的均方根误差分别为 0.0020 和 0.0021.

由上述算例可以看出, 本文算法对多种复杂情形的一维 DGTD 算例可给出精确结果.

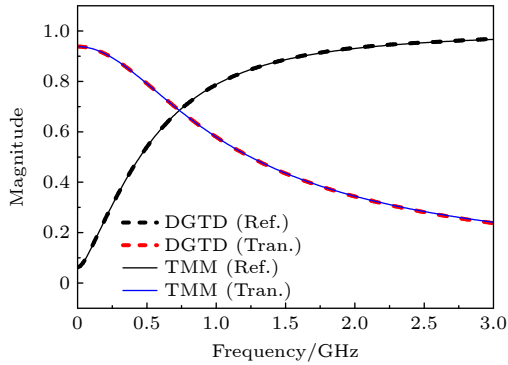


图 10 一维 DGTD 反射透射结果

Fig. 10. The reflection and transmission coefficients (1D-DGTD).

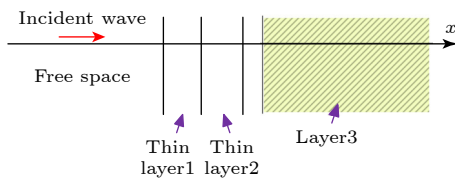


图 11 双薄层示意图 (一侧为介质层)

Fig. 11. Thin layers with thick layer schematic.

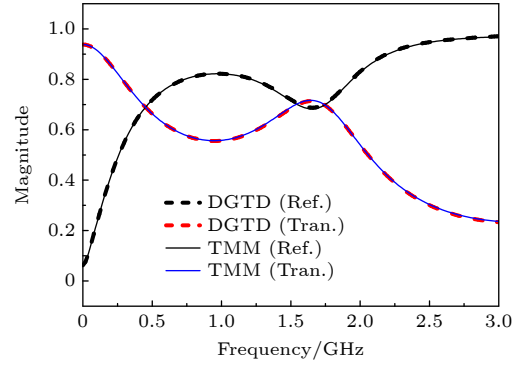


图 12 一维 DGTD 反射透射结果

Fig. 12. The reflection and transmission coefficients (1D-DGTD).

### 4.3 三维 DGTD

DGTD 天然适用于弯曲几何外形, 上述方案可无缝衔接并应用到三维情形. 当然也应注意到, 近似边界条件针对切向电磁场, 其误差受电磁波入射角度、薄层厚度、薄层几何特性及波长等的影响, 在使用中应注意.

首先给出一个低介电系数球形薄层算例, 示意图见图 13. 从图 13 可以看出, 薄层为球形, 厚度 0.2 mm, 参数为  $\epsilon_{1r} = 20, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 0 \text{ s/m}$ , 薄层内外设置为自由空间. 该球单站 RCS 结果见图 14, 本例均方根误差为 0.4967 dB.

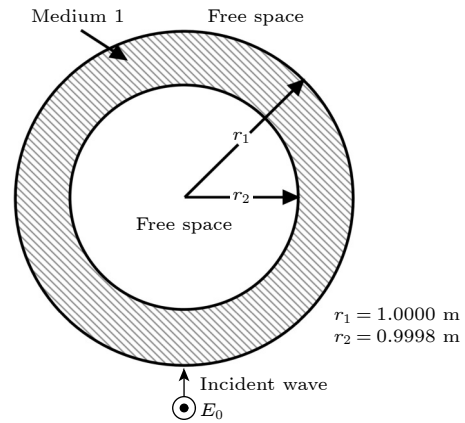


图 13 球形薄层

Fig. 13. Spherical thin layer.

三维涂覆球测试示意图见图 15. 该球参数为

$$\begin{aligned} \epsilon_{1r} &= 1000, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 2 \text{ s/m}, \\ \epsilon_{2r} &= 2, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 0.005 \text{ s/m}. \end{aligned}$$

球面外设置为自由空间, 该球单站 RCS 结果见图 16, 且图 16 给出了 Mie 结果进行对比. 从图 16 可以看出, DGTD 的近似结果与 Mie 结果符合很好. 本例均方根误差为 0.6922 dB.

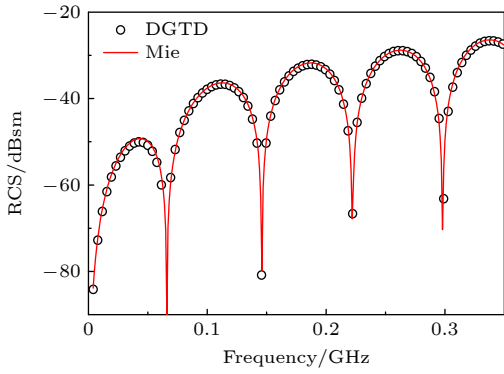


图 14 球形薄层单站 RCS 结果

Fig. 14. Monostatic RCS of the spherical thin layer.

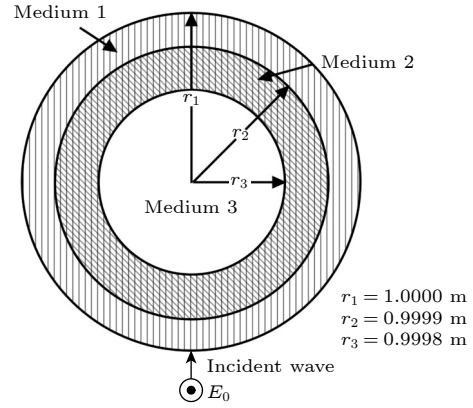


图 17 涂覆球 (双层涂覆)

Fig. 17. Coated sphere (double thin layers).

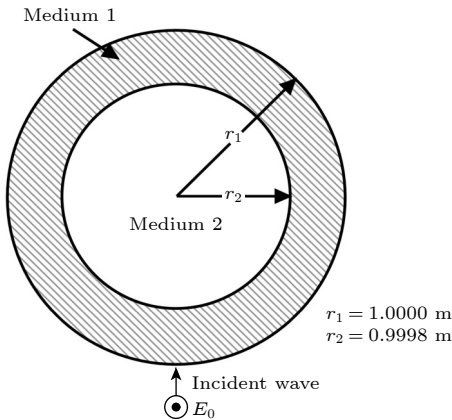


图 15 涂覆球

Fig. 15. Spherical thin layer.

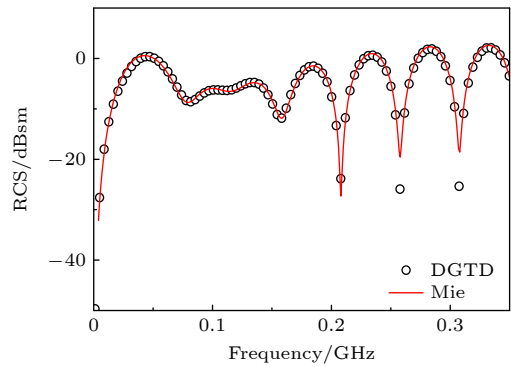


图 18 涂覆双层球单站 RCS 结果

Fig. 18. Monostatic RCS of the coated sphere (double layers).

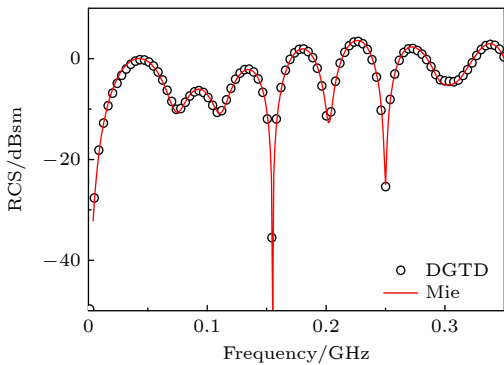


图 16 涂覆球单站 RCS 结果

Fig. 16. Monostatic RCS of the coated sphere.

将该球表面涂层改为双层, 示意图见图 17. 参数为

$$\begin{aligned} \epsilon_{1r} &= 700, \mu_{1r} = 1, \sigma_1 = 5 \text{ s/m}, d = 0.1 \text{ mm}, \\ \epsilon_{2r} &= 500, \mu_{2r} = 1, \sigma_2 = 2 \text{ s/m}, d = 0.1 \text{ mm}, \\ \epsilon_{3r} &= 2, \mu_{3r} = 1, \sigma_3 = 0.005 \text{ s/m}. \end{aligned} \quad (21)$$

球面外设置为自由空间, 该球单站 RCS 结果见图 18.

对于三维薄层算例, 本文算法也可取得较高的精度. 本例均方根误差为 0.8412 dB. 这 3 个三维算例计算时间均为 19 min, 离散尺度为 0.01 m. 如采用标准版 DGTD, 则薄层处离散尺度需要适应薄层厚度 (毫米级). 假如采用 0.02 mm (0.2 mm/10), 0.02 mm 为 0.01 m 的 1/500, 这代表计算时间步将会约为 19 min 的 500 倍, 这一时间估算尚未考虑薄层建模后单元数量的急剧增加. 这样的资源消耗在实践中很难承受.

## 5 结论

薄层问题如精确建模会消耗海量计算资源. 鉴于在 DGTD 方案中引入等效表面电流的方案易导致发散, 本文给出了电磁场修正的薄层快速仿真方案. 这两种方案在物理上等效, 但电磁场修正方案避开了电流激励源的引入, 鲁棒性更好. 本文给出的算例测试了相当大的介电系数薄层算例, 程序也可以给出正确结果, 一维及三维算例说明了本文方

案的精确有效性. 本文方案可应用于涂层目标问题的快速求解, 未来将基于现有成果继续推进, 研究色散薄层类型问题.

## 参考文献

- [1] Feliziani M 2011 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **54** 299
- [2] Hanson G W 2008 *J. Appl. Phys.* **103** 064302
- [3] Shapoval O V, Gomez-Diaz J S, Perruisseau-Carrier J, Mosig J R, Nosich A I 2013 *IEEE Trans. Terahertz Sci. Technol.* **3** 666
- [4] Maloney J G, Smith G S 1992 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **40** 323
- [5] Richmond J 1965 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **13** 334
- [6] Harrington R, Mautz J 1975 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **23** 531
- [7] Luebbers R J, Kunz K 1992 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **40** 349
- [8] Van den Berghe S, Olyslager F, De Zutter D 1998 *IEEE Microw. Guided Wave Lett.* **8** 75
- [9] Schild S, Chavannes N, Kuster N 2007 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **55** 3587
- [10] Wang Y, Langdon S 2014 *IEEE Antennas and Propagation Society International Symposium (APSURSI)* Memphis, July 6–July 11, 2014 pp504–505
- [11] Karlsson A 2009 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **57** 144
- [12] Nayyeri V, Soleimani M, Ramahi O M 2013 *IEEE Trans. Electromagn. Compat.* **56** 385
- [13] Mi J, Ren Q, Su D 2020 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **69** 2230
- [14] Yang Q, Wei B, Li L, Ge D 2020 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **69** 3371
- [15] Ban Z G, Shi Y, Wang P 2021 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **70** 3916
- [16] Zhang T, Bao H, Gu P, Ding D, Werner D H, Chen R 2021 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **70** 526
- [17] Mitzner K 1968 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **16** 706
- [18] Li P, Shi Y, Jiang L J, Bağcı H 2015 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** 5686
- [19] Li P, Jiang L J, Bağcı H 2015 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **63** 3065
- [20] Li P, Jiang L J, Bağcı H 2018 *IEEE Trans. Antennas Propag.* **66** 3590

# A robust discontinuous Galerkin time domain algorithm for penetrable thin layers\*

Yang Qian<sup>1)†</sup> Wei Bing<sup>1)</sup> Li Lin-Qian<sup>1)</sup> Deng Hao-Chuan<sup>2)</sup>

1) (*School of Physics, Xidian University, Xi'an 710071, China*)

2) (*The Science and Technology on Electromagnetic Scattering Laboratory, Beijing 110000, China*)

( Received 21 November 2022; revised manuscript received 29 January 2023 )

## Abstract

The thin layer problem is common in some engineering cases, such as a coating target or dielectric radome. If the skin depth of the medium behind the thin layer is much smaller than the medium scale, the transmission line impedance boundary can be used to solve the thin layer problem. When both sides of the thin layer are free space or the skin depth of the medium behind the thin layer is greater than or comparable to the scale of the medium, the transmission line impedance boundary condition is not applicable. Such problems need incident and reflected wave data and are also known as penetrable thin-layer problems.

When dealing with penetrable thin-layer problems, we need to give the electromagnetic wave data on both sides. In addition, the thin layer problem can belong with multi-scale problems. The EM simulation is difficult to implement because of the high resource consumption of accurate modeling.

The accurate modeling is a very expensive algorithm, and the mesh-size difference between the thin layer region and the surrounding ordinary region is too large, thus seriously affecting the quality of the elements (tetrahedrons). So, it is difficult to solve the problem of thin layer quickly by using the time-domain discontinuous Galerkin method or even by using local time steps or other optimization methods. To acquire a fast solution, the approximate boundary condition can be used to describe the thin layer. The DGTD has also the advantage of the geometric fitting property. If a thin layer model is curved, we can build a conformal geometric model to deal with the thin layer, thus avoiding the complicated interpolation correction scheme.

In this work, A robust DGTD method for penetrable thin layers is proposed. In our study, we find that the current excitation scheme is prone to divergence when large dielectric coefficients are dealt with and its robustness is poor. To solve this problem, we use the electromagnetic field correction scheme in DGTD to deal with the thin layer problems. In addition, engineering problems may encounter multiple thin layers. In this work, a simulation scheme for multiple thin layers is presented and relevant numerical examples are given to verify it. The results illustrate the accuracy and effectiveness of the method in this work, and the method presented in this work can be used for the fast calculation of complex thin layer problems.

**Keywords:** penetrable thin layers, multi-scale problems, discontinuous Galerkin time domain method

**PACS:** 02.70.Dh, 74.25.nm, 92.60.Ta

**DOI:** [10.7498/aps.72.20222230](https://doi.org/10.7498/aps.72.20222230)

\* Project supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant Nos. 61901324, 62001345), the China Postdoctoral Science Foundation (Grant Nos. 2019M653548, 2019M663928XB), the Foundation of National Key Laboratory of Electromagnetic Environment, China (Grant No. 201903002), the Science and Technology on Electromagnetic Scattering Laboratory, China (Grant No. 61424090111), and the Fundamental Research Funds for the Central Universities of China (Grant Nos. XJS200501, XJS200507, JB200501).

† Corresponding author. E-mail: [qyang@xidian.edu.cn](mailto:qyang@xidian.edu.cn)



一种强鲁棒性的时域非连续伽略金可穿透薄层算法

杨谦 魏兵 李林茜 邓浩川

**A robust discontinuous Galerkin time domain algorithm for penetrable thin layers**

Yang Qian Wei Bing Li Lin-Qian Deng Hao-Chuan

引用信息 Citation: *Acta Physica Sinica*, 72, 080202 (2023) DOI: 10.7498/aps.72.20222230

在线阅读 View online: <https://doi.org/10.7498/aps.72.20222230>

当期内容 View table of contents: <http://wulixb.iphy.ac.cn>

---

## 您可能感兴趣的其他文章

### Articles you may be interested in

基于广义交替数值通量的局部间断Galerkin方法求解二维波动方程

Two-dimensional wave equation solved by generalized alternating flux based local discontinuous Galerkin method

物理学报. 2020, 69(2): 020202 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20190613>

一种基于摄动理论的不连续系统Lyapunov指数算法

Lyapunov exponent algorithm based on perturbation theory for discontinuous systems

物理学报. 2021, 70(24): 240501 <https://doi.org/10.7498/aps.70.20210492>

基于多尺度熵的Duffing混沌系统阈值确定方法

Threshold determination method of Duffing chaotic system based on multi-scale entropy

物理学报. 2020, 69(16): 160501 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191642>

有耗介质层上多导体传输线的电磁耦合时域分析方法

Time domain hybrid method for coupling analysis of multi-conductor transmission lines on the lossy dielectric layer excited by ambient wave

物理学报. 2020, 69(6): 060701 <https://doi.org/10.7498/aps.69.20191214>

多尺度水下偏振成像方法

Multi-scale analysis method of underwater polarization imaging

物理学报. 2018, 67(5): 054202 <https://doi.org/10.7498/aps.67.20172009>

黏弹性问题的插值型无单元Galerkin方法

Interpolating element-free Galerkin method for viscoelasticity problems

物理学报. 2019, 68(17): 170203 <https://doi.org/10.7498/aps.68.20191047>